

ATTI

DELLA

REALE ACCADEMIA NAZIONALE  
DEI LINCEI

ANNO CCCXXXIV

1937 (XV)

SERIE SESTA

RENDICONTI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

VOLUME XXV

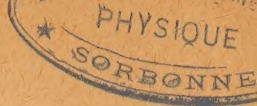


ROMA

DOTT. GIOVANNI BARDI

TIPOGrafo DELLA R. ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

1937 (XV)







# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

Seduta del 3 gennaio 1937 - Anno XV

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica** (Geometria algebrica). — *Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche*. Nota II <sup>(1)</sup> del Socio F. SEVERI.

3. Restiamo ora sul terreno strettamente topologico, supponendo che la  $T$  del n. 1 sia a circolazione dispari nulla e a circolazione pari algebrica, senza punto preoccuparci, per il momento, del significato geometrico di questa proprietà, in relazione alla valenza. E supponiamo altresì che la  $T^{-1}$  goda delle analoghe proprietà <sup>(2)</sup>.

Se la dimensione  $k$  di  $\Gamma_k^l$  è dispari, sarà dunque  $T(\Gamma_k^l) \approx 0$ , e, attesa l'indipendenza dei cicli  $\Gamma_k^l$ , se ne dedurrà  $\mu_{jl}^{(k)} = 0$ . Per  $k$  dispari valgon perciò le relazioni:

$$\sum_i \lambda_{ij}^{(2r-k)} [\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k^l] = 0 \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, R_k).$$

Per un dato  $j$  e per  $l = 1, 2, \dots, R_k$ , queste sono  $R_k$  equazioni lineari nelle  $R_k$  quantità  $\lambda_{ij}^{(2r-k)}$ , e il determinante dei coefficienti è diverso da zero, perchè è il discriminante delle basi duali  $\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k^l$ . Se ne conclude che  $\lambda_{ij}^{(2r-k)} = 0$ , e quindi anche  $\lambda_{ij}^{(k)} = 0$ , per  $k$  dispari ( $i, j = 1, 2, \dots, R_k$ ).

(1) Presentata nella seduta del 20 dicembre 1936.

(2) In verità quest'ipotesi potrebbe dedursi come conseguenza da quella che concerne  $T$ , come ho altrove dimostrato per  $r = 2$ . Il ragionamento cui alludo si estende.



Se  $k = 2s$ , si possono scegliere  $\Gamma_k^1, \dots, \Gamma_k^{q_s}$  coincidenti coi cicli immagini di  $\rho_s$  varietà algebriche  $A_s^1, \dots, A_s^{q_s}$ , tracciate su  $M$  e costituenti ivi una base intermediaia per le varietà pure di dimensione  $s$  (Memoria A, n. 11); gli altri  $R_k - \rho_s$  cicli,  $\Gamma_k^{q_s+1}, \dots, \Gamma_k^{R_k}$  essendo indipendenti tra loro e dai cicli algebrici. Risulta allora:

$$(6) \quad T(\Gamma_k^l) \approx \sum_{j=1}^{q_s} \mu_{jl}^{(k)} A_s^j, \quad (l = 1, 2, \dots, R_k),$$

cioè gl'interi  $\mu_{jl}^{(k)}$ , definiti dalle (2), soddisfanno alle condizioni  $\mu_{jl}^{(k)} = 0$ , per  $k$  pari ed  $j > \rho_s$ ; onde, in forza delle stesse (2) e per un ragionamento simile a quello sopra svolto, viene  $\lambda_{ij}^{(2r-k)} = 0$ , per  $k$  pari ed  $j > \rho_s$ . La considerazione dell'inversa  $T^{-1}$  conduce similmente (ved. l'Osservazione alla fine del n. 1) a concludere che  $\lambda_{ij}^{(k)} = 0$ , per  $k$  pari ed  $i > \rho_s$ .

La (1) perciò diventa:

$$(7) \quad T \approx \sum_{s=0}^r \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(2s)} (A_s^i \times A_{r-s}^j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, \rho_s);$$

relazione che può pure scriversi subito traducendo nel campo topologico la pseudoequivalenza algebrica (1):

$$(8) \quad T \cong \sum_{s=0}^r \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(2s)} (A_s^i \times A_{r-s}^j),$$

caratterizzante una corrispondenza  $T$  a valenza 0 a pseudovalenza zero (Nota B, nn. 2, 6). Viceversa dalle pseudomologie (7) consegue (8) (Memoria A, n. 13). Onde *le corrispondenze a circolazione dispari nulla e a circolazione pari algebrica son tutte e sole le corrispondenze a valenza e a pseudovalenza zero* (ammesso verificato il postulato del n. 13 della A).

Siamo così pervenuti, per via topologica, a quella medesima relazione (8) che avevo trovato, per via algebrico-geometrica, nella Nota B, onde caratterizzare le corrispondenze a valenza 0 a pseudovalenza zero.

4. Poniamo ora:

$$(9) \quad T_s = \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(2s)} (A_s^i \times A_{r-s}^j) \quad ; \quad \lambda_{11}^{(0)} = \alpha, \quad \lambda_{11}^{(2r)} = \beta,$$

sicchè:

$$T_0 = \alpha (x \times M') \quad , \quad T_r = \beta (x' \times M),$$

(1) Due varietà sono *pseudoequivalenti* (nel campo algebrico o razionale) quando due loro convenienti equimultipli son *equivalenti* (nello stesso campo).



$x, x'$  essendo due punti omologhi in  $T$ . Per gli altri valori di  $s$ ,  $s = 1, 2, \dots, r-1$ , la (9) definisce le corrispondenze  $T_1, T_2, \dots, T_{r-1}$ , delle specie  $r, r+1, \dots, 2r-2$ , associate a  $T$ , che avevamo già trovato in  $B$ , per via algebrico-geometrica. Però qui le corrispondenze stesse restano definite a meno d'una pseudomologia o d'una pseudoequivalenza algebrica; mentre in  $B$  eran più precisamente definite, nel caso d'una  $T$  a valenza zero, a meno d'un'equivalenza razionale.

5. Per ottenere il gruppo dei punti uniti di  $T$  si dovranno intersecare coll'identità  $\Omega$  o i due membri della (7) o i due membri della (8). Anche nella (7), come nella (8), i punti d'intersezione di  $A_s^i \times A_{r-s}^j$  con  $\Omega$ , entro  $M \times M'$ , cioè i punti del gruppo  $(A_s^i, A_{r-s}^j)$  si potranno considerare a prescindere dal segno (ossia positivi), perchè i due cicli che s'intersecano sono algebrici (epperò anche di dimensione pari come cicli reali!), nè è possibile scambiare le loro faccie per variazione continua non uscendo dai loro sistemi algebrici (entro  $M$ , se si allude ai cicli  $A_s^i, A_{r-s}^j$ ; entro  $M \times M'$ , se si allude ai cicli  $A_s^i \times A_{r-s}^j, \Omega$ ). Si ha dunque:

$$[T, \Omega] = \alpha + \beta + \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{i,j} \lambda_{ij}^{(2s)} [A_s^i, A_{r-s}^j],$$

ed essendo secondo la posizione (2):

$$\mu_{ij}^{2(r-s)} = \sum_i \lambda_{ij}^{(2s)} [A_s^i, A_{r-s}^j] \quad (i, j = 1, 2, \dots, \rho_s),$$

potremo scrivere:

$$(10) \quad [T, \Omega] = \alpha + \beta + \sum_{s=1}^{r-1} \delta_s,$$

ove:

$$\delta_s = \sum_{j=1}^{q_s} \mu_{jj}^{2(r-s)} \quad (s = 1, 2, \dots, r-1),$$

non è che il *rango di specie  $s$*  di  $T$  (Nota B, n. 6). Pertanto la (10) coincide colla formula di coincidenza trovata nel n. 5 della B. E si è così dimostrata la formula stessa per via puramente topologica.

6. È infine agevole di trasformare la (10) in modo da eliminare i ranghi, sostituendo ad essi gl'indici di  $T$ . Chiameremo, con definizione uniforme da  $s = 0$  ad  $s = r$ , *indice di dimensione  $s$  di una corrispondenza  $T$ , sopra una varietà  $M$  ad  $r$  dimensioni* ( $s = 0, 1, \dots, r$ ), il numero delle coppie  $x, x'$ , di punti omologhi in  $T$ , che hanno  $x$  sopra una varietà algebrica  $A_s$  e  $x'$  sopra un'altra varietà algebrica  $A_{r-s}$ , tracciate su  $M$ .

L'indice  $\alpha$  di dimensione 0 è il numero delle coppie  $x, x'$  che hanno  $x$  dato; l'indice  $\beta$  di dimensione  $r$  è il numero degli omologhi  $x$  di un  $x'$  dato.

Gl'indici d'una data dimensione  $s$  si riducono a combinazioni lineari note di  $\rho_s$  indici relativi alle coppie di varietà tolte da due basi intermedie duali di varietà algebriche ad  $s$  e ad  $r-s$  dimensioni di  $M$ .

Invero, indicate con  $A_s^i, A_{r-s}^j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, \rho_s$ ) queste basi duali, con  $\delta^{(s)}$  l'indice relativo alla coppia  $A_s, A_{r-s}$  e con  $\delta_{ij}^{(s)}$  l'indice relativo alla coppia  $A_s^i, A_{r-s}^j$ , poichè, per convenienti interi  $\lambda, \mu$ :

$$(11) \quad A_s \cong \lambda_1 A_s^1 + \dots + \lambda_{\rho_s} A_s^{\rho_s}, \quad A_{r-s} \cong \mu_1 A_{r-s}^1 + \dots + \mu_{\rho_s} A_{r-s}^{\rho_s},$$

e inoltre:

$$\delta^{(s)} = [T(A_s), A_{r-s}] \quad , \quad \delta_{ij}^{(s)} = [T(A_s^i), A_{r-s}^j]$$

risulta:

$$\delta^{(s)} = \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j \delta_{ij}^{(s)}.$$

7. Dalla (6) assumendo  $\Gamma_k^l$  coincidente con  $A_s^l$  si ricava:

$$(12) \quad T(A_s^l) \approx \sum_{j=1}^{\rho_s} \mu_{jl}^{(2s)} A_s^j,$$

ove

$$(13) \quad \mu_{jl}^{(2s)} = \sum_{i=1}^{\rho_s} \lambda_{ij}^{2(r-s)} [A_{r-s}^i, A_s^l] \quad (l, j = 1, \dots, \rho_s).$$

Dalla (12) poi, per sezione dei due membri con  $A_{r-s}^m$ , segue:

$$\delta_{lm}^{(s)} = \sum_j \mu_{jl}^{(2s)} [A_s^j, A_{r-s}^m],$$

e queste, risolte rispetto alle  $\rho_s$  incognite  $\mu_{jl}^{(2s)}$  per  $l$  dato ed  $m = 1, 2, \dots, \rho_s$ , porgono:

$$(14) \quad \mu_{hl}^{(2s)} = \frac{1}{\Delta^{(s)}} \sum_{i=1}^{\rho_s} \delta_{li}^{(s)} \Delta_{hi}^{(s)} \quad (h, l = 1, 2, \dots, \rho_s),$$

ove  $\Delta^{(s)}$  è il discriminante delle basi duali date e  $\Delta_{hi}^{(s)}$  il complemento algebrico dell'elemento di posti  $h, i$  di  $\Delta^{(s)}$ . Concludendo, si perviene al seguente principio di corrispondenza per una corrispondenza  $T, \infty^r$ , a valenza o a pseudovalenza zero, sopra una varietà  $M$  ad  $r$  dimensioni:



Il numero virtuale  $[T, \Omega]$  dei punti uniti di  $T$  è espresso da:

$$[T, \Omega] = \alpha + \beta + \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{h=1}^{Q_s} \mu_{hh}^{(2s)},$$

ove  $\alpha, \beta$  son gl'indici di dimensioni 0,  $r$  di  $T$  e gl'interi  $\mu_{hh}^{(2s)}$  son dati da

$$\mu_{hh}^{(2s)} = \frac{1}{\Delta^{(s)}} \sum_{i=1}^{Q_s} \delta_{hi}^{(s)} \Delta_{hi}^{(s)},$$

in cui  $\delta_{hi}^{(s)}$  è il generico indice di dimensione  $s$  di  $T$ , relativo a due varietà  $A_s^h, A_{r-s}^i$ , di dimensioni  $s, r-s$ , d'una coppia di basi intermediarie duali;  $\Delta^{(s)}$  è il discriminante delle due basi e  $\Delta_{hi}^{(s)}$  il complemento algebrico in  $\Delta^{(s)}$  dell'elemento di posti  $h, i$ .

OSSERVAZIONE 1<sup>a</sup>. — Una trasformazione analoga a quelle della formula di coincidenza per le corrispondenze a valenza zero, si può eseguire per una trasformazione topologica qualunque su  $M$ , a partire dalla (1). S'introducono in primo luogo gl'indici di  $T$ . L'indice  $\delta_{ij}^{(s)}$  è il numero virtuale delle coppie  $x, x'$  di punti omologhi in  $T$ , aventi  $x$  su  $\Gamma_s^i$  e  $x'$  su  $\Gamma_{2r-s}^j$ , cioè l'indice di Kronecker  $[T(\Gamma_s^i), \Gamma_{2r-s}^j]$ . Si ottiene allora la formula di coincidenza:

$$[T, \Omega] = \sum_{s=0}^{2r} \frac{(-1)^s}{\Delta^{(s)}} \sum_{i,j=1}^{R_s} \delta_{ij}^{(s)} \Delta_{ij}^{(s)},$$

ove  $\Delta^{(s)}$  è il discriminante delle basi  $\Gamma_s^i, \Gamma_{2r-s}^j$  e  $\Delta_{ij}^{(s)}$  è il complemento algebrico dell'elemento di posti  $i, j$  nel discriminante stesso.

OSSERVAZIONE 2<sup>a</sup>. — Per una corrispondenza  $T$  a valenza  $\gamma$ , tenuto conto che  $T + \gamma\Omega$  è a valenza zero, che l'indice di dimensione  $s$  di  $T + \gamma\Omega$ , relativo alla coppia  $A_s^h, A_{r-s}^i$  è uguale a  $\delta_{hi} + \gamma[A_s^h, A_{r-s}^i]$  e infine che  $[\Omega, \Omega] = (-1)^r I_r + 2r$ , ove  $I_r$  è l'invariante di Segre, relativo ad  $M$ , si deduce subito che:

$$[T, \Omega] = \alpha + \beta + \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{r-1} \sum_{h,i=1}^{Q_s} \delta_{hi}^{(s)} \Delta_{hi} - \\ - \gamma [(-1)^r I_r + 2(r-1) - \rho_1 - \rho_2 - \dots - \rho_{r-1}].$$

Si tenga presente che  $\rho_i = \rho_{r-i}$ .

8. Consideriamo in ultimo, in modo particolare, il caso in cui  $T$  trasforma ogni ciclo di dimensione dispari in un ciclo nullo ed ogni ciclo di dimensione pari  $2s$  in un multiplo di un dato ciclo algebrico  $A_s$ : com'è

il caso delle corrispondenze, che estendon, sulle varietà, le corrispondenze di Zeuthen. Vale allora la relazione:

$$A_s \cong \sum_{i=1}^{q_s} \lambda_i^{(s)} A_s^i,$$

e inoltre, per ipotesi,

$$T(A_s^i) \approx \nu_i^{(s)} A_s \approx \nu_i^{(s)} \sum \lambda_i^{(s)} A_s^i;$$

onde, in questo caso,

$$\mu_{ii}^{(2s)} = \lambda_i^{(s)} \nu_i^{(s)};$$

epperò il rango  $\delta_{r-s}$  di  $T$  è espresso da:

$$\delta_{r-s} = \sum \lambda_i^{(s)} \nu_i^{(s)}.$$

D'altro canto:

$$T(A_s) \approx \sum \lambda_i^{(s)} T(A_s^i),$$

è quindi, scelta una varietà  $A_{r-s}$ , che seghi  $A_s$  in un numero virtuale  $[A_s, A_{r-s}] \neq 0$  di punti,

$$[T(A_s), A_{r-s}] = \sum \lambda_i^{(s)} \nu_i^{(s)} \sum \lambda_j^{(s)} [A_s^j, A_{r-s}],$$

e siccome:

$$[A_s, A_{r-s}] = \sum \lambda_j^{(s)} [A_s^j, A_{r-s}],$$

si conclude che:

$$\delta_{r-s} = \frac{[T(A_s), A_{r-s}]}{[A_s, A_{r-s}]} = \frac{\delta^{(s)}}{[A_s, A_{r-s}]}.$$

Dunque:

*Quando la corrispondenza  $T$  muta ogni ciclo di dimensione dispari in un ciclo nullo e ogni ciclo di dimensione pari  $2s$  ( $s = 1, \dots, r-1$ ) in un multiplo di un ciclo algebrico dato  $A_s$  (come accade quando  $T$  è una corrispondenza di Zeuthen generalizzata), se si sceglie una varietà algebrica  $A_{r-s}$ , che seghi  $A_s$  in un numero virtuale  $[A_s, A_{r-s}] \neq 0$  di punti, l'indice  $\delta^{(s)}$  di  $T$ , rispetto alla coppia di varietà  $A_s, A_{r-s}$ , è divisibile per  $[A_s, A_{r-s}]$  ed il rango  $\delta_{r-s}$  di  $T$  è in tal caso uguale al quoto dei due numeri; sicchè risulta:*

$$[T, \Omega] = \alpha + \beta + \sum_{s=1}^{r-1} \frac{\delta^{(s)}}{[A_s, A_{r-s}]}.$$



9. Un caso particolare del tipo di corrispondenze considerate nel numero precedente è quello delle *corrispondenze a circolazione nulla di ogni dimensione*  $k$  ( $1 \leq k \leq 2r - 1$ ). Per una tal corrispondenza  $T$ , d'indici  $\alpha, \beta$ , gl'interi  $\mu$  del  $n$ :  $1$  son tutti nulli, salvo  $\mu_{11}^{(0)} = \lambda_{11}^{(0)} = \alpha$ ,  $\mu_{11}^{(2r)} = \lambda_{11}^{(2r)} = \beta$ , epperò, in forza delle (2) e del fatto che il discriminante delle basi duali  $\Gamma_{2r-k}^i, \Gamma_k^l$  è diverso da zero, son nulli anche tutti gl'interi  $\lambda$ , eccetto i due sopra scritti. Perciò  $T$  è della forma:

$$T \approx \alpha (x \times M') + \beta (x' \times M).$$

Si può anzi provare che quando  $r > 1$  e la  $T$  è algebrica, essa *identificasi* addirittura coll'insieme di  $\alpha$  corrispondenze  $x \times M'$  e di  $\beta$  corrispondenze  $x' \times M$ . Invero,  $T$  muta ogni varietà algebrica effettiva  $A_s$  ( $1 \leq s \leq r - 1$ ) di  $M$  in una varietà algebrica effettiva, che deve essere un ciclo topologico nullo. Poichè una varietà algebrica effettiva d'ordine  $> 0$  non è mai, un ciclo nullo (Lefschetz), così  $A_s$  è mutata in un gruppo  $X'$  di un numero finito di punti. Se  $A_s$  *varia* in un sistema algebrico, il gruppo  $X'$  non può variare, perchè altrimenti descriverebbe una varietà algebrica  $A_t^i$  di dimensione  $t > 0$  ed allora la corrispondente di una varietà algebrica generica  $B_{r-t}^i$  di  $M'$  non potrebbe essere un ciclo nullo, perchè  $B_{r-t}^i$  sega  $A_t^i$  in un numero  $> 0$  di punti. Ne deriva che un punto generico di  $M$  ha come corrispondente il gruppo  $X'$ ; epperò:

*Sopra una varietà di dimensione*  $r > 1$  *ogni corrispondenza a circolazione nulla di qualunque dimensione è degenera e riducibile (somma di due corrispondenze degeneri di specie*  $2r - 1$ *).*

Per  $r = 1$  esistono invece corrispondenze non degeneri irriducibili a circolazione nulla: son le corrispondenze generiche a valenza zero.

**Meccanica.** — *Sul principio fondamentale della Meccanica classica* <sup>(1)</sup>. Nota <sup>(2)</sup> del Socio E. ALMANSI.

1. A fondamento della Meccanica classica si pone la formula vettoriale  $mA = F$  (*massa*  $\times$  *accelerazione* = *forza*), ovvero

$$(\alpha) \qquad A = \frac{F}{m},$$

che si ritiene valida per tutti i corpi (idealmente ridotti a punti materiali), assumendo come sistemi di riferimento *sistemi di assi fissi rispetto all'Universo*, od anche sistemi aventi, rispetto ai sistemi fissi, un moto traslatorio, rettilineo ed uniforme.

Questo modo di formulare la legge fondamentale della Meccanica dà luogo, come è noto, a gravi difficoltà.

Noi non possiamo conoscere la reale costituzione dell'Universo; ma adottando una concezione che sembra, meglio di ogni altra, atta a rappresentarlo, siamo portati a considerare l'Universo come un sistema di corpi *che si estende all'infinito*. Ciò posto, si osserva in primo luogo, che per un sistema il quale si estende all'infinito è da escludere (salvo casi affatto eccezionali) che esistano punti a cui competa il carattere di *fissi* rispetto al sistema (come si può considerare il baricentro per un sistema *finito*), quindi che esistano assi da potersi ritenere fissi rispetto al sistema stesso; in secondo luogo, che un vettore  $F$  il quale rappresenti, per un punto materiale, la risultante di tutte le forze agenti sul punto, dovute agli infiniti corpi dell'Universo, probabilmente non esiste.

Queste considerazioni inducono a rinunziare alla formula  $(\alpha)$ , e a ricorrere ad un'altra formula che si possa assumere come Principio fondamentale della Meccanica ordinaria.

2. Teniamo presente il fatto, desunto dalle osservazioni, che la *velocità radiale* di due stelle (vale a dire la quantità  $\frac{dr}{dt}$ , ove  $r$  denota la loro distanza) non supera, in generale, certi limiti, relativamente piccoli. Da questo fatto consegue che le rette congiungenti stelle fra loro lontanissime

(1) Il contenuto di questa Nota si ritrova, in gran parte, esposto più diffusamente, nella mia Memoria: *Le equazioni generali della Dinamica e la legge di gravitazione*. (« Acc. Lincei », vol. VIII, 1913).

(2) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1937.



possono considerarsi (escludendo, al più, un piccolo numero di stelle) come rette che hanno, le une rispetto alle altre, direzioni quasi invariabili, e che tendono a diventare invariabili col crescere delle distanze. Ciò permette di definire non già sistemi di assi fissi, ma sistemi di assi *aventi un orientamento invariabile rispetto all' Universo*, intendendo con questo che essi abbiano un orientamento invariabile rispetto alle rette che congiungono stelle fra loro infinitamente lontane <sup>(1)</sup>.

A questi sistemi di assi (praticamente determinabili con sufficiente approssimazione) dobbiamo riferirci per formulare una legge che si possa assumere come legge fondamentale della Meccanica.

3. Ragioniamo, per un momento, come se la forza totale  $F$ , agente sopra un punto materiale  $m$ , fosse un vettore ben determinato, ed esistesse un sistema di assi  $\Sigma$ , rispetto al quale fosse valida, per tutti i corpi, la formula  $(\alpha)$ . Considerando due corpi di masse  $m_1, m_2$ , sollecitati dalle forze  $F_1, F_2$ , si avrebbe  $A_1 = \frac{F_1}{m_1}$ ,  $A_2 = \frac{F_2}{m_2}$ ; quindi:

$$(\beta) \quad A_1 - A_2 = \frac{F_1}{m_1} - \frac{F_2}{m_2}.$$

Osserviamo che questa formula sussisterebbe riferendosi non solo al sistema  $\Sigma$ , ma a qualunque altro sistema  $\Sigma'$ , che fosse immobile rispetto al sistema  $\Sigma$ , o avesse rispetto ad esso un semplice moto traslatorio; passando infatti dal sistema  $\Sigma$  al sistema  $\Sigma'$  le accelerazioni  $A_1$  ed  $A_2$  in generale varierebbero, ma la loro differenza non varierebbe.

Orbene, noi assumeremo come Principio fondamendale della Meccanica la formula  $(\beta)$ , intendendo che essa sia valida, per qualunque coppia di punti materiali, con riferimento a quei sistemi di assi che abbiamo definiti come aventi un orientamento invariabile rispetto all' Universo, e che chiameremo, più semplicemente, *sistemi orientati*. Ammetteremo, ora, che le forze  $F_1$  ed  $F_2$  possano essere indeterminate, ma supporremo che il 2° membro della formula  $(\beta)$ ,  $\frac{F_1}{m_1} - \frac{F_2}{m_2}$  (più esattamente il limite a cui esso tende coll' intervenire di forze esercitate su  $m_1$  ed  $m_2$  da corpi sempre più lontani), abbia un valore ben determinato.

4. Premesso questo, mi propongo, ricorrendo alla formula  $(\beta)$ :

1°, di dare una formula che rappresenti, rispetto a sistemi di assi convenientemente scelti, la legge del movimento di tutti i corpi;

2°, di far vedere come ricompare (formalmente) la formula  $(\alpha)$ .

(1) V. ENRIQUES, *Problemi della Scienza*, pp. 398, 399.

Per ciò che riguarda la prima questione, consideriamo due corpi, o punti materiali, di masse  $m_o, m_i$ ; e scriviamo l'equazione, analoga alla ( $\beta$ ),

$$A - A_o = \frac{F}{m} - \frac{F_o}{m_o}.$$

Riferiamoci ad un sistema orientato  $\Sigma$  che abbia l'origine nel punto  $m_o$ . L'accelerazione  $A_o$  del punto  $m_o$  sarà nulla; onde avremo:

$$(\gamma) \quad A = \frac{F}{m} - \frac{F_o}{m_o}.$$

Essendo  $m$  un corpo qualunque, la formula ( $\gamma$ ) ci darà (*teoricamente*, non conoscendosi le masse dei corpi lontani) la legge del moto di tutti i corpi, rispetto al sistema  $\Sigma$ . In un certo senso possiamo dire che la formula ( $\gamma$ ) sostituisce l'ordinaria formula ( $\alpha$ ).

5. Veniamo ora alla seconda questione: come ricompare la formula ( $\alpha$ ).

Sia  $S$  un sistema di  $n$  punti materiali, aventi le masse  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Riferiamo il sistema  $S$  ad un sistema di assi orientato,  $\Sigma$ , che abbia l'origine nel baricentro di  $S$ . Diciamo *moti interni* del sistema  $S$  i moti dei suoi punti rispetto a  $\Sigma$ ; e supponiamo che i corpi non appartenenti ad  $S$  siano così lontani da esso che la loro influenza sopra i moti interni del sistema possa ritenersi trascurabile. Chiameremo *sistema isolato* un sistema che si trovi in queste condizioni. Tale può considerarsi, per esempio, il Sistema solare.

In un sistema isolato, trascurandosi le forze dovute a masse non appartenenti al sistema, i termini  $\frac{F_1}{m_1}$  ed  $\frac{F_2}{m_2}$  della formula ( $\beta$ ) saranno *finiti*. Noi potremo perciò, nella ( $\beta$ ), separare quei due termini, e scrivere:

$$A_1 - \frac{F_1}{m_1} = A_2 - \frac{F_2}{m_2}.$$

Da questa formula, e dalle altre analoghe, si desume che le  $n$  quantità (vettoriali)

$$A_1 - \frac{F_1}{m_1}, A_2 - \frac{F_2}{m_2}, \dots, A_n - \frac{F_n}{m_n}$$

sono tutte uguali. Diciamo  $K$  il loro valore comune. Sarà:

$$A_i - \frac{F_i}{m_i} = K, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Moltiplicando per  $m_i$ , e sommando, per tutti i valori di  $i$  da 1 ad  $n$ , avremo:

$$\sum_1^n m_i A_i - \sum_1^n F_i = K \sum_1^n m_i.$$



Ma il termine  $\sum_1^n m_i A_i$  è nullo (le accelerazioni essendo relative al bari-centro). Pure nullo è il termine  $\sum_1^n F_i$ , risultante delle mutue azioni che si esercitano fra i corpi del sistema. Quindi, per l'ultima formulá, sarà  $K = 0$ ; e per la precedente:

$$A_i = \frac{F_i}{m_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

In definitiva, per tutti i corpi del sistema considerato, sussiste la formula  $A = \frac{F}{m}$ ; ossia la formula ( $\alpha$ ).

Riferendoci alle definizioni dei *sistemi isolati*, e dei *moti interni* di un sistema, possiamo dire che la formula ( $\alpha$ ) ci dà *la legge dei moti interni di un sistema isolato*. Il fatto che il Sistema solare, e presumibilmente innumerevoli altri sistemi, possono considerarsi "sistemi isolati, conferisce un'importanza capitale alla formula ( $\alpha$ ), nel senso ristretto che le abbiamo qui sopra assegnato; mentre una formula ( $\alpha$ ), valida per tutti i corpi dell'Universo rispetto ad ipotetici assi fissi, non sembra avere alcuna rispondenza con fenomeni reali.

Da un sistema isolato di punti materiali noi potremo passare a sistemi pure isolati, ma più vicini, per i loro caratteri, ai sistemi reali. L'esame dei moti interni di questi sistemi comprende, in sostanza, tutto ciò che la Meccanica ordinaria può farci conoscere sui fenomeni di movimento.

**Geologia.** — *Osservazioni preliminari sulla serie cenozoica dell'Appennino pugliese*<sup>(1)</sup>. Nota<sup>(2)</sup> del Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI.

Durante i sopralluoghi eseguiti, nella scorsa estate, in vari punti dell'Italia meridionale, nell'interesse degli studi sul petrolio, insieme con l'ing. C. Migliorini, si è data l'opportunità di compiere anche alcune escursioni attraverso l'Appennino pugliese. Questo esteso rilievo montuoso, che orla a ponente l'alta Puglia, è stato da me rapidamente percorso per la prima volta negli anni 1911-1916, quando non esisteva ancora su di esso che una scarsissima e molto antica letteratura geologica e paleontologica ed i vecchi rilevamenti statali riportavano la massima parte di quei terreni all'Eocene<sup>(3)</sup>. Le osservazioni, che da qualche anno vado compiendo su quella vasta regione, permettono ora di rettificare gli antichi riferimenti cronologici<sup>(4)</sup>.

Nella presente Nota, che è di carattere preliminare, do conto dei risultati delle ricerche fatte presso Castelluccio Valmaggiore e precisamente lungo il corso del torrente Freddo, che è un affluente di sinistra del Celone. Ivi l'azione delle acque ha scoperto una serie molto potente e regolare di strati, la quale si può seguire per oltre un chilometro.

La serie s'inizia a valle del ponte sulla rotabile Castelluccio Valmaggiore-Faeto e si continua sino alle falde del Monte Sidone, una delle maggiori alture dell'Appennino pugliese (1081 m.). Si tratta di un complesso marnoso-argilloso varicolore (*argille scagliose*), che a varie altezze racchiude potenti fasci di calcari e di breccioline calcaree, e, meno frequentemente, banchi molassici ed arenacei.

Gli strati più bassi affiorano a valle del ponte, a circa 15 metri sotto il livello stradale, emergenti dall'alluvione; cosicchè riesce impossibile sapere su quale base essi si appoggino. È invece stato possibile conoscere, come diremo in seguito, la formazione che si sovrappone direttamente alle argille scagliose.

Gli strati sono normali al letto del torrente e si immergono a NO; per causa del movimento delle argille, l'inclinazione varia leggermente,

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia e paleontologia dell'Università di Roma.

(2) Presentata nella seduta del 3 gennaio 1937.

(3) *Osservazioni geologiche nell'Appennino della Capitanata, 1912-1917.*

(4) Ved. anche G. CHECCHIA-RISPOLI, *Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata, 1935.*



aggirandosi tra i 25° ed i 30°. Lungo il corso, il letto fa dei piccoli salti, che possono servire come punti di riferimento in mancanza di altri dati.

La serie principia con spessi strati di calcare biancastro, molto tenace, per lo più brecciato, passante a breccioline sempre più minute, sino a calcari a grana fina. In principio le intercalazioni argillose sono sottili e scarse; però, oltre il primo salto, sono più frequenti e assumono notevoli spessori.

Questi sono gli strati che da tempo ho fatto conoscere e che hanno fornito la ricchissima fauna di foraminiferi composta di un notevole numero di specie eoceniche con poche *Lepidocycline*, solamente in parte illustrate <sup>(1)</sup>.

Proseguendo a monte del corso, dopo una regolare successione di argille scagliose con sottili strati calcarei, circa ad un centinaio di metri da un primo salto, è stata constatata la presenza di pochissimi straterelli di un materiale arenaceo, poco coerente, di color cupo rossastro, facilmente separabile in sottilissime lastrine, sulla cui superficie si osservano delle *Lepidocycline* di piccole dimensioni (*Lep. Tournoueri* ecc.) e *Miogypsine* (*M. cfr. irregularis*). Le sezioni sottili mostrano poi *Rotalia tuberculata*, qualche *Amphistegina* cfr. *Niasi*, *Operculina complanata*, *Heterostegina* sp., *Carpenteria* sp., oltre a *Globigerine* ed altri piccolissimi foraminiferi, resti di briozoi, sottilissimi radioli di echinidi ecc. Insieme si trovano pure, per quanto molto di rado (relativamente anche al poco materiale finora raccolto) delle piccole *Nummulites*, di difficile identificazione: una di queste ha la spira piuttosto larga ed i setti quasi diritti; un'altra per l'ampiezza della spira, che consta di tre giri, si distingue da *N. budensis* per i setti meno inclinati ecc. La scarshezza del materiale non permette pel momento di giudicare meglio queste rarissime forme.

A monte di detti straterelli, dopo una cinquantina di metri di argille varicolori, s'incontrano, insieme a strati molassici ed arenacei, fasci di calcari compatti, tenaci, che al microscopio si presentano come minutissime breccioline a cemento per lo più calcitico. In questi calcari si ripete su per giù la medesima associazione di specie eoceniche con *Lepidocycline* e *Miogypsine*. Questa successione si ripete sino a 500 m. dal ponte, fino a che vien dato d'incontrare un notevole strato di materiale sabbioso, alquanto argilloso, incoerente, zeppo di foraminiferi di grandi, medie e piccole dimensioni, che si raccolgono completamente sciolti. I più abbondanti sono le *Nummuliti*, tra cui si notano per abbondanza di esemplari: *Nummulites*

(1) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Considerazioni paleontologiche sulla fauna dell'Eocene dei dintorni di Castelluccio-Valmaggiore (Capitanata)*, 1925.

NB. — L'attiva escavazione di quei calcari, di cui si fa larga esportazione nei paesi vicini, ha, dopo il lungo tempo trascorso dal mio primo sopralluogo ad oggi, mutato di molto l'aspetto della località.

*perforatus*, *N. Partschi*, *N. laevigatus*, *N. complanatus*, *N. biarritzensis* ecc. meno comuni sono gli esemplari di *Assilina spira*, di varie *Ortophragmina*, di *Alveolina* (*Alv. milium*, *Alv. oblonga*) ecc., associate con rare *Lepidocyclina* (*Lep. inflexa*, *marginata*). Insieme si raccolgono grossi ed isolati radioli di Cidaridi.

Lo stato di conservazione di questi fossili è eguale per tutti: accanto ad esemplari che nulla lasciano a desiderare per integrità, ve ne sono moltissimi altri più o meno levigati; i radioli degli echinidi hanno perduto la loro ornamentazione.

Detto strato è spesso 4-5 metri ed è direttamente sormontato da uno spesso banco di calcare durissimo, compatto, a grana fina, di color grigio-cenere, che forma il secondo salto. Le sezioni sottili di questo calcare mostrano in un cemento calcitico dei piccolissimi foraminiferi (*Globigerina*, *Cristellaria*, *Textularia* ecc.) qualche *Rotalia tuberculata*, *Amphistegina Niasi*, rarissime *Miogypsina irregularis* e minuscoli frammenti di sezioni equatoriali di *Lepidocyclina*, *Heterostegina* ecc.

Procedendo ancora a monte, a circa 60-70 metri dal secondo salto (a circa 650 metri dal ponte), appaiono, intercalati sempre nelle argille, degli strati di una brecciolina calcarea minutissima, compatta, di color grigio-cenere, costituita quasi esclusivamente di foraminiferi, che non raggiungono le dimensioni di quelli contenuti negli strati sottostanti: essi misurano appena 6-7 mm. di diametro. Anche qui si ripete la medesima associazione: tra le nummuliti, è discretamente comune *Nummulites vascus*; fra le *Ortophragmina*, *O. radians*, *O. scalaris*, *O. Distefanoi* ecc., si trova anche qualche piccolo esemplare di *Assilina spira*, più rari quelli di piccole *Alveolina*; poi nelle sezioni sottili si osservano *Rotalia tuberculata*, piccole *Lepidocyclina* e *Miogypsina*, *Gypsina* sp., *Operculina* sp., *Amphistegina* sp., *Spiroclypeus* sp., a cui si aggiungono *Globigerinidi*, rari briozoi, sottili radioli di Echinidi, tubi di *Ditrupa incurva* ecc. Lo stato di conservazione, giova ripetere, è uguale per tutti: accanto ad esemplari ben conservati, altri se ne trovano, comprese le *Lepidocyclina*, financo allo stato di frammentini.

Risalendo il corso del torrente, a circa 1 Km. dal ponte, in mezzo alle argille si vedono affiorare degli strati di un calcare durissimo, compatto, selcifero, azzurrognolo o cenerognolo, che formano un terzo salto.

Nelle varie sezioni eseguite non appaiono nè nummuliti, nè ortophragmine, nè assiline, bensì *Lepidocycline* di piccole dimensioni (*Lep. Morgani*), *Miogypsina complanata*, oltre a sezioni trasversali di *Rotalia* sp., *Amphistegina*, *Heterostegina*, *Operculina*, *Spiroclypeus*; alghe sifonee, briozoi, radioli di Echinidi, sezioni trasversali di ittiodontoliti ecc. I fossili sono in genere ben conservati; nella pasta del calcare si trovano anche detriti di vari altri prima nominati.



Procedendo ancora avanti nella serie, si vedono emergere altri calcari, litologicamente non molto differenti dai precedenti, i quali contengono in abbondanza Miogypsine ed Amphistegine, più raramente Lepidocycline, qualche esemplare di *Heterostegina depressa*, briozoi, alghe ecc. Nelle sezioni si osservano inoltre frammenti di grosse Lepidocycline e di altri fossili precedentemente nominati.

Un poco più a monte gli strati descrivono una piega asimmetrica. Oltre la cerniera la serie, che prima era più tranquilla, presenta delle pieghettature. Le marne, per lo più di tinta uniforme cenerina, contengono delle piccole intercalazioni di una minuta brecciolina calcarea. Le sezioni sottili, in mezzo a frammenti di rocce e fossili più antichi, mostrano piccole e rarissime *Lepidocycline* e *Miogypsine*; e là dove la pasta è più fina, globigerine e spicule di spugne. Questi strati per i fossili, aspetto e posizione corrispondono perfettamente a quelli che ho recentemente segnalato nei dintorni di Pietra Montecorvino, sempre nell'Appennino pugliese <sup>(1)</sup>. Come in quest'ultima regione, anche qui le argille scagliose vanno a sottoporsi ai calcari, calcari marnosi e marne giallicce, che formano la grande massa del M. Sidone e di tutti i monti della Daunia e della Puglia. Questo membro elevato della serie è stato già riferito al Miocene medio: esso è molto esteso in tutta la Capitanata.

In questi calcari più elevati, oltre a piccole Miogypsine ed Amphistegine, sono abbondanti le alghe calcaree, i briozoi ed i tubi di *Ditrupa*; inoltre sulla superficie degli strati si raccolgono qua e là resti di *Aequipecten scabrellus*, *H. Haveri*, *Ostrea langhiana*, radioli di *Cyathocidaris avenionensis*, denti isolati di *Oxyrhina hastalis*, *Alopecias latidens* ecc. <sup>(2)</sup>.

Tale presso a poco è la sezione lungo il vallone del Freddo, che si può seguire, per circa un chilometro e mezzo; siccome in media si può ritenere l'inclinazione di circa 27°, così si può calcolare lo spessore di tutta la sezione a circa 700 metri, sino all'incontro dei calcari marnosi giallicci.

La parte più elevata della serie descritta, sottostante ai calcari del Miocene medio, sino ai calcari selciferi compresi, che formano il terzo salto, in cui abbondano esclusivamente *Lepidocyclina* e *Miogypsina*, per la posizione e per i fossili, non può riferirsi che al Miocene inferiore. Un analogo riferimento è stato fatto per la massa delle argille con interstrati calcarei sottostanti ai calcari marnosi giallicci dei dintorni di Pietra Montecorvino.

Riguardo a questi strati credo di poter aggiungere, però con molta riserva, che non si possa escludere che i più bassi strati marnosi non siano

(1) G. CHECCHIA-RISPOLI e M. TARICCO, *Nota preliminare su giacimenti di argille smettiche in Italia*, 1936.

(2) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Su di una formazione miocenica dell'Appennino della Capitanata*; vedi anche *Foglio di San Severo* (F. 155 della Carta al 100.000), pubblicata a cura del R. Ufficio geologico, 1932.

separati da quelli immediatamente sottostanti da qualche disgiunzione tettonica. Il fatto è che gli strati marnosi, che stanno al disotto dei calcari selciferi, sembrano male esposti rispetto al sottostante complesso, che è molto regolare.

Resta ora a stabilire l'età di quest'ultimo.

Un fatto importante rilevato durante il sopralluogo, eseguito insieme con l'ing. Migliorini, è stata la constatazione di quei pochi ed isolati straterelli arenacei intercalati quasi in mezzo alla grande massa dei calcari, i quali per il loro carattere litologico si differenziano dagli strati sottostanti e soprastanti. Con gli elementi finora raccolti, altro non si può dire per il momento, che questi, per la presenza di quelle poche nummuliti, non sono miocenici. Ciò è poco: occorre perciò precisare meglio l'età di essi; il che mi sarà possibile dopo un nuovo sopralluogo e dopo aver raccolto più abbondante materiale. Una volta fissata l'età di questi straterelli, non sarà difficile di fissare anche, una buona volta, l'età degli strati immediatamente sottostanti e soprastanti: tutti questi strati formano una successione continua e molto regolare. È precisamente in essi che fu constatata la prima volta, molti anni or sono, la coesistenza di numerose specie eoceniche (circa una quarantina) con le *Lepidocyclina* e ciò per uno spessore che può venir calcolato a circa 250 metri. Può risultare alla fine che questa coesistenza sia dovuta a rimaneggiamento; è però da escludere che le sole *Lepidocyclina* siano in posto in quegli strati, per tutte le ragioni già esposte in un mio lavoro, al quale rimando per non ripetere cose già dette. (*Nuove osservazioni sulla fauna nummulitica dei dintorni di Castelluccio Valmaggiore*, 1931). Il rimaneggiamento di tutte queste forme, allora, non potrebbe essere avvenuto che verso la fine dell'Oligocene <sup>(1)</sup>.

Per concludere intanto, dai risultati delle ricerche da me intraprese in questi ultimi anni in vari punti dell'Appennino meridionale si può ritenere:

1° che le argille scagliose variegiate devono in parte essere riferite al Miocene inferiore;

2° che i calcari, i calcari marnosi e le marne giallicce soprastanti debbono essere riportati al Miocene superiore;

3° che tanto il primo, che il secondo complesso, creduti finora eocenici, sono i principali costituenti di tutto l'Appennino della Capitanata.

(1) Recentissimamente una associazione quasi identica a quella di Castelluccio Valmaggiore è stata indicata dal Flandrin nell'Eocene dell'Algeria; però essa è stata subito infirmata dal Senn (ved. I. FLANDRIN, *La faune de Tizi Renif près Dra el Mizan (Algérie)*, 1934 ed ID., *Au sujet des grands Lepidocyclines de l'Eocene des Beni-Aseur*, 1935). Per altro il Senn segnala nel Marocco nord-orientale, sin dal Luteziano, l'associazione di *Nummulites ataticus*, *N. gizehensis*, *N. curvispira* e di *Orthophragmina* con varie specie di *Lepidocyclina* (ved. A. SENN, *Die stratigraphische Vertretung der tertiären Orbiloiden, mit spezieller Berücksichtigung ihres Vorkommens in Nord-Venezuela und Nord-Marokko*, 1935).



## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Polinomi definiti.* — III. *Interpretazioni, proprietà e complementi.* Nota di G. BARBA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. V. NOBILE.

1. In due precedenti Note dallo stesso titolo (vedi questi « Rendiconti ») abbiamo trattato del problema dei polinomi definiti.

Nell'ultima di queste Note abbiamo iniziato lo studio delle funzioni  $G(x)$  che, attraverso l'integrazione, conducono da un polinomio non indefinito  $P(x)$  ad un altro non indefinito  $Q(x)$ .

Continueremo in questa Nota tale studio, rimandando per tutte le indicazioni alle due Note precedenti.

Consideriamo la classe di trasformazioni fornita dalla operazione elementare  $E_\alpha$ :

$$Q(x) = e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha x} \cdot P(x) dx$$

con  $\alpha > 0$ , che muta polinomi non indefiniti in polinomi non indefiniti.

Ovviamente, con l'applicazione iterata della integrazione per parti, si riproduce *sempre* l'esponenziale  $e^{-\alpha x}$ .

Si ha, pertanto:

$$\frac{1}{\alpha} \cdot P(x) = \frac{e^{\alpha(x-\zeta)}}{\alpha} \cdot P(\zeta) + \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \int_x^\zeta e^{-\alpha x} \cdot P'(x) dx.$$

Se si vuole che l'operazione  $E_\alpha$  porti da polinomi a polinomi, nella precedente espressione non dovranno figurare esponenziali, il che richiede, non potendo essere  $\zeta = x$ , sia  $\zeta = \infty$ .

Naturalmente, si potrebbe dare una analoga definizione di  $E_\alpha$ , ponendo:

$$Q(x) = e^{-\alpha x} \int_{-\infty}^x e^{\alpha x} \cdot P(x) dx \quad (\alpha > 0).$$

Ma noi preferiamo, per fissare le idee, quella già data.

(1) Nella seduta del 6 dicembre 1936.

Che da polinomio non indefinito, poi, l' $E_\alpha$  conduca a polinomio non indefinito è nel fatto, *noto*, che l'integrale definito di una funzione non minore di zero è non minore di zero.

È da osservare, però, che tale seconda classe di trasformazioni non muta, come la prima, un termine in  $x^m$ , in un altro nello stesso  $x^m$ , bensì in un polinomio di grado  $m$ , com'è evidente attraverso l'iterata integrazione per parti cui si è accennato in precedenza.

2. Applichiamo, ora, al polinomio non indefinito  $P(x)$ , iteratamente, le operazioni  $E_\alpha, E_\beta$ . Si ha, successivamente:

$$E_\alpha \cdot P(x) = e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha x} \cdot P(x) dx = Q(x)$$

essendo  $Q(x)$  non indefinito e dello stesso grado di  $P(x)$ . Indi:

$$E_\beta [E_\alpha P(x)] = e^{\beta x} \int_x^\infty e^{-\beta x} Q(x) dx = R(x)$$

con  $R(x)$  non indefinito e di grado eguale a quello di  $P(x)$ .

È facile vedere che non può esistere  $\gamma$  tale che sia:

$$E_\beta E_\alpha P(x) = E_\gamma P(x).$$

mentre è evidente la proprietà:

$$E_\beta [E_\alpha P(x)] = E_\alpha [E_\beta P(x)].$$

Segue, da quanto sopra, che l'operatore  $E$  non dà luogo a gruppi.

Consideriamo i due operatori  $E_\alpha$  ed  $E_\beta$  applicati a  $P(x)$ , e componiamo, secondo Hadamard; si ha:

$$\hat{E}_\alpha \hat{E}_\beta = E_{\alpha\beta}.$$

Quindi gli operatori  $E$  costituiscono gruppo solo di fronte alla « moltiplicazione » di Hadamard.

Dopo ciò risulta che un complesso avente la *proprietà grupppale* si ha nella formazione:

$$\mathcal{E} = \hat{C}_1 \hat{E}^{(1)} + \hat{C}_2 \hat{E}^{(2)} + \dots + \hat{C}_n \hat{E}^{(n)}$$

dove con  $E^{(i)}$  si intende l'applicazione iterata di operazioni  $E$ , applicate ad un polinomio  $P(x)$  e con  $C_i$  una espressione della forma:

$$\sum c_i P^{(i-1)}(x)$$



dove le  $c_r$  sono costanti opportunamente scelte, e col simbolo  $\circ$  sovrapposto a due espressioni è intesa la composizione secondo Hadamard delle due espressioni.

Le  $c_i$  dovranno essere *tutte positive* se  $E^{(i)}$  è l'applicazione di un numero *dispari* di operazioni  $E$ , *tutte negative* in caso contrario.

Anche qui è da porre la questione:

Dato il polinomio non indefinito  $P(x)$ , attraverso le operazioni  $E$  costruiamo i polinomi non indefiniti  $P_i$ : *determinare il polinomio-baricentro dell'iperpiramide di vertici  $P_i$ .*

Da

$$Q(x) = q_n x^n + \dots + q_0 = E_\alpha P(x) = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\alpha^i} P^{(i)}(x).$$

Ne risulta, il sistema:

$$(10) \quad q_s = \sum_{i=0}^{n-s+1} \frac{1}{\alpha^i} a_{s+i-1} \cdot D_{s+i-1, i-1} \quad (s = 0, \dots, n)$$

che assegna i coefficienti di un polinomio non indefinito  $Q(x)$ , attraverso i coefficienti di un assegnato polinomio non indefinito  $P(x)$ .

Le (10) inoltre, ci consentono di riconoscere se un polinomio  $Q(x)$  è non indefinito: perchè ciò sia, *basta* che esista un *valore positivo*  $\alpha$  per cui le (10) siano soddisfatte.

Più generalmente, poichè è non indefinito il polinomio somma di polinomi non indefiniti, con partenza da un dato polinomio non indefinito  $P(x)$ , applichiamo ad esso, a volta a volta, gli operatori  $E_\alpha, \dots, E_\lambda$ , in numero di  $n$ , indi addizioniamo.

Perverremo a relazioni del tipo:

$$q_s = \sum_{i=0}^{n-s+1} \left( \frac{1}{\alpha^i} + \dots + \frac{1}{\lambda^i} \right) a_{s+i-1} \cdot D_{s+i-1, i-1}$$

sulle quali si può ragionare come prima.

3. Siano  $P(x)$  e  $Q(x)$  due polinomi legati dalla operazione  $E_\alpha$ , sicchè:

$$(11) \quad Q(x) = e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha x} \cdot P(x) dx.$$

Moltiplicando (11) per  $e^{-\alpha x}$  e derivando rispetto a  $x$ , posto:

$$(12) \quad \frac{1}{\alpha} \frac{d}{dx} = \frac{D}{\alpha}$$

risulta:

$$(13) \quad P(x) = \alpha \left[ Q - \frac{1}{\alpha} Q' \right] = \alpha \left[ 1 - \frac{D}{\alpha} \right] D$$

dove il prodotto simbolico  $DQ$  equivale, giusta la (12), alla derivazione di  $D$ .

Si ha, poi, in base a quanto si è in precedenza trovato ed alla (12)

$$Q(x) = -\frac{1}{\alpha} \left[ 1 + \frac{D}{\alpha} + \frac{D^2}{\alpha^2} + \dots \right] \cdot P(x).$$

Servendoci in questa della (13), abbiamo, simbolicamente:

$$\left( 1 - \frac{D}{\alpha} \right)^{-1} = - \left[ 1 + \frac{D}{\alpha} + \frac{D^2}{\alpha^2} + \dots \right].$$

Il secondo membro, considerato quale equazione algebrica di grado  $n$  in  $\frac{D}{\alpha}$ , si può esprimere quale prodotto di fattori lineari nelle radici, tenendo presente che in questo caso, essendo l'equazione reciproca, avrà quali sue radici le radici  $(n+1)^{esima}$  dell'unità.

Ne segue:

$$\left( 1 - \frac{D}{\alpha} \right)^{-1} = - \left( \frac{D}{\alpha} - \varepsilon \right) \left( \frac{D}{\alpha} - \varepsilon^2 \right) \dots \left( \frac{D}{\alpha} - \varepsilon^n \right).$$

Dunque, per invertire le operazioni che consentono di passare da  $P(x)$  a  $Q(x)$  basta fare il prodotto di certe altre operazioni e precisamente, basta applicare a  $Q(x)$ , l'operazione:

$$- \prod_i^n \left[ \frac{D}{\alpha} - \varepsilon^i \right].$$

Dalla formola risulta, poi, pel passaggio da  $P(x)$  a  $Q(x)$  e da questo ad  $R(x)$ , che se le operazioni successive dei passaggi sono  $E_\alpha$  ed  $E_\beta$ , nel passaggio diretto, vale la notazione simbolica:

$$\frac{1}{\alpha\beta} \frac{d}{dx} = \frac{D}{\alpha\beta}.$$

Sicchè, pel prodotto di  $m$  operazioni, vale una formola analoga a quella già vista, salvo la notazione simbolica:

$$\frac{1}{\alpha, \beta, \dots, \mu} \frac{d}{dx} = \frac{D}{\alpha, \beta, \dots, \mu}.$$



Coefficienti, poi, nello sviluppo, sono le funzioni di Wronski di gradi  $0, 1, 2, \dots, n$ .

Sicchè, detto  $U$  il prodotto di  $m$  operazioni  $E$ , si ha, posto:

$$p = \alpha - \beta, \dots, \mu$$

$$U = -\frac{1}{p} \left[ 1 + w_1 \frac{D}{p} + w_2 \frac{D^2}{p^2} + \dots \right] P.$$

Da questa si trae, inversamente,  $P$  quale risultato dell'applicazione di  $m$  operazioni lineari su  $U$ ; onde si ha:

$$P = \frac{1}{\gamma} \left[ 1 + c_1 \frac{D}{\gamma} + c_2 \frac{D^2}{\gamma^2} + \dots \right] Q$$

dello stesso tipo della diretta.

Dati due polinomi  $P(x)$  e  $Q(x)$  dello stesso grado  $n$ , per quanto precede, si può, ed in un sol modo, porre:

$$Q = c_0 P + c_1 P' + c_2 P'' + \dots$$

e reciprocamente:

$$P = \gamma_0 Q + \gamma_1 Q' + \gamma_2 Q'' + \dots$$

Ne scaturisce una condizione *sufficiente* affinchè un polinomio sia non indefinito.

Supponiamo lo sia  $P(x)$ .

Applicando ad esso l'operazione:

$$\mathfrak{D}_c = 1 + c_1 D + c_2 D^2 + \dots$$

affinchè si ottenga  $Q$ , occorre che i coefficienti  $c$  siano eguali alle funzioni di Wronski già viste. Ossia:

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = \alpha + \beta + \dots \\ c_2 = \alpha^2 + \beta^2 + \dots + \alpha\beta + \alpha\gamma + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Attraverso le funzioni simmetriche, allora, si determinerà l'equazione:

$$\Phi(\rho) = 0$$

avente per radici  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

Se tali radici sono *positive*, risulterà non indefinito il polinomio

$$Q(x) = \mathfrak{D}_\alpha \cdot \mathfrak{D}_\beta, \dots, P(x).$$

**Matematica.** — *Sul carattere analitico delle soluzioni di una classe di problemi del Calcolo delle Variazioni.* Nota di R. CACCIOPOLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

1. I teoremi generali, che ho dimostrati <sup>(2)</sup> sul principio di Dirichlet relativo ad un'equazione ellittica non lineare con due variabili indipendenti, permettono di stabilire, assai semplicemente, l'esistenza di derivate di ordine superiore e però il carattere analitico delle soluzioni non supposte che a derivate seconde continue, come anche delle estremali a derivate prime continue di un integrale regolare

$$\iint F(x, y, p, q) dx dy.$$

Mostrerò in questa breve Nota come dagli stessi teoremi si lasci dedurre facilmente l'analogo risultato per le estremali lipschitziane, cioè a rapporti incrementali limitati, dell'integrale

$$(1) \quad \iint F(p, q) dx dy.$$

Ricordo a questo proposito che, in condizioni molto generali, le estremali di (1) fornite dai metodi diretti si presentano appunto lipschitziane <sup>(3)</sup>.

Supponiamo dunque  $F(p, q)$  analitica e verificante la condizione

$$F_{pp} F_{qq} - F_{pq}^2 > 0;$$

siano  $\chi(x, y)$  un'estremale lipschitziana dell'integrale (1), definita, per fissare le idee, in un cerchio  $\Delta$  di circonferenza  $\Gamma$ , e  $\zeta$  la funzione cui si riduce  $\chi$  su  $\Gamma$ . L'estremale  $\chi$  è notoriamente individuata dai propri valori al contorno. Si vede poi subito che una funzione  $\chi'$ , coincidente con  $\chi$  su  $\Gamma$ , e lipschitziana ed estremale in ogni porzione interna di  $\Delta$ , coincide ovunque con  $\chi$ : basta invero osservare che diversamente le due funzioni  $\chi$  e  $\chi' + c$ , per un opportuno valore della costante  $c$ , sarebbero estremali lipschitziane in tutto un campo  $\Delta'$ , e coinciderebbero sulla frontiera di una porzione  $\Delta''$  di  $\Delta'$  senza coincidere in  $\Delta''$ .

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1937.

(2) *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con due variabili indipendenti, e sui problemi regolari di Calcolo delle variazioni*, Note I e II. Questi « Rendiconti », 2° sem. 1935.

(3) Ved. HAAR, *Zur Variationsrechnung*. « Abhandl. Math. Sem. Hamburg », Bd. 8, § 3.



Consideriamo allora l'equazione di Lagrange

$$(2) \quad F_{pp} r + 2 F_{pq} s + F_{qq} t = 0$$

dell'integrale (1), e prendiamo una successione di funzioni  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  definite su  $\Gamma$ , continue con le loro derivate seconde e tendenti uniformemente a  $\zeta$ ; essendo  $\zeta$  lipschitziana, potremo supporre equilimate le derivate prime delle  $\zeta_n$ . Per i valori al contorno  $\zeta_n$  esiste la soluzione del problema di Dirichlet relativo all'equazione quasi-lineare (2)<sup>(1)</sup>: se  $\zeta_n$  è questa soluzione, la successione  $\zeta_1, \zeta_2, \dots$  tenderà uniformemente ad un limite  $\zeta_0$ , e se questo è regolare internamente a  $\Delta$  sarà integrale della (2) e coinciderà con  $\zeta$ , che risulterà pertanto analitica.

I surricordati teoremi generali ci dicono ora quanto segue: 1)  $\zeta_0$  ammette derivate seconde continue internamente a  $\Delta$  sempre che le derivate prime delle  $\zeta_n$  risultino equicontinue internamente a  $\Delta$ ; 2) all'uopo basta che queste derivate prime siano equilimate in ogni campo tutto interno a  $\Delta$ <sup>(2)</sup>.

2. Tutto si riduce quindi a provare che le derivate prime di un integrale  $\zeta$  della (2) si possono limitare, per ogni campo interno a  $\Delta$ , in funzione di un limite superiore della derivata della funzione  $\zeta$  cui si riduce  $\zeta$  su  $\Gamma$ <sup>(3)</sup>.

Diciamo  $S$  la superficie di equazione  $\zeta = \zeta(x, y)$ , e  $C$  il suo contorno, che si proietta su  $\Gamma$ . Dalla (2) segue subito, come è noto, che un piano non può tagliare  $S$  lungo una curva chiusa, e che un punto generico di  $S$  è iperbolico (cioè  $rt - s^2 < 0$ ); in un punto siffatto il piano tangente taglierà  $S$  secondo una curva avente un punto doppio e almeno quattro punti distinti su  $C$ . Tutto ciò, beninteso, a meno che  $S$  non si riduca ad un piano, cioè che  $\zeta$  non sia lineare, caso banale che scartiamo senz'altro.

Ora è chiaro che se  $l$  è un limite superiore per l'inclinazione sul piano  $xy$  delle tangenti al contorno  $C$ , e se  $P$  è un punto di  $S$  la cui proiezione  $(x, y)$  disti da  $\Gamma$  per non meno di un'assegnata quantità  $\delta$ , si potrà trovare una quantità  $L$  dipendente esclusivamente da  $l$  e da  $\delta$ , e tale che ogni piano per  $P$  la cui inclinazione su  $xy$  sia maggiore di  $L$  tagli  $C$  in due soli punti. Pertanto l'inclinazione del piano tangente in  $P$  non supera  $L$ , e ciò equivale appunto a dire che le derivate di  $\zeta$  soggiacciono alla limitazione prevista:  $|p(x, y)|$  e  $|q(x, y)|$  si possono maggiorare in funzione di  $\max |\zeta'|$  e della distanza di  $(x, y)$  da  $\Gamma$ .

3. Il risultato si estende subito a integrali di forma parametrica, cioè del tipo

(1) Ved. Nota II, n. 6

(2) Ved. Nota I, nn. 1 e 2.

(3) Secondo BERNSTEIN, « Comptes Rendus », to. 51, p. 636, queste limitazioni non richiederebbero che la conoscenza di  $\max |\zeta|$ . Ma al nostro scopo non occorre tanto.

$$(3) \quad \iint F(X_1, X_2, X_3) du dv,$$

dove  $F$  è analitica (per  $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 > 0$ ) e positivamente omogenea di grado 1, e

$$X_1 = \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u, v)}, \quad X_2 = \frac{\partial(x_3, x_1)}{\partial(u, v)}, \quad X_3 = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u, v)}$$

$x_1, x_2, x_3$  essendo funzioni lipschitziane di  $u, v$ , sicchè la superficie  $S$  di equazioni

$$x_1 = x_1(u, v), \quad x_2 = x_2(u, v), \quad x_3 = x_3(u, v)$$

risulti *rettificabile*. L'integrale (3) sia regolare, cioè la forma quadratica

$$\sum_{i,j=1}^3 F_{X_i X_j} \lambda_i \lambda_j$$

sia semidefinita (e semplicemente degenera)

Se  $S$  è estrema, e  $P$  è un punto di  $S$  nel cui intorno la superficie ammetta una rappresentazione del tipo  $x_i = f(x_j, x_k)$ , con  $f$  lipschitziana, potremo affermare che  $S$  è regolare analitica intorno a  $P$ . La condizione può manifestamente mettersi nella forma seguente: l'insieme delle posizioni limiti delle secanti  $P_1 P_2$ , per  $P_1 \rightarrow P, P_2 \rightarrow P$  su  $S$ , non esaurisce la stella di centro  $P$ .

Tale insieme di rette è il cosiddetto *paratingente* di  $S$  in  $P$  <sup>(1)</sup>. Possiamo dunque enunciare il nostro risultato come segue:

*Un estrema rettificabile dell'integrale (3) è regolare analitica sempre che in nessuno dei suoi punti il paratingente esaurisca la stella.*

(1) Ved. BOULIGAND *Introduction à la géométrie infinitésimale directe*. Paris, Vuibert, 1932, p. 72.



**Matematica.** — *Sulle superficie che si corrispondono per piani tangenti paralleli in modo che si conservi una rete di Tchebycheff.* Nota di M. HAIMOVICI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

La corrispondenza per piani tangenti paralleli fra i punti di due superficie ha fatto oggetto di vari studi, sia dal punto di vista metrico, sia dal punto di vista della geometria affine. Si tratta prima di studiare le proprietà delle superficie che si conservano in questa corrispondenza e poi di trovare le superficie che ammettono una tale corrispondenza in modo che certi elementi rimangano invarianti oppure si trasformino in modo dato.

In questa Nota studiamo le famiglie di superficie tali che su ognuna di esse si trovi una rete di Tchebycheff alla quale corrispondano sulle altre, per piani tangenti paralleli, reti di Tchebycheff. La questione può essere studiata sia direttamente, sia servendosi dalla rappresentazione sferica di Gauss delle superficie. Noi faremo qui uso soltanto del secondo metodo.

1. Se una rete di curve  $(u, v)$  sulla sfera di raggio 1 è la rappresentazione sferica di Gauss della rete di coordinate di una superficie, le equazioni di questa si trovano integrando il sistema di equazioni <sup>(2)</sup>:

$$(1) \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{fD' - gD}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{fD - eD'}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial v}; \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{fD'' - gD'}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{fD' - eD''}{eg - f^2} \frac{\partial X}{\partial v}$$

(e le analoghe in  $y, z$ ) dove  $e, f, g$  sono i coefficienti della forma quadratica fondamentale della rappresentazione sferica,  $D, D', D''$  sono i coefficienti della seconda forma quadratica di Gauss della superficie e  $X, Y, Z$  le coordinate del punto della sfera. I coefficienti  $D, D', D''$  soddisfano alle condizioni di integrabilità <sup>(3)</sup>

$$(2) \quad \begin{cases} \left\{ \frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' D + \left( \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' \right) D' + \left\{ \begin{smallmatrix} 11 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' D'' = 0 \\ \left\{ \frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' D + \left( \left\{ \begin{smallmatrix} 22 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\}' - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' \right) D' - \left\{ \begin{smallmatrix} 12 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\}' D'' = 0 \end{cases}$$

dove i  $\{ \}'$  sono i simboli di Christoffel costruiti per la forma fondamentale della sfera.

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1937.

(2) L. BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*. Bologna, 1927, to. I, parte I, p. 234.

(3) L. BIANCHI, loc. cit., p. 232.

D'altra parte valgono per i coefficienti  $D, D', D''$  le equazioni di Weingarten <sup>(1)</sup>

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' \\ \frac{\partial D'}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' \\ \frac{\partial D'}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' \\ \frac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' \end{cases}$$

Se la rete di coordinate sulla superficie è di Tchebycheff, si ha

$$(4) \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0$$

donde

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial D}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' & \frac{\partial D'}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}' D'' \\ \frac{\partial D'}{\partial v} = \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}' D + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}' D' & \frac{\partial D''}{\partial u} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' D'' \end{cases}$$

Viceversa se queste relazioni sono soddisfatte da tre funzioni  $D, D', D''$  tali che  $DD'' - D'^2 \neq 0$ , lo saranno anche le (2). Esisterà dunque una superficie della quale la rete di coordinate sarà rappresentata sulla sfera dalla rete  $(u, v)$ . I  $D, D', D''$  soddisfano anche alle (3). Ne segue che si avrà anche (4). Infatti, si deduce p. es. dalle prime due delle (3) e dalle prime due delle (5)

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D' = 0 \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} D' + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} D'' = 0.$$

Perchè una rete di curve sulla sfera sia la rappresentazione sferica di una rete di Tchebycheff, bisogna dunque che i coefficienti della forma quadratica differenziale di Gauss della sfera, quando quella rete è presa come rete di coordinate, siano tali che il sistema (5) ammetta un integrale. Se questo è noto, le equazioni della superficie rapportata alla rete di Tchebycheff si trovano con quadrature dalle (1). Se esistono due sistemi di integrali di (5) (che non differiscono solo per un fattore costante, in qual caso le superficie corrispondenti ad esse sono omotetiche fra loro) le superficie corrispondenti ad esse si corrispondono per piani paralleli con conservazione della rete di Tchebycheff  $(u, v)$ .

(1) L. BIANCHI, loc. cit., p. 230.



2. Osserviamo che se esistono due sistemi di integrali di (5) indipendenti  $D_1, D'_1, D''_1$  e  $D_2, D'_2, D''_2$ , ogni combinazione lineare con coefficienti costanti di essi:

$$(6) \quad k_1 D_1 + k_2 D_2, \quad k_1 D'_1 + k_2 D'_2, \quad k_1 D''_1 + k_2 D''_2$$

sarà anch'essa un integrale del sistema (5). Se  $x_1 = x_1(u, v), \dots$  e  $x_2 = x_2(u, v), \dots$  sono le equazioni delle superficie  $S_1, S_2$  corrispondenti rispettivamente alle soluzioni  $D_1, D'_1, D''_1$  e  $D_2, D'_2, D''_2$ , allora, secondo le (1) le superficie corrispondenti a (6) avranno le equazioni

$$x = k_1 x_1 + k_2 x_2 \\ \dots\dots\dots$$

cioè saranno omotetiche dei luoghi dei punti che dividono in un rapporto costante il segmento che unisce i punti corrispondenti di  $S_1$  e  $S_2$ . È noto che questi luoghi sono superficie che corrispondono per piani tangenti paralleli alle due superficie date.

3. Facciamo subito un'applicazione: Supponiamo che fra le reti di Tchebycheff, delle quali la rete di coordinate sulla sfera è l'immagine sferica di Gauss, esista una coniugata. Si sa allora che la superficie è di traslazione, le generatrici formando le curve della rete. Si ha per essa  $D' = 0$  e dalle equazioni (5) rimane

$$(7) \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' D = 0, \quad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' D'' = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial v} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' D, \quad \frac{\partial D''}{\partial u} = \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' D''.$$

Siccome la superficie è supposta a curvatura totale diversa da zero, si ha  $D \neq 0, D'' \neq 0$  e segue

$$\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = 0,$$

ciò che vuol dire che la rete sulla sfera è formata da cerchi massimi. Se nessun'altra condizione è imposta, risulta che le altre reti di Tchebycheff rappresentabili per piani tangenti paralleli sulla rete di coordinate della sfera saranno anch'esse coniugate e i coefficienti  $D$  e  $D''$  si troveranno con quadratura a meno di due funzioni arbitrarie una di  $u$  l'altra di  $v$ . Le tangenti nei punti corrispondenti alle curve di queste reti sono rispettivamente parallele.

Se vogliamo che esistano inoltre altre superficie soddisfacenti al nostro problema, i simboli di Christoffel debbono soddisfare le condizioni di integrabilità delle (5), cioè

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}'$$

ciò che, come segue dalle relazioni <sup>(1)</sup>

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' &= \frac{\partial}{\partial u} \log \sqrt{eg - f^2} \\ \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 1 \end{matrix} \right\}' &= \frac{\partial}{\partial v} \log \sqrt{eg - f^2}, \end{aligned}$$

richiede

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' = \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}'.$$

Queste sono le condizioni del Dini <sup>(2)</sup> perchè la rete di coordinate sulla sfera sia l'immagine sferica delle asintotiche di una superficie. Il piano tangente alla sfera è parallelo al piano tangente a questa superficie, cioè al piano osculatore all'asintotica. Se il punto si muove lungo una linea di coordinate sulla sfera, il piano tangente resta parallelo ad una retta fissa e così anche il piano osculatore all'asintotica rimane parallelo ad una retta fissa se il punto della superficie si muove lungo l'asintotica. Ne segue che quest'asintotica è una retta, e che pertanto la superficie è una quadrica rigata. Le reti di Tchebycheff della classe studiata qui si rappresentano dunque per piani tangenti paralleli sulle asintotiche di una quadrica rigata. Esse si trovano con sole quadrature. Quelle fra loro che sono coniugate sono state studiate dall'Eisenhart nel 1906 <sup>(3)</sup>. Sono le sole superficie associate ad una quadrica.

4. Il nostro problema può essere studiato anche in un modo un poco diverso. Infatti, le equazioni della superficie possono scriversi anche

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial x}{\partial u} = \lambda^1 X_u + \lambda^2 X_v \\ \frac{\partial x}{\partial v} = \mu^1 X_u + \mu^2 X_v, \end{cases}$$

dove  $\lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2$  soddisfano alle condizioni di integrabilità

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \lambda^1}{\partial v} - \frac{\partial \mu^1}{\partial u} - \mu^1 \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + (\lambda^1 - \mu^2) \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}' + \lambda^2 \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}' \\ \frac{\partial \lambda^2}{\partial v} - \frac{\partial \mu^2}{\partial u} - \mu^2 \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + (\lambda^1 - \mu^2) \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\}' + \lambda^2 \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}' \\ \lambda^1 f + \lambda^2 g = \mu^1 e + \mu^2 f. \end{cases}$$

(1) L. BIANCHI, loc. cit., p. 83.

(2) L. BIANCHI, loc. cit., p. 238.

(3) L. P. EISENHART, *Associate surfaces*. «Math. Ann.», Bd. 62 (1906), p. 510.

Secondo le equazioni (1) e (8),  $\lambda^1, \lambda^2, \mu^1, \mu^2$  sono date dalle relazioni

$$\lambda^1 = \frac{fD' - gD}{eg - f^2}, \quad \lambda^2 = \frac{fD - eD'}{eg - f^2}, \quad \mu^1 = \frac{fD'' - gD'}{eg - f^2}, \quad \mu^2 = \frac{fD' - eD''}{eg - f^2}.$$

Se ne deduce come conseguenza delle (5)

$$(10) \quad \frac{\partial \lambda^i}{\partial v} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} j & 2 \\ i \end{matrix} \right\}' \lambda^j = 0, \quad \frac{\partial \mu^i}{\partial u} + \sum_j \left\{ \begin{matrix} j & 1 \\ i \end{matrix} \right\}' \mu^j = 0 \quad (i, g = 1, 2)$$

e se queste equazioni sono soddisfatte, lo sono anche le prime due condizioni di integrabilità (9).

Le relazioni (10) dicono che i vettori di componenti curvilinee sulla sfera  $\lambda^1, \lambda^2$  sono paralleli nel senso di Levi-Civita lungo le linee  $u = \text{cost.}$  e i vettori di componenti  $\mu^1, \mu^2$  sono paralleli nello stesso senso lungo le linee  $v = \text{cost.}$  Ma allora, secondo una proprietà nota del parallelismo di Levi-Civita e cioè di conservare le lunghezze dei vettori, si ha:

$$\begin{aligned} e \lambda^{1^2} + 2f \lambda^1 \lambda^2 + g \lambda^{2^2} &= U^2 \\ e \mu^{1^2} + 2f \mu^1 \mu^2 + g \mu^{2^2} &= V^2 \end{aligned}$$

dove abbiamo denotato con  $U, V$  delle funzioni rispettivamente di  $u$  e di  $v$ . D'altra parte, se chiamiamo  $\sigma, \tau$  gli angoli formati dai vettori  $\lambda, \mu$  rispettivamente con le linee  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$ , considerati positivi nel senso determinato dalla tangente nel senso positivo dell'arco della curva verso il vettore associato di questo nel senso di Bianchi<sup>(1)</sup>, si dimostra senza difficoltà che

$$(11) \quad \frac{\partial \sigma}{\partial v} = -\frac{\sqrt{g}}{\rho_v}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial u} = -\frac{\sqrt{e}}{\rho_u},$$

dove con  $\frac{1}{\rho_v}, \frac{1}{\rho_u}$  abbiamo indicato le curvatures geodetiche (in valore assoluto) delle linee  $u = \text{cost.}$ ,  $v = \text{cost.}$  La terza relazione (9) può anche scriversi

$$(12) \quad \cos \sigma U \sqrt{g} = \cos \tau V \sqrt{e}.$$

Se il sistema di equazioni (11) (12) ammette una soluzione in  $\sigma, \tau, U, V$  la rete delle linee di coordinate sulla sfera è l'immagine sferica di una rete di Tchebycheff. Supponiamo che esista anche su un'altra superficie una rete di Tchebycheff, della quale la rete di coordinate sulla sfera sia l'immagine. Gli angoli  $\bar{\tau}, \bar{\sigma}$  dei vettori tangenti alle linee di coordinate di questa super-

(1) L. BIANCHI, loc. cit., to. II, parte II, p. 799.



ficie con le tangenti alle linee di coordinate sulla sfera dovranno soddisfare anch'esse alle equazioni (11) e ad una equazione della forma (12), cioè

$$(13) \quad \cos \bar{\sigma} \bar{U} \sqrt{g} = \cos \bar{\tau} \bar{V} \sqrt{e}.$$

Perciò si avrà

$$(14) \quad \bar{\sigma} = \sigma + \alpha(u) \quad , \quad \bar{\tau} = \tau + \beta(v).$$

Le (12), (13) e (14), danno

$$(15) \quad U_1 \operatorname{tg} \sigma - V_1 \operatorname{tg} \tau = U_2 - V_2$$

dove

$$U_1 = \frac{\bar{U}}{U} \sin \alpha \quad , \quad V_1 = \frac{\bar{V}}{V} \sin \beta \quad , \quad U_2 = \frac{\bar{U}}{U} \cos \alpha \quad , \quad V_2 = \frac{\bar{V}}{V} \cos \beta.$$

Per trovare una famiglia di superficie che risolve il nostro problema, bisogna dunque trovare le reti di coordinate sulla sfera, tali che il sistema di equazioni (11), (12) e (15) ammetta una soluzione per  $\sigma, \tau, U, V, U_i, V_i$ .

5. Applichiamo tutto questo ad un esempio: Supponiamo che in (12) sia

$$(16) \quad \sqrt{g} U = \sqrt{e} V.$$

Ne segue

$$\cos \sigma = \cos \tau$$

e, secondo le (11):

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{g}}{\rho_v} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{e}}{\rho_u} \quad \text{o} \quad \frac{\partial}{\partial u} \frac{\sqrt{g}}{\rho_v} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{e}}{\rho_u} = 0.$$

La prima di queste, tenendo conto delle espressioni delle curvature geodetiche <sup>(1)</sup> si scrive:

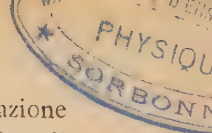
$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left( \sin \omega \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left( \sin \omega \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' \right)$$

$\omega$  essendo l'angolo fra le linee di coordinate sulla sfera.

Se una di queste relazioni è soddisfatta,  $\sigma$  e  $\tau$  saranno date dalla (11) a meno di una costante additiva arbitraria.

La (17) è soddisfatta se la rete sulla sfera è una rete di Tchebycheff, cioè  $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}' = 0$ , oppure,  $e = kU^2$ ,  $g = kV^2$ ,  $k = \text{cost}$ . In questo caso si riconosce subito una soluzione delle (11), e cioè  $\omega$ , l'angolo delle linee coordinate sulla sfera. Si può aggiungere a questo una costante arbi-

(1) L. BIANCHI, loc. cit., to. I, parte I, p. 271.



traria e si trovano così  $\infty^2$  reti di Tchebycheff (essendo fatta astrazione dalle omotetie) rappresentate sulla rete di coordinate della sfera. Una di queste reti corrisponde a  $\sigma = \tau = \omega - \pi$ . Questa è di una superficie a curvatura costante.

Se la rete di coordinate sulla sfera è ortogonale,  $\omega = \frac{\pi}{2}$ , la (17) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}' = \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}'.$$

In questo caso, la (16) ci dice che la rete è isoterma. Essa è dunque la immagine sferica delle asintotiche di una superficie minima<sup>(1)</sup>. Si può dunque dire che sulle asintotiche di una tale superficie sono rappresentabili per piani tangenti paralleli  $\infty^2$  reti di Tchebycheff. Esse si possono trovare con quadrature partendo dalle asintotiche della superficie minima.

**Matematica.** — *La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse.* Nota di E. MARTINELLI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio F. SEVERI.

1. È ben nota l'ordinaria generalizzazione della *formula integrale* di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse<sup>(3)</sup>. Dette  $l, l'$  due linee semplici e chiuse rispettivamente nei piani delle variabili complesse  $x, y$ , e  $f(x, y)$  una funzione olomorfa per i valori di  $x, y$  appartenenti alle regioni  $D, D'$  delimitate da  $l, l'$  (e basta che  $f(x, y)$  sia continua quando una o ambedue le variabili stanno sulle dette linee), risulta:

$$(1) \quad f(x', y') = - \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\sigma} \frac{f(x, y)}{(x - x')(y - y')} dx dy,$$

dove  $x', y'$  è una coppia di punti rispettivamente *interni* a  $D, D'$ , e  $\sigma$  è la superficie immagine delle coppie di punti di  $l, l'$  nello  $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$  euclideo, i cui punti rappresentano complessivamente le coppie  $x = x_1 + ix_2$ ,  $y = y_1 + iy_2$ .

Nello  $S_4(x_1, x_2, y_1, y_2)$  la superficie  $\sigma$  è bilatera chiusa, doppiamente connessa, cioè del tipo topologico *toro*; e la regione dello  $S_4$  ove si suppone olomorfa la  $f(x, y)$  è una particolare quadricella, che chiamasi *bici-*

(1) L. BIANCHI, loc. cit., p. 241.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1937.

(3) Cfr., p. es., E. GOURSAT, *Cours d'analyse math.*, to. II (1929), p. 279. Tale generalizzazione consegue immediatamente dall'analogia formula per le funzioni di una variabile.

*lindro*. Il toro  $\sigma$  individua il bicilindro, del cui contorno è superficie doppia <sup>(1)</sup>. Da questo punto di vista, la formula (1) appare come una ben ristretta generalizzazione della formula di Cauchy; allo stesso modo che un teorema affermando esser nullo l'integrale doppio della  $f(x, y)$ , esteso ad una superficie del tipo di  $\sigma$ , non sarebbe che una ristretta generalizzazione del teorema di Cauchy, la cui completa generalizzazione alle funzioni di due variabili è data invece dal classico risultato di Poincaré <sup>(2)</sup>.

Io mi propongo appunto di generalizzare, in questo più ampio ordine d'idee, la formula di Cauchy. Pertanto considero nello  $S_4$  una quadricella generale  $\Gamma$ , sottoposta alla sola condizione di esser convessa, ed una  $f(x, y)$  olomorfa all'interno di  $\Gamma$  e continua sul contorno  $\Delta$ . Denotato con  $(x', y')$  un qualunque punto interno a  $\Gamma$ , i piani caratteristici  $y = y', x = x'$  segano  $\Delta$  lungo due linee chiuse  $C_x, C_y$ , le quali risultano *fra loro concatenate sopra  $\Delta$* . Ebbene io stabilisco che:

*Il valore della  $f(x, y)$  nel punto  $(x', y')$  si esprime sempre con la formula (1), ove  $\sigma$  è un qualunque toro dello  $S_4$  tracciato su  $\Delta$  e concatenato con  $C_x$  e  $C_y$ , per deformazioni sopra  $\Delta$ .*

Dalla dimostrazione risulta che, se ci si riferisce ad un determinato punto  $(x', y')$  interno a  $\Gamma$ , per la validità dell'asserto non occorre che  $\Gamma$  sia convessa, ma basta che il contorno  $\Delta$  soddisfaccia alla condizione di essere incontrato in un sol punto dalle semirette uscenti da  $(x', y')$ .

2. Cominciamo con l'osservare che, in base al già citato teorema di Cauchy-Poincaré, l'integrale che compare a secondo membro della (1) — ove, beninteso, per superficie  $\sigma$  s'intenda un toro affatto generale — non varia il suo valore comunque si deformi  $\sigma$  con continuità, restando entro il campo di olomorfismo della funzione integranda

$$\frac{f(x, y)}{(x - x')(y - y')} \quad (3).$$

(1) Per tali nozioni relative alla rappresentazione del campo di variabilità della  $f(x, y)$  nello  $S_4$ , cfr. p. es. F. SEVERI, *Risultati, vedute e problemi nella teoria delle funzioni analitiche di due variabili complesse*. « Rend. del Seminario Mat. di Roma » (1930-31). Il toro  $\sigma$  non è naturalmente il più generale dello  $S_4$ , perchè rappresenta le varietà delle coppie di punti delle due linee piane  $l, l'$  (è cioè il prodotto topologico  $l \times l'$  di queste); mentre un toro qualunque dà luogo ad una corrispondenza (non però generale) fra i piani delle  $x, y$ .

(2) Cfr. H. POINCARÉ, *Sur les résidus des intégrales doubles*. « Acta mathematica », to. IX (1887).

(3) Poichè su  $\Delta$  si è solo supposto che la  $f(x, y)$  sia continua, e la superficie  $\sigma$  all'inizio della deformazione giace su  $\Delta$ , è necessario osservare che il teorema di Cauchy-Poincaré sussiste anche allorchè la funzione integranda non sia olomorfa sulla superficie d'integrazione, purchè si conservi ivi continua. Cfr., a tal proposito, la p. 368 della Memoria di F. SEVERI, *Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche*. « Memorie della R. Accademia d'Italia », marzo 1931.



Si soddisfa in ogni caso a tale requisito, se  $\sigma$ , durante la deformazione, non incontra i piani  $x = x'$ ,  $y = y'$ , e si mantiene entro  $\Gamma$ .

Ora poichè, come si è detto, la formula (1) sussiste allorchè  $\sigma$  rappresenta il prodotto topologico di due linee  $l, l'$  dei piani  $x, y$ , purchè il cilindro da  $\sigma$  individuato risulti interno al campo di olomorfismo della  $f(x, y)$ , il nostro compito si riduce a provare che la superficie generale  $\sigma$ , nelle condizioni poste, può trasformarsi per deformazione continua *senza mai incontrare i piani*  $x = x'$ ,  $y = y'$ , in un simile prodotto topologico.

3. Indicato con  $P$  il punto  $(x', y')$  interno a  $\Gamma$  (le cui 4 coordinate nello  $S_4$  saranno  $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2$ ), si consideri un'ipersuperficie sferica  $\Sigma$ , di centro  $P$  e raggio  $R$ , anch'essa interna a  $\Gamma$ . Proiettando da  $P$  sopra  $\Sigma$  i punti di  $\Delta$ , nasce una corrispondenza tra  $\Delta$  e  $\Sigma$ , la quale — poichè  $\Gamma$  si è supposta convessa — risulta *biunivoca* e continua; si tratta cioè di un omeomorfismo.

Ciò posto, costruiamo nello spazio ordinario la seguente immagine di  $\Sigma$ . L'iperpiano  $S$ , di equazione  $y_2 = y'_2$ , sega  $\Sigma$  lungo una superficie sferica  $\omega$  di raggio  $R$  e centro  $P$ .  $\Sigma$  risulta divisa da  $\omega$  in due calotte emisferiche, ciascuna delle quali si proietta ortogonalmente su  $S$  nei punti della sfera  $\Omega$  contornata dalla superficie  $\omega$ . Ai punti dell'ipersuperficie sferica  $\Sigma$  possono pertanto farsi corrispondere, mercè la detta proiezione ortogonale, i punti di due sfere  $\Omega$  sovrapposte, connesse attraverso  $\omega$ . Ebbene si esegua, entro  $S$ , una trasformazione per raggi vettori reciproci, di polo  $P$  e superficie fondamentale  $\omega$ ; in tal modo ai punti di una delle due sfere  $\Omega$  sovrapposte si potranno fare corrispondere i punti trasformati, esterni ad  $\omega$ . In definitiva si ottiene così una rappresentazione dei punti di  $\Sigma$  coi punti di  $S$ , la quale risulta biunivoca e continua, ove solo si abbia riguardo alle consuete convenzioni relative ai punti all'infinito di  $S$ , che dovranno appunto considerarsi come tutti coincidenti in uno solo. Per precisare completamente la detta rappresentazione, supporremo che i punti interni ad  $\omega$  rappresentino i punti della calotta di  $\Sigma$  aventi la coordinata  $y_2 > y'_2$ , i punti esterni quelli dell'altra calotta (dove è  $y_2 < y'_2$ ).

Siano ora  $C_x, C_y$  le linee chiuse intersezioni di  $\Delta$  rispettivamente con i piani  $y = y'$ ,  $x = x'$ . Tali linee si proiettano, al modo detto, sopra due cerchi massimi  $C'_x, C'_y$  di  $\Sigma$ , i quali a loro volta si rappresentano in  $S$  rispettivamente sul cerchio massimo  $C''_x$  intersezione di  $\omega$  col piano  $y_1 = y'_1$  (entro  $S$ ), e con la retta indefinita  $C''_y$  (che va considerata come chiusa attraverso il punto all'infinito), ortogonale al detto piano nel centro  $P$  di  $\omega$ .  $C''_x, C''_y$  risultano due linee chiuse tra loro *concatenate* entro  $S$ ; del pari può quindi dirsi che  $C_x, C_y$  *risultano tra loro concatenate sopra*  $\Delta$ .

Si consideri il toro dello  $S_4$ , che rappresenta le coppie di punti di due circonferenze di raggi  $r, s$  e centri  $x', y'$  rispettivamente nei piani delle

variabili  $x$  e  $y$ . Un tale toro si chiama un *toro circolare* dello  $S_4$ , e le sue equazioni sono:

$$(2) \quad (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 = r^2 \quad , \quad (y_1 - y'_1)^2 + (y_2 - y'_2)^2 = s^2.$$

Se si suppone  $r^2 + s^2 = R^2$ , il toro risulta tracciato su  $\Sigma$ ; lo indicheremo allora con  $\tau'$ . Osserviamo inoltre che il bicilindro da esso individuato è interno a  $\Sigma$  e pertanto contenuto nella quadricella  $\Gamma$ , ove la  $f(x, y)$  è olomorfa.

Ebbene, vediamo come  $\tau'$  si rappresenti in  $S$ . La porzione di  $\tau'$  che sta sulla calotta di  $\Sigma$  dove è  $y_2 > y'_2$ , ha per sua immagine in  $S$  il pezzo di superficie cilindrica di asse la retta  $C''_y$  e raggio  $r$ , limitato entro  $\omega$ ; ciò segue immediatamente dalle (2). L'altra porzione di  $\tau'$ , che giace sull'altra calotta di  $\Sigma$  dove è  $y_2 < y'_2$ , ha per immagine la superficie trasformata per raggi vettori reciproci della precedente. Pertanto l'immagine completa,  $\tau''$ , di  $\tau'$  è una superficie chiusa, di rotazione intorno all'asse  $C''_y$ , naturalmente omeomorfa ad un toro ordinario, la quale risulta *ad un tempo concatenata con le linee chiuse*  $C''_x, C''_y$ .

4. Tutto ciò premesso, sia assegnata sopra  $\Delta$  una qualunque superficie,  $\sigma$ , omeomorfa ad un toro, e contemporaneamente concatenata, entro  $\Delta$ , con le linee  $C_x, C_y$ . Di tale superficie può considerarsi la proiezione  $\sigma'$  su  $\Sigma$ , indi l'immagine  $\sigma''$  in  $S$ , la quale risulterà concatenata con  $C''_x, C''_y$ . È chiaro che mediante una deformazione continua entro  $S$ ,  $\sigma''$  può condursi a coincidere con la superficie  $\tau''$  dianzi considerata, e per modo che durante la deformazione la superficie variabile non venga mai ad incontrare le linee  $C''_x, C''_y$ .

Dunque è possibile eseguire, sopra  $\Sigma$ , un'analoga deformazione della superficie  $\sigma'$  fino a farla coincidere con  $\tau'$ , e ciò senza mai incontrare  $C'_x, C'_y$ .

D'altra parte la superficie  $\sigma$  può deformarsi con continuità entro  $\Gamma$  senza incontrare i piani  $y = y', x = x'$ , e ridursi a  $\sigma'$ , bastando far scorrere i punti di  $\sigma$  lungo i raggi proiettati da  $P$ .

Risulta così completamente provato quanto richiedevasi nel n. 2.

**Meccanica.** — *Propagazione ondosa in sistemi imperfettamente elastici.* Nota di G. OBERTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

1. Si consideri un solido continuo, allo stato naturale e lo si solleciti con un sistema di azioni esterne che lo portino in uno stato di coazione. Il materiale di cui il corpo è costituito sia tale che questi non si comporti come perfettamente elastico, nel senso di Hooke, ma ceda sotto lo sforzo fluendo lentamente nel tempo. Chiameremo *imperfettamente elastico* un corpo così fatto <sup>(2)</sup>.

Sieno  $y_i (i = 1, 2, 3)$  le coordinate cartesiane ortogonali che individuano la posizione di un punto generico del corpo, sia  $t$  il tempo trascorso dall'inizio della coazione, e diciamo  $u_i$  le componenti del vettore spostamento  $\mathbf{u}$  subito dall'elemento  $y_i$  al tempo  $t$ . Sia  $\Xi$  il tensore doppio di deformazione, simmetrico, di componenti  $\xi_{ik} (i, k = 1, 2, 3)$ . La deformazione potrà considerarsi somma di una (che già si produce all'istante iniziale) a carattere elastico e di una, successiva, a carattere anelastico: viscoso o plastico. E questa seconda deformazione sarà, per ipotesi, nulla all'istante iniziale e andrà incrementandosi col tempo.

Potremo pertanto scrivere, detta  $c_{ikjh}^*$  la generica componente, nota e costante, del tensore quadruplo elastico <sup>(3)</sup>, e  $\Phi$  il tensore degli sforzi:

$$(1) \quad \xi_{ik}(t) = \sum_{jh} c_{ikjh}^* \Phi_{jh}(t) + \gamma_{ik}(t) \quad (i, k, j, h = 1, 2, 3)$$

ove le  $\gamma_{ik}(t)$  sono le componenti del tensore di deformazione dipendente dalle qualità « anelastiche » del materiale e quindi saranno, in genere, da considerarsi funzione del cimento che dall'inizio a quell'istante, ha subito il corpo nel punto considerato.

E in prima approssimazione, ammesso un legame lineare col tensore degli sforzi, porremo:

$$\gamma_{ik}(t) = \int_0^t \sum_{rs} \bar{c}_{ikrs}^* \Phi_{rs}(\tau) d\tau$$

(1) Nella seduta del 3 gennaio 1936.

(2) Molti materiali considerati « elastici », presentano in realtà un comportamento di questo tipo (cementi e agglomeranti vari, resine sintetiche ecc.).

(3) Giova qui considerare il tensore « reciproco » di quello usualmente considerato in teoria dell'elasticità e le cui componenti si indicano con  $c_{ikjh}$ . È per ricordare questo fatto, che abbiamo asteriscato le componenti del nuovo tensore.



ove le  $\bar{c}_{ikrs}^*$  sono le componenti di un tensore quadruplo che diremo tensore anelastico. E pertanto in definitiva:

$$(2) \quad \xi_{ik}(t) = \sum_{jh} \bar{c}_{ikjh}^* \Phi_{jh}(t) + \int_0^t \sum_{rs} \bar{c}_{ikrs}^* \Phi_{rs}(\tau) d\tau.$$

E le componenti del tensore anelastico saranno da considerarsi, in generale funzioni di  $y_i$  e di  $\tau^{(1)}$ .

Ammettiamo di avere a che fare con un solido isotropo. Usando allora della nota <sup>(2)</sup> espressione dei tensori quadrupli isotropi, per la simmetria dei tensori  $\Phi$  e  $\Xi$ , risultano, detti  $A^*$  e  $B^*$  i coefficienti elastici a  $\bar{A}^*$  e  $\bar{B}^*$  quelli anelastici (viscosi o plastici):

$$\begin{cases} \bar{c}_{ikjh}^* = A^* \delta_{ik} \delta_{jh} + B^* (\delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ih} \delta_{kj}) \\ \bar{c}_{ikjh}^* = \bar{A}^* \delta_{ik} \delta_{jh} + \bar{B}^* (\delta_{ij} \delta_{kh} + \delta_{ih} \delta_{kj}) \end{cases} \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k. \end{cases}$$

Poniamo inoltre gli invarianti lineari:

$$(3) \quad \sum_i \Phi_{ii} = 3p \quad \sum_i \xi_{ii} = 3\varepsilon.$$

Le (2) divengono allora:

$$(4) \quad \xi_{ik} = 3A^* p \delta_{ik} + 2B^* \Phi_{ik} + \int_0^t [3\bar{A}^* p \delta_{ik} + 2\bar{B}^* \Phi_{ik}] d\tau$$

risulta inoltre di conseguenza:

$$(5) \quad \varepsilon = (3A^* + 2B^*)p + \int_0^t (3\bar{A}^* + 2\bar{B}^*)p d\tau.$$

2. In base alla tradizione sperimentale <sup>(3)</sup>, ammetteremo che il *fluire anelastico* abbia carattere di scorrimento non abbia cioè a provocare variazioni di volume apprezzabili.

Introduciamo la decomposizione caratteristica, per cui un generico tensore doppio può scindersi in modo univoco in due; uno isotropo e l'altro a invariante lineare nullo <sup>(4)</sup>. Concetto fondamentale, esposto in una recente

(1) Ammettendo invece, le componenti suddette funzioni anche dell'intervallo si potrebbe dare al tensore anelastico un carattere di ereditarietà, che qui vogliamo escludere, e la (2) diverrebbe una equazione integrale lineare di 2ª specie, del tipo di quelle studiate dal VOLTERRA.

(2) U. CISOTTI, *Tensori isotropi ed emisotropi*. « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », 1930.

(3) Scaturita dall'esame delle ricerche compiute da quanti si occuparono di deformazioni plastiche di corpi solidi: H. TRESKA, R. v. MISES, H. HENCKY, A. NADAI.

(4) G. BIGGIOGERO, *Osservazioni geometriche sui tensori*. Questi « Rendiconti », vol. XVII, ser. 6ª, 1º sem., 1933, p. 612.

Nota <sup>(1)</sup>, è che i tensori aventi tale invariante nullo sono gli *unici* a cui devesi attribuire carattere *tangenziale*.

E quindi, a riguardo delle applicazioni (che qui interessano), così come i tensori isotropi entrano in gioco nei problemi di deformazione di volume, quelli a invariante nullo avranno parte essenziale nei problemi di deformazione di forma o di scorrimento.

Applichiamo la suaccennata decomposizione al tensore degli sforzi  $\Phi$  e a quello di deformazione  $\Xi$ . Detti  $\bar{\Phi}$  e  $\bar{\Xi}$  i corrispondenti tensori tangenziali risultano:

$$(6) \quad \Phi_{ik} = \bar{\Phi}_{ik} + p \delta_{ik} \quad \Xi_{ik} = \bar{\Xi}_{ik} + \epsilon \delta_{ik}$$

ove  $p$  e  $\epsilon$  sono definiti dalle (5) e inoltre:

$$(7) \quad \Sigma_i \bar{\Phi}_{ii} = \Sigma_i \bar{\Xi}_{ii} = 0.$$

Introdotta la scissione (6) nelle (4) si ottiene:

$$\begin{aligned} \epsilon \delta_{ik} + \bar{\Xi}_{ik} &= 3 A^* p \delta_{ik} + 2 B^* (\bar{\Phi}_{ik} + p \delta_{ik}) + \\ &+ \int_0^t [3 \bar{A}^* p \delta_{ik} + 2 \bar{B}^* (\bar{\Phi}_{ik} + p \delta_{ik})] d\tau. \end{aligned}$$

D'altronde, per l'ipotesi ammessa, le deformazioni di volume debbono essere di natura puramente elastica; pertanto dalla (5), dovendosi ammettere in genere  $p \neq 0$ , consegue:  $3 \bar{A}^* + 2 \bar{B}^* = 0$  e quindi  $\epsilon = (3 A^* + 2 B^*) p$ . E le precedenti divengono, mettendo in evidenza la dipendenza dal tempo:

$$(8) \quad \bar{\Xi}_{ik}(t) = 2 B^* \bar{\Phi}_{ik}(t) + 2 \int_0^t \bar{B}^* \bar{\Phi}_{ik}(\tau) d\tau.$$

Se la deformazione anelastica ha carattere viscoso il coefficiente  $\bar{B}^*$  sarà da considerarsi come una costante (o più in generale una funzione del tempo), nota da indagini sperimentali. Se invece la deformazione suddetta ha carattere plastico (ossia il corpo è portato al limite di snervamento) il coefficiente  $\bar{B}^*$  sarà da riguardarsi una vera funzione incognita del tempo e del posto. Siano  $v_i$  le componenti della velocità di scorrimento e sia  $A$  il tensore doppio di componenti  $A_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial y_k} + \frac{\partial v_k}{\partial y_i} \right)$  rappresentante la velocità di deformazione della particella considerata. In particolare, pei moti lenti che qui interessano, tale tensore è il derivato del tensore di deforma-

(1) G. OBERTI, *Su una decomposizione caratteristica dei tensori doppi*. « Rend. Ist. Lombardo », aprile 1936.

zione e pertanto si avrà tra le corrispondenti componenti dei tensori tangenziali:

$$(9) \quad \bar{\Lambda}_{ik} = \frac{\partial}{\partial t} \xi_{ik}$$

e quindi derivando parzialmente rispetto al tempo le relazioni trovate (8):

$$(10) \quad \boxed{\bar{\Lambda}_{ik} = 2 \bar{B}^* \bar{\Phi}_{ik} + 2 B^* \frac{\partial}{\partial t} \bar{\Phi}_{ik}} \quad (1).$$

Sono queste le relazioni fondamentali nella meccanica dei corpi imperfettamente elastici. Esse costituiscono la estensione di una semplice relazione postulata dal Maxwell <sup>(2)</sup> con la differenza che intervengono qui le sole parti tangenziali dei tensori in gioco.

Le relazioni (10) differiscono dalle relazioni fondamentali che vigono nella deformazione dei corpi viscosi o plastici puri pel 1° termine aggiunto a carattere elastico. Il tensore velocità di deformazione non risulta qui parallelo al tensore degli sforzi  $\bar{\Phi}$  ma è il risultante di due: uno parallelo a questo e l'altro parallelo al tensore derivato. È interessante rilevare che, nel caso di corpi elastoplastici, per cui vale la condizione di snervamento  $\Phi^2 = \text{cost.}$ , tale ultimo tensore è ortogonale al tensore  $\bar{\Phi}$ .

3. Ci proponiamo ora il problema di studiare se sia possibile la propagazione di perturbazioni ondose in un corpo solido isotropo elastoviscoso <sup>(3)</sup>. Ci occuperemo solo delle onde di « distorsione » in quanto le qualità anelastiche intervenendo esclusivamente nelle deformazioni tangenziali potranno modificare soltanto le leggi di propagazione di tali onde <sup>(4)</sup>.

Le equazioni indefinite del problema saranno fornite, oltre che dalle 6 relazioni scalari (10), dalle tre note equazioni dell'equilibrio e dalla relazione di continuità.

Limitiamoci a considerare la propagazione in un sistema piano: l'estensione a 3 dimensioni non presentando che maggiore complessità formale senza ulteriore contributo concettuale. Avremo dunque nel piano:

$$2p = \sum_i \Phi_{ii} \quad \sum_i \bar{\Phi}_{ii} = 0 \quad \text{e} \quad \bar{\Phi}_{11} = \frac{\Phi_{11} - \Phi_{22}}{2}.$$

(1) E inoltre:  $\lambda = \Sigma \Lambda_{ii} = (3 A^* + 2 B^*) \frac{\partial}{\partial t} p$ .

(2) V. MAXWELL, *The Scientific Papers*, vol. II: *The dynamical theory of gases*. London repr., 1927.

(3) Per cui le qualità anelastiche siano del tipo « viscoso » ossia caratterizzabili da un coefficiente noto:  $\bar{B}^*$ .

(4) Le « onde di dilatazione » invece sussisteranno come in un corpo elastico.



Ciò premesso, si perviene agevolmente al sistema definitivo di equazioni indefinite, a derivate parziali del 1° ordine delle funzioni incognite:  $\Phi_{11}, \Phi_{12}, \Phi_{22}, v_1, v_2$  di  $y_1, y_2$  e  $t$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y_2} + \rho \left( F_1 - \frac{d}{dt} v_1 \right) &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial y_2} + \rho \left( F_2 - \frac{d}{dt} v_2 \right) &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial v_2}{\partial y_2} &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_2}{\partial y_2} &= 2 B^* \frac{\partial}{\partial t} (\Phi_{11} - \Phi_{22}) + 2 \bar{B}^* (\Phi_{11} - \Phi_{22}) \\ \frac{\partial v_1}{\partial y_2} + \frac{\partial v_2}{\partial y_1} &= 4 B^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{12} + 4 \bar{B}^* \Phi_{12} . \end{aligned} \right.$$

Operiamo un cambiamento di variabili eseguendo la trasformazione puntuale:

$$(12) \quad \begin{pmatrix} t & y_1 & y_2 \\ \zeta & \zeta_1 & \zeta_2 \end{pmatrix}.$$

E poniamo:

$$(13) \quad p_0 = \partial \zeta / \partial t \quad p_i = \partial \zeta / \partial y_i \quad i = 1, 2.$$

Del sistema trasformato, pure a derivate parziali del 1° ordine, limitiamoci a mettere in evidenza i termini contenenti le derivate parziali delle funzioni incognite rispetto alla variabile  $\zeta$ . Si ottiene il nuovo sistema:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \zeta} p_1 + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \zeta} p_2 - \rho \frac{dv_1}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \rho F_1 + \dots &= 0 \\ \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \zeta} p_1 + \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \zeta} p_2 - \rho \frac{dv_2}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} + \rho F_2 + \dots &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} p_1 + \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} p_2 &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} p_1 - \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} p_2 - 2 B^* p_0 \left( \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \Phi_{22}}{\partial \zeta} \right) - 2 \bar{B}^* (\Phi_{11} - \Phi_{22}) + \dots &= 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \zeta} p_2 + \frac{\partial v_2}{\partial \zeta} p_1 - 4 B^* p_0 \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \zeta} - 4 \bar{B}^* \Phi_{12} + \dots &= 0 . \end{aligned} \right.$$

E consideriamo il determinante funzionale:

$$(15) \quad \Omega = \begin{vmatrix} p_1 & 0 & p_2 & -\rho \frac{d\zeta}{dt} & 0 \\ 0 & p_2 & p_1 & 0 & -\rho \frac{d\zeta}{dt} \\ 0 & 0 & 0 & p_1 & p_2 \\ -2B^*p_0 & 2B^*p_0 & 0 & p_1 & -p_2 \\ 0 & 0 & -4B^*p_0 & p_2 & p_1 \end{vmatrix}.$$

Se  $\Omega \neq 0$  il sistema (14) è normale rispetto alle derivate parziali delle funzioni incognite<sup>(1)</sup>. Imponendo la condizione  $\Omega = 0$  veniamo invece, come è noto<sup>(2)</sup>, a caratterizzare le varietà caratteristiche rappresentanti le superficie d'onda cercate, come superficie di discontinuità nel sistema studiato. A sviluppi eseguiti, detto come di consueto  $G$  il modulo elastico tangenziale<sup>(3)</sup>, si giunge alla:

$$(15') \quad \Omega = G(p_1^2 + p_2^2) - \rho p_0 \frac{d\zeta}{dt} = 0$$

che può considerarsi l'equazione caratteristica, differenziale a derivate parziali del 1° ordine della superficie d'onda generica:

$$(16) \quad \zeta(t, y_1, y_2) = \text{cost.}$$

In tale equazione, ricordando le posizioni (13):

$$(17) \quad d\zeta/dt = p_0 + p_1 v_1 + p_2 v_2.$$

4. Consideriamo la configurazione della superficie d'onda, limitante lo strato perturbato, all'istante  $t$ . E sia  $n$  la normale esterna nel punto generico  $P$  di tale superficie.

Tale normale sarà intersecata dalla superficie d'onda all'istante  $t + dt$  nel punto  $Q$ . Diciamo  $dn$  la misura con segno, del segmento  $\overline{PQ}$ . Essendo  $v$  la velocità del mezzo in  $P$  all'istante  $t$  diciamo  $v_n$  la componente della velocità secondo la normale  $n$ . La velocità di propagazione  $V$  della superficie d'onda risulta:

$$(18) \quad V = a - v_n$$

(1) E pertanto vale il noto teorema di esistenza del CAUCHY.

(2) Ved. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Bologna, Zanichelli, 1931.

(3) Pari a  $1/4 B^*$ .

ove  $a$  è la velocità di avanzamento del moto ondoso data dalla <sup>(1)</sup>:

$$(19) \quad a = -p_0 / \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Dalle (15') e (17) si ottiene agevolmente:

$$(20) \quad a^2 = \frac{G}{\rho} - p_0 \frac{p_1 v_1 + p_2 v_2}{p_1^2 + p_2^2}.$$

Ora, essendo i coseni direttori della normale  $p_i / \sqrt{\Sigma p_i^2}$ , si ha

$$v_n = \mathbf{v} \times \mathbf{n} = (p_1 v_1 + p_2 v_2) / \sqrt{p_1^2 + p_2^2}.$$

Per questo risultato e per la (19), la (20) diviene:

$$a^2 - av_n - G/\rho = 0,$$

donde per la (18) in definitiva:

$$(21) \quad \boxed{2V = \sqrt{v_n^2 + 4 \frac{G}{\rho}} - v_n}.$$

Formula semplice ed espressiva che governa la propagazione ondosa nei sistemi elastoviscosi. Essa si identifica, per  $v_n = 0$  con la nota formula elastica, mentre fornisce  $V = 0$  in conformità al noto risultato negativo nel caso di sistema perfettamente viscoso <sup>(2)</sup>. Si rileva che la  $V$  è sempre minore della velocità nell'equivalente mezzo elastico puro, o di quella avvertesi nel dominio del mezzo non soggetto a fluire.

**Fisica.** — *La luminosità degli strumenti ottici telescopici e la loro efficienza.*  
Nota di G. BOCCHINO, presentata dal Corrisp. U. BORDONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Ved. T. LEVI-CIVITA, loco prima citato, p. 65.

(2) Ved., p. es., G. LAMPARIELLO, *Sull'impossibilità di propagazione ondosa nei fluidi viscosi*. «Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei», 1931.



**Chimica** (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica*. — V. *Sulla ricerca del Gadolinio* <sup>(1)</sup>. Nota di G. PICCARDI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

La ricerca del Gadolinio non si può condurre con comodità e semplicità in base agli spettri d'assorbimento, come per la maggior parte degli elementi delle terre rare; infatti, per il Gadolinio, l'assorbimento ha luogo soltanto nell'ultravioletto, cosa questa che richiede sempre, per la ricerca, una registrazione fotografica con apparecchi montati in quarzo od in uviol. È allora forse più semplice condurre l'identificazione in base a spettri d'arco o di scintilla, dato che il Gadolinio presenta molte delle sue righe più brillanti nella regione visibile e perciò accessibile a qualsiasi strumento. In ogni modo il gran numero di righe che affollano spettri di tal genere, quando si hanno più terre rare in presenza, può dar luogo a varie difficoltà, specialmente se non si hanno a disposizione apparecchi di dispersione, o di potere risolutivo, sufficiente.

Io ho voluto allora constatare se il metodo degli spettri molecolari, da me elaborato qualche anno fa <sup>(3)</sup> e che mi aveva dato ottimi risultati nel caso di tre elementi, Scandio, Ittrio e Lantanio <sup>(4)</sup>, poteva altrettanto bene servire per la ricerca del Gadolinio.

Tempo addietro, studiando lo spettro emesso dall'ossido di Gadolinio, allo stato di vapore, avevo potuto stabilire il comportamento dei vari sistemi di bande, situati per lo più nella regione arancione ed azzurra, nei riguardi dell'eccitazione <sup>(5)</sup>. Ricordo qui che lo spettro raggiunge il massimo splendore complessivo, operando alla minima temperatura compatibile coll'esistenza dell'ossido biatomico GdO.

I due nuovi sistemi di bande, da me scoperti, situati nell'azzurro, colle origini a  $\lambda$  4615 e  $\lambda$  4892, aumentano rapidamente d'intensità al diminuire della temperatura. Invisibili nella scintilla, si intravedono a mala pena in spettri d'arco (naturalmente le sole visibili sono le bande  $n' = n'' = 0$ ) ma brillano intensissimi nello spettro di fiamma ossidrica. Particolarmente intenso è il sistema a  $\lambda$  4615.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1936.

(3) G. PICCARDI, Questi « Rendiconti », 14 (6), 578, (1931).

(4) G. PICCARDI e A. SBERNA. Questi « Rendiconti », 15 (6), 83 (1932); 15 (6), 309, (1932); 15 (6), 577 (1932).

(5) G. PICCARDI, « Gazz. Chimica It. », 63, 887 (1933).

SaO

Na

SaO

Eu

GdO

6201

5987

5911

5807

5681

4892

4798

4716

4615

4462





Gli altri sistemi sono meno sensibili alle variazioni di temperatura.

Il sistema nel verde a  $\lambda$  5681 e quelli nell'arancione a  $\lambda$  5987 e  $\lambda$  6182 invisibili nella scintilla sono abbastanza intensi nell'arco e brillanti nella fiamma ossidrica.

I sistemi nel giallo a  $\lambda$  5807 e nell'arancione a  $\lambda$  6201 sono invece visibili nella scintilla e brillanti nell'arco e nella fiamma.

Mi ero già fatto quindi un'idea del comportamento dello spettro del monossido GdO nei riguardi della temperatura e non mi restava che a stabilire, operando nelle condizioni di temperatura più opportune, la persistenza dei vari sistemi rispetto alla concentrazione.

Ho disciolto allora un grammo di una miscela, circa metà e metà, di  $Gd_2O_3$  e  $Sm_2O_3$  (allora non avevo Gadolinio puro a disposizione) in acido nitrico ed ho preparato soluzioni al 10, 1, 0.1, 0.01 e 0.001 per cento, cioè soluzioni contenenti  $Gd_2O_3$  in ragione del 5, 0.5, 0.05, 0.005 e 0.0005, per cento circa.

Servendomi del consueto dispositivo di fiamma, descritto nelle precedenti Note ho osservato visualmente e registrate fotograficamente, mediante un piccolo spettrografo *Hilger* D2 gli spettri emessi, cominciando ad operare dalle soluzioni più diluite in modo che la nebbia di ossido che si spande nell'aria non potesse falsare i risultati. Ho eseguito le registrazioni fotografiche con una posa di 30 minuti primi, così da far coincidere approssimativamente le intensità fotografiche con quelle visuali. I risultati ottenuti sono i seguenti:

Alle concentrazioni di 0.001 e 0.01 % le bande non sono affatto osservabili, nè registrabili, e la fiamma non è colorata.

Alla concentrazione di 0.1 % si comincia ad osservare nella fiamma una leggera colorazione rosea. Aprendo la fenditura dello spettroscopio si riescono a distinguere direttamente le bande dell'arancione interne  $\lambda$  5950 le quali sono peraltro così poco intense da non impressionare la lastra con una posa di 30 minuti (a fenditura normale). Vengono invece registrate fotograficamente alcune bande azzurre, quale la 4615, che l'occhio non vede.

Alla concentrazione di 1 % la fiamma è brillantemente colorata in rosso e sono nettamente distinguibili i gruppi più importanti nell'arancione, nel giallo e nell'azzurro. La lastra registra tutti questi gruppi senza difficoltà.

Alla concentrazione del 10 % lo spettro è completo e brillantissimo.

Le bande più persistenti sono quelle comprese fra la 5911 e la 5987, oltre la 4615.

La fiamma è colorata in rosso, ho detto, ma questo colore è dovuto alla presenza del Samario. Ho osservato poi, che il Gadolinio emette una luce biancastra per l'occhio, dovuta ad effetto complementaristico causato dalla sovrapposizione di luce arancione e di luce azzurra.

Per il Gadolinio la sensibilità del metodo non è grande come nel caso degli elementi Scandio, Ittrio e Lantanio, ma è sufficiente per il controllo

delle operazioni di frazionamento. La rapidità e la sicurezza della ricerca è tale che questo metodo può esser usato convenientissimamente fino a che non si debbano iniziare delle operazioni di rigorosa purificazione e le percentuali di Gadolinio discendano sotto 1 : 1.000. La minima concentrazione osservabile è 0.1 % della mia soluzione, cioè 0.05 % circa di  $Gd_2O_3$ .

Riporto nella Tavola annessa una fotografia dello spettro di fiamma dell'ossido  $GdO$ , sulla quale sono segnate le lunghezze d'onda dei principali gruppi di bande.

Ringrazio vivamente il dott. Aldo Jandelli per l'aiuto datomi in questo lavoro.

**Chimica.** — *Elettrolisi del monocloruro di iodio in solventi diversi*<sup>(1)</sup>. Nota di C. SANDONNINI e N. BORGHELLO, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Il momento polare del monocloruro di iodio in soluzione di tetracloruro di carbonio e di nitrobenzolo è assai più elevato che allo stato gassoso. Secondo Fairbrother<sup>(3)</sup> ciò è dovuto al fatto che in soluzione aumenta il carattere ionico dei legami di valenza, così che si può prevedere che in solventi ad alta costante dielettrica il monocloruro si debba comportare come un elettrolita.

Ricerche elettrochimiche sul suo comportamento tanto allo stato fuso come allo stato di soluzione avevano già portato a risultati molto discordi, per le difficoltà sperimentali non sempre superabili e anche per una non corretta impostazione ed interpretazione delle esperienze fatte.

Già Faraday<sup>(4)</sup> aveva dimostrato la presenza di ioni positivi di iodio monovalente ottenendo un deposito catodico di iodio nell'elettrolisi del monocloruro fuso; risultato che venne confermato da Bruner e Bekier<sup>(5)</sup>. Dal monocloruro allo stato di soluzione riescì soltanto a Brown<sup>(6)</sup> di ottenere un deposito catodico di iodio. In soluzione acetica Finkelstein<sup>(7)</sup> aveva potuto determinare i valori, benchè molto piccoli, di decomposizione dei vari alogenuri concludendo per la presenza di ioni positivi di iodio in quelle soluzioni. Audrieth e Birr<sup>(8)</sup> ammettevano nelle soluzioni di monocloruro

(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1936.

(3) « J. Chem. Soc. », 850, 1936.

(4) « Ostw. Klassiker », 86, 43, 1897.

(5) « Z. elektr. Chem. », 18, 373, 1912.

(6) « Phil. Mag. » (5), 31, 460, 1891.

(7) « Z. phys. Chem. », 124, 295, 1926.

(8) « J. Am. Chem. Soc. », 55, 672, 1933.

di iodio in piridina la formazione di un sale complesso di piriiodinio conduttore, in cui lo iodio farebbe parte del catione.

Dall'elettrolisi di soluzioni di monocloruro nei più svariati solventi altri sperimentatori poterono assodare che si ha sempre migrazione dello iodio all'anodo per formazione di complessi che si dissocierebbero dando ioni negativi dei quali fanno parte tutti gli alogeni.

L'interpretazione dei risultati delle elettrolisi viene resa più difficile per il fatto che lo iodio, che in alcuni solventi si deposita al catodo, disciogliendosi dà soluzioni che posseggono una certa conduttività la quale è legata ad un movimento dello stesso iodio dal catodo all'anodo.

Questa conduttività delle soluzioni di iodio puro in solventi come l'acido acetico ed il nitrobenzolo, viene diversamente interpretata: o ammettendo una dissociazione dello iodio in ioni negativi e positivi, spiegazione che va sempre più perdendo terreno anche per il fatto che soluzioni di cloro negli stessi solventi non hanno alcun potere conduttore, o ancora ammettendo la formazione di complessi col solvente.

Oltre a questi due modi di vedere, da lungo tempo si è ventilata la possibilità che questo potere conduttore sia dovuto a un fenomeno molto simile a quello della cataforesi, ma a questo riguardo conviene notare subito che lo iodio in questi stessi solventi ha un peso molecolare relativamente semplice. Questa ipotesi era stata posta anche dallo stesso Finkelstein<sup>(1)</sup> a parziale spiegazione della conduttività dei cloruri di iodio.

Tra le prime esperienze sulle quali si può basare questa spiegazione sono da citare quelle di Bordier<sup>(2)</sup> e quelle di Annam<sup>(3)</sup>.

Recentemente in un suo lavoro sulla conduttività di soluzioni di iodio in ioduro di potassio Vasilescu Karpen<sup>(4)</sup> ha trovato che si ha passaggio durevole di elettricità attraverso queste soluzioni sotto la minima differenza di potenziale « senza elettrolisi ». Egli ammette che lo « iodio atomico » (?) disciolto si carichi al catodo di elettricità negativa e quindi venga attratto all'anodo dove si scarica e si accumula rendendo la soluzione più densa, per cui si avrebbe per diffusione di nuovo trasporto di iodio dall'anodo al catodo e così via. Anche se la spiegazione così schematica del fenomeno osservato non pare senz'altro accettabile, il fenomeno stesso può essere con vantaggio invocato a spiegazione di molti altri.

Il dispositivo più largamente usato da molti ricercatori non appare il più adatto per stabilire quali siano la specie ioniche o il loro equivalente nelle soluzioni di iodio puro o in quelle dei suoi composti con gli altri alogeni. La maggior parte delle elettrolisi furono fatte usando celle con gli elettrodi di argento, dalla quantità di alogenuro di argento formato a uno

(1) « Z. phys. Chem. », 115, 306, 1925.

(2) « Lyon Medical », 117, 174, 1911.

(3) « Kolloid Beih. », 3, 360, 1912.

(4) « Compt. Rend. », 199, 480, 1934.



degli elettrodi si deduceva poi la qualità e l'equivalente delle specie ioniche presenti.

Secondo parere concorde l'argento non viene attaccato che insensibilmente alla superficie dallo iodio e dai suoi alogenuri in vari solventi in assenza assoluta di acqua <sup>(1)</sup>. È da ritenere che con questo dispositivo al passaggio della corrente si formerà all'anodo tanto alogenuro quanto corrisponde alla quantità di corrente somministrata, indipendentemente dalla natura degli ioni che possono esistere in soluzione; cioè per un faraday si avrà sempre formazione di un equivalente di alogenuro come Bruner e Galecki <sup>(2)</sup> hanno sempre riscontrato. La cattiva adesione dell'alogenuro che si forma, come noi stessi abbiamo potuto constatare, costringe sempre ad esperienze di breve durata e con piccola intensità di corrente ciò che torna a scapito della rigorosità dei risultati. Forse per queste ragioni Bruns <sup>(3)</sup> da elettrolisi di tricoloruro di iodio in soluzione acetica credette di poter concludere che all'anodo per ogni faraday si ha formazione di una quantità di alogenuro corrispondente a due equivalenti.

D'altra parte Fichter e Stern <sup>(4)</sup> usando lo stesso dispositivo trovarono che per elettrolisi di soluzioni di  $(\text{CH}_3\text{COO})_3\text{I}$  in anidride acetica si ha formazione catodica di ioduro di argento corrispondente alla scarica di iodio trivalente positivo.

Noi abbiamo ritenuto conveniente riesaminare queste elettrolisi usando celle con diaframmi inattaccabili di vetro poroso e adoperando, come già aveva fatto Faraday, elettrodi di platino tenendo presente i fenomeni secondari che avrebbero dovuto avere influenza sui risultati di esperienze fatte con un tale dispositivo, e che le diverse soluzioni nei diversi solventi possono naturalmente avere una costituzione assai diversa.

Nella cella elettrolitica, come si è detto, lo spazio anodico era separato da quello catodico da un setto di vetro poroso di Jena molto resistente; ognuno dei due spazi aveva una capacità di circa cc. 20. Gli elettrodi erano sostenuti a smeriglio su due branche saldate alla cella, le quali avevano anche due tubature laterali per permettere una eventuale raccolta di gas e una libera comunicazione con l'esterno per evitare che eventuali compressioni potessero provocare movimenti del liquido attraverso il setto poroso. Le soluzioni perfettamente anidre venivano accuratamente protette dal contatto con l'umidità esterna durante l'elettrolisi.

Con il dispositivo usato, anche per la piccola conduttività delle soluzioni, non si poterono mai usare forti quantità di corrente per evitare che

(1) BRUNER e GHALECKI, «Z. phys. Chem.», 84, 517, 1913; BRUNS, «Z. phys. Chem.», 118, 89, 1925.

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit.

(4) «Helvetica Chim. Acta», 11, 1226, 1928.

le variazioni di concentrazione che si dovevano stabilire per effetti elettrochimici venissero poi falsate da diffusione attraverso il setto poroso.

Abbiamo per ora limitate le nostre ricerche alla elettrolisi di soluzioni di monocloruro di iodio e di iodio puro in acido acetico e nitrobenzolo, solventi già usati da molti altri ricercatori.

Il titolo di queste soluzioni veniva stabilito su di una quantità pesata di una soluzione fatta approssimativamente della concentrazione voluta. La somma degli alogeni si determinava, previa riduzione con solfito in soluzione debolmente alcalina, procedendo poi, quando ne era il caso, alla separazione dei due alogeni spostando lo iodio con nitrito in soluzione debolmente acida, per avere con certezza il rapporto I/Cl nelle soluzioni usate.

Per le soluzioni di nitrobenzolo si trovò conveniente, dopo riduzione degli alogeni, asportare questo solvente con distillazione in corrente di vapore: nel distillato non si riscontrarono mai tracce di ioni cloro e di ioni iodio. La concentrazione delle soluzioni veniva sempre determinata in grammi di sostanza per cento di soluzione.

L'intensità della corrente era misurata con un milliamperometro e la quantità di corrente con un voltmetro a rame o ad argento secondo l'intensità della corrente.

Ad esperienza ultimata si travasavano separatamente mediante un sifone i liquidi dello spazio anodico e catodico in modo che non rimanesse che un sottile velo aderente al recipiente, trascurando questa piccola quantità e determinando di nuovo sulle due quantità pesate la quantità totale di alogeni e il rapporto I/Cl per poter seguire il meccanismo della elettrolisi.

Abbiamo preferito adoperare questo metodo grossolano di raccolta dei liquidi per l'analisi invece di risciacquare i due spazi della cella con lo stesso solvente per l'impossibilità di evitare trasporti di soluzione attraverso il setto durante le manipolazioni ciò che avrebbe portato inconvenienti maggiori.

Lo iodio usato venne ripetutamente sublimato e seccato su anidride fosforica. Il monocloruro di iodio fu preparato per sintesi diretta<sup>(1)</sup> e purificato per cristallizzazione frazionata finchè il rapporto I/Cl era praticamente uguale a uno. La distillazione non porta mai al prodotto puro perchè alla temperatura di distillazione, anche a pressione ridotta, la dismutazione del monocloruro in tricloruro e iodio libero ha velocità assai rilevante.

L'acido acetico anidro venne ottenuto da quello purissimo del commercio per cristallizzazione frazionata. Alla frazione usata vennero aggiunte piccole quantità di anidride acetica qualche tempo prima di usarla.

Il nitrobenzolo venne ottenuto anidro per ripetute distillazioni frazionate a bassa pressione dopo averlo seccato su cloruro di calcio.

(1) STORTENBEKER, « Rec. Trav. Chim. », 7, 152, 1882.

ELETTROLISI DEL MONOCLORURO DI IODIO IN SOLUZIONE ACETICA.

Dalle prime esperienze risulta subito evidente che all'anodo si ha arricchimento di ambedue gli alogeni, ma il rapporto  $I/Cl$  all'anodo discende sotto il valore iniziale, mentre al catodo aumenta. Questo ultimo fatto era già stato osservato da Bruner e Galecki, ma a nostro parere, ad esso non venne attribuito il giusto valore.

La soluzione catodica dopo un breve tempo si colora sempre in bruno e quella anodica si decolora assumendo l'aspetto di soluzioni di tricloruro. Se si usano soluzioni sufficientemente concentrate si ha sul catodo e sulle pareti del recipiente un deposito cristallino di iodio puro. Adoperando soluzioni diluite per elettrolisi di lunga durata anche lo spazio catodico finisce per decolorarsi quasi completamente.

Per il passaggio di un faraday l'arricchimento all'anodo corrisponde a circa tre equivalenti di alogeno; circa due di cloro e uno di iodio.

Riportiamo una sola esperienza tra le tante eseguite: per elettrolisi di una soluzione all'8.74 % di monocloruro con un rapporto iniziale  $I/Cl$  di 0.9706, durata 100 minuti, con intensità di 0.017 amp. corrispondente a 100.2 coulombs, si ottennero i seguenti risultati: al catodo si ebbe una diminuzione di gr. 0.1855 di iodio e di gr. 0.0701 di cloro così che il rapporto  $I/Cl$  del residuo salì a 1.026. L'arricchimento all'anodo fu di gr. 0.1610 di iodio, e di gr. 0.066 di cloro ed il rapporto  $I/Cl$  sul contenuto totale dello spazio anodico scese a 0.9302. L'aumento di iodio e cloro all'anodo corrisponde a 302 coulombs dei quali 122.5 per lo iodio e 179.5 per il cloro; si ha cioè un trasporto corrispondente a tre equivalenti per faraday, dei quali circa due di cloro e uno di iodio.

Nelle loro esperienze di trasporto Bruner e Galecki <sup>(1)</sup> avevano trovato che si ha migrazione di una quantità quasi sempre superiore ai due equivalenti.

I risultati ottenuti si possono spiegare ammettendo che nelle soluzioni acetiche il monocloruro di iodio esista sotto forma di un autocomplesso  $I(ICI_2)$ , anche se in quantità non molto forte poichè il suo peso molecolare è pressocchè normale <sup>(2)</sup>, ed attribuendo un valore di migrazione molto alto all'ione  $(ICI_2)^-$  e all'ione  $I^+$  un valore quasi nullo. L'eccedenza dell'iodio deve essere attribuita al fatto constatato e già ricordato che lo iodio molecolare depositato al catodo in questi solventi migra all'anodo indipendentemente.

(1) «Z. phys. Chem.», 84, 517, 1913.

(2) STORTENBECKER, «Z. phys. Chem.»<sup>2</sup> 10, 190, 1892.



Questa spiegazione sarebbe in accordo con le esperienze di Faull e Baekstrom<sup>(1)</sup> ed anche di Finkelstein<sup>(2)</sup> e di Sullivan<sup>(3)</sup> dalle quali risulta la formazione di un complesso  $\text{HICl}_2$  nelle soluzioni cloridriche del monocloruro di iodio e la grande tendenza generale degli alogenuri di iodio di comportarsi come cloroanidridi. In conseguenza in un primo tempo durante l'elettrolisi, nello spazio catodico si ha scarica di ioni iodio positivi; la soluzione si arricchisce di iodio e, se la concentrazione iniziale è sufficientemente alta, la soluzione si satura di iodio, che si deposita. Se la soluzione è molto diluita, siccome oltre all'anione migra all'anodo anche lo iodio scaricato al catodo, si può arrivare così al completo trasporto di tutto il monocloruro nello spazio anodico.

#### ELETTROLISI DEL MONOCLORURO DI IODIO IN NITROBENZOLO.

Il peso molecolare del monocloruro di iodio in questo solvente è quasi normale<sup>(4)</sup>. Per elettrolisi anche in questo caso si ha trasporto di ambedue gli alogeni nello spazio anodico; durante l'elettrolisi il rapporto  $\text{I/Cl}$  diminuisce dal valore iniziale all'anodo ed aumenta al catodo come Bruner e Galecki<sup>(5)</sup> avevano osservato. L'aumento di concentrazione all'anodo per un faraday corrisponderebbe circa a due equivalenti di alogeno, un po' meno di iodio e un po' più di cloro. A tal proposito diamo i risultati di una delle esperienze eseguite: per elettrolisi di una soluzione al 12.06% di monocloruro, per il passaggio di 231 coulombs il rapporto  $\text{I/Cl}$  al catodo salì da 1.003 a 1.03, mentre all'anodo discese a 0.981. La quantità di iodio e cloro totale trasportata all'anodo corrisponde a 399 coulombs, cioè circa a 1.7 equivalenti per faraday.

Ciò risulta anche dai valori di migrazione ottenuti dagli autori ora citati.

Per questi risultati sperimentali non regge la spiegazione invocata per le soluzioni in acido acetico, per lo meno la formazione di autocomplessi non può essere la causa principale. Molti ricercatori ritengono che il fattore predominante per ogni tipo di soluzione studiata sia appunto la formazione di complessi ossonici. Riguardo alla formazione di tali complessi e ad eventuali reazioni del soluto con il solvente si devono fare alcune osservazioni. Benchè la clorurazione diretta dell'acido acetico e ancor più l'introduzione di cloro nel nucleo del benzolo sia notoriamente accelerata dalla presenza di iodio, di modo che il monocloruro di iodio si può considerare come agente clorurante molto attivo, tuttavia con i solventi e le sostanze usate perfettamente anidre alla temperatura ordinaria e per un tempo assai

(1) « J. Am. Chem. Soc. », 54, 620 1932.

(2) Loc. cit.

(3) « Z. phys. Chem. », 28, 523, 1899.

(4) STORTENBECKER, loc. cit.

(5) Loc. cit.

superiore a quello di esperienza non si ha mai traccia di reazione come si può dedurre dall'assenza completa di acido cloridrico. Si può tuttavia prevedere che se nella soluzione esistono composti di somma pur senza eliminazione di idracido, questi si formeranno per attacco degli alogeni nella parte della molecola che poi parteciperà alla reazione del tipo di quelle che si ammettono formarsi per es. nella nitrurazione del benzolo.

#### ELETTROLISI DI SOLUZIONI DI IODIO.

Come è stato ripetutamente constatato, anche per le elettrolisi di soluzioni di iodio puro si ha trasporto di iodio all'anodo.

Noi abbiamo voluto vedere se questo fenomeno si ripeteva anche nei solventi usati.

Per la piccola quantità di elettricità che si riesce a far attraversare alle soluzioni in causa della loro scarsa conduttività nell'intendimento di avere variazioni ben determinabili di concentrazione nei due spazi della cella le esperienze non poterono essere prolungate per un tempo relativamente lungo sempre per evitare fenomeni di diffusione e ci si dovette limitare quindi a brevi durate e a piccole variazioni di concentrazione. In ogni modo venne confermata la migrazione dello iodio all'anodo anche per le soluzioni usate; la quantità trasportata per faraday oscilla intorno a due equivalenti di iodio. Pare cioè che sia la molecola dello iodio, che dalle determinazioni di peso molecolare in questi solventi sembra corrispondere a  $I_2$ , quella che realmente prende parte alla migrazione. Contro l'esistenza in queste soluzioni di ioni semplici iodio a cui è aggregata una molecola di iodio neutro cioè di ioni  $I_3^-$ , ammessi nelle soluzioni di polioduri, sta il fatto che anche in queste si ha trasporto di iodio sotto la minima differenza di potenziale, come lo ha provato Vasilescu Karpen.

Nella discussione dei risultati ottenuti dalle elettrolisi del monocloruro di iodio in soluzione acetica abbiamo fatto notare che lo iodio trasportato all'anodo era sempre superiore a quello calcolato ammettendo che il trasporto fosse dovuto solo agli ioni  $(ICl_2)^+$  risultanti della formazione di un complesso  $I(ICl_2)$ . Evidentemente la causa di questo risiede nella migrazione verso l'anodo dello iodio scaricato al catodo durante l'elettrolisi. Non potendo quest'ultima essere seguita in modo quantitativo, come lo dimostra anche l'incertezza dei valori ottenuti dalle elettrolisi di soluzioni di iodio puro, riesce difficile una più esatta interpretazione dei risultati ottenuti dalle elettrolisi del monocloruro in nitrobenzolo.

I risultati ottenuti da queste esperienze, in accordo con quelli di altri ricercatori, dimostrano che una sostanza può subire trasformazioni di costituzione molto profonde dovute essenzialmente alla natura del mezzo in cui si trova.

**Botanica.** — *Influenza che sullo sviluppo delle piante esercita la eliminazione parziale delle riserve accompagnanti l'embrione e probabile presenza in esse di « sostanze di accrescimento »* <sup>(1)</sup>. Nota di O. VERONA e G. BONAVENTURA, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. E. CARANO.

L'azione che esercita sullo sviluppo delle piante la soppressione più o meno completa delle riserve dei semi fu indagata la prima volta, per quanto ci consta, da Delassus <sup>(3-4)</sup> che seguì lo sviluppo in piena terra di semi di leguminose integri oppure privati di mezzo, uno o uno e mezzo cotiledone. Osservò egli un rallentamento dello sviluppo per la durata di tutto il periodo vegetativo e profonde modificazioni morfologiche, fisiologiche e anatomiche.

Una qualche relazione con queste esperienze, ma in particolare aventi riferimento alla biologia dell'embrione, presentano le successive indagini di Mazè <sup>(5)</sup>, Juliani <sup>(6)</sup>, Colla <sup>(7)</sup>, Dragone-Testi <sup>(8-9)</sup>.

I reperti di questi AA. indicano, in via interpretativa, che la possibilità di alimentazione eterotrofa da parte dell'embrione è assai limitata e che la soppressione di parte delle riserve contenute nel seme prima che l'embrione di esso germini influisce sulla morfologia come sulle funzioni della pianta. Nessuno degli sperimentatori ricordati ha riallacciato i risultati conseguiti agli studi sulla presenza nei vegetali di sostanze di natura ormonica o di accrescimento capaci d'influenzarne lo sviluppo.

La presenza nelle piante di tali sostanze è nota da qualche tempo. Già Paal <sup>(10)</sup> osservò che lo sviluppo del coleoptile di *Avena sativa* rallenta notevolmente qualora venga privato dell'apice, sì da pensare che nella parte superiore di esso si producano particolari sostanze stimolanti lo sviluppo. Söding <sup>(11)</sup>, ulteriormente estendendo le esperienze ad altre piante, dette

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia vegetale e Microbiologia agraria della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1937.

(3) M. DELASSUS, « C. R. Acc. de Sc. », 153, p. 1494, 1911.

(4) M. DELASSUS, « C. R. Acc. de Sc. », 157, p. 228, 1913.

(5) I. MAZÈ, « Ann. de l'Inst. Pasteur », 41, 1917.

(6) G. JULIANI, « Annali di Botanica », 1932.

(7) S. COLLA, « Boll. d. Soc. Ital. di Biol. Sperim. », 6, 1931.

(8) G. DRAGONE-TESTI, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, XIX, 1934.

(9) G. DRAGONE-TESTI, « Rend. R. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, XX, 1934.

(10) A. PAAL, « Jahrb. wiss. Bot. », 406, 1918.

(11) H. SÖDING, « Jahrb. wiss. Bot. », 611, 1926.

conferma di questo fatto, e così altri (Beyer, Went, Sierp e Seybold, Nuernbergk...) mentre si dimostrava (Nielsen, Boysen Jensen, Dolk e Thimann) che ormoni aventi le stesse capacità di quelli dell'avena potevano ottenersi anche da vegetali inferiori. È di questi ultimi tempi la dimostrazione, infine, da parte di Bouillenne e Went dell'esistenza di un nuovo principio ormonico da loro denominato « rizocalina » avente funzione rizogena <sup>(1)</sup>.

Dimostrata l'impossibilità da parte dell'embrione di vita autotrofa; accertata la sfavorevole influenza sullo sviluppo della pianta della eliminazione, anche parziale, delle riserve; e, d'altro canto, tenuta presente la capacità che ha la plantula di elaborare sostanze di accrescimento, ci siamo domandati se sostanze di natura analoga non si trovino preesistenti nelle riserve che accompagnano l'embrione come per la rizocalina Bouillenne e Went hanno dimostrato. In altri termini, ci siamo domandati se, il mancato sviluppo dell'embrione privato delle riserve, pur in presenza di tutti gli elementi biogeni, anche accessori, e la negativa influenza sullo sviluppo della pianta esercitata dalla soppressione parziale delle riserve non dipendesse dall'assenza di fattori di crescita contenuti nelle riserve stesse e indipendenti dalla rizocalina la cui azione, sia pur aspecifica, si porta solo sulle radici. D'altra parte, se a disposizione dell'embrione, non esistessero altre sostanze all'infuori di quelle note come « sostanze alimentari di riserva », una volta che la plantula derivantene avesse raggiunto uno sviluppo radicale e aereo tale da poterle essere consentita l'alimentazione autotrofa, la eliminazione delle sostanze residuali non dovrebbe in alcun modo influire sull'ulteriore sviluppo della pianta. Infatti, le riserve asportate, non dovrebbero, ci sembra, incidere, in quanto fattori di alimentazione, sulla crescita che per quel tanto che esse contengono e non in modo sensibile trovando la plantula, nel substrato, ogni elemento necessario al suo sviluppo ed essendo capace di azione fotosintetica; azione alla quale, fra l'altro, si connette la formazione di rizocalina per la quale verrebbe assicurato un normale sviluppo delle radici e, quindi, un normale assorbimento. Così pure non dovrebbero influire le piccole quantità di riserve asportate in quanto detentrici di sostanze, secondo Mazè, organo-minerali anch'esse presenti nell'ambiente e ormai resesi assimilabili dalla plantula essendosi determinato sufficiente, a sviluppo avvenuto, il rapporto  $\frac{\text{M. organico}}{\text{M. minerale}}$ .

I risultati delle esperienze eseguite durante due anni consecutivi <sup>(2)</sup>, soprattutto su piante di frumento allevate in difetto di sostanze di riserva,

(1) R. BOUILLENNE e F. WENT, « Arch. de l'Inst. de Botanique de Liège », 10, 1933.

(2) Dato il carattere succinto della presente Nota la documentazione dei risultati e la descrizione dei metodi seguiti per le esperienze sono stati, con dettaglio, comunicati in altra sede. (R. Acc. dei Fisiocritici di Siena).





Culture di Frumento "Virgilio", provenienti da cariossidi integre (A 1, A 2) e da cariossidi private, a germinazione avvenuta in parte delle riserve -  
[cariossidi messe a germinare il 21-XII-55; trasportate in coltura acquosa (l. di Knop) e asportate in B 1 e B 2 le riserve il 31-XII-55; fotografate il 7-II-56].



ci hanno confermato che il metabolismo della pianta risulta profondamente turbato manifestandosi un notevole ritardo nell'accrescimento.

Tale ritardo accompagna la pianta per tutto il periodo vegetativo con conseguente minore resa di massa e di prodotto. Non è dimostrata, ma è probabile, una diminuita resistenza alle malattie parassitarie.

Allevando piantine, private nel periodo post-germinativo delle riserve residue, in soluzioni contenenti oltre ai sali minerali quantità varie di carboidrati solubili (glucosio; saccarosio) o insolubili (amido di frumento da cariossidi germinate o non germinate) nessun maggiore incremento si è notato, rispetto ai controlli, capace di far pensare che le piccole quantità di materiali asportati potessero essere sostituite da materiali solubili corrispondenti.

D'altra parte, somministrando a piantine sempre allevate in difetto di riserve estratti di ghiandole animali a secrezione interna nessun vantaggio esse hanno dimostrato di risentirne. Estratto di testicolo, ipofisi, tiroide, hanno tutti ostacolato, gli ultimi più del primo, lo sviluppo specialmente radicale. E ciò in armonia a quanto è noto sull'azione di tali composti sulle piante normali. E così pure nessun sensibile vantaggio le piantine hanno dimostrato in seguito alla somministrazione di estratti integrali di embrioni di coniglio o di «ceche» in veicolo glicerico o cloridopeptico. Tuttavia, nella discriminazione degli effetti conseguenti all'aggiunta di tali ultimi composti deve essere tenuta presente l'azione del liquido vettore interferente, a seconda delle concentrazioni, negativamente.

Tentativi fatti per mettere in evidenza in modo diretto, seguendo il metodo di Went, le supposte sostanze di accrescimento contenute nelle cariossidi non sono riusciti. Queste ultime ricerche se avessero dato risultati positivi avrebbero avuto certamente grande valore per la dimostrazione della tesi prospettata; ma non la infirmano poichè non è dimostrato che le sostanze di natura ormonica agiscano sempre (come è d'uopo di farle agire seguendo la tecnica di Went) al di fuori della loro naturale sede di elaborazione ed evoluzione.

**Patologia.** — *Ricerche sulla glicolisi della retina.* Nota di L. CALIFANO, presentata dal Socio P. RONDONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## Commemorazione del Socio Pietro Romualdo Pirotta

letta dal Corrisp. E. CARANO nella seduta del 3 gennaio 1937.

Ringrazio l'illustre Presidente della nostra Classe di avermi concesso l'onore di commemorare in questa gloriosa Accademia S. E. Pietro Romualdo Pirotta; compito non semplice, che io ho accolto come un sacro dovere per rendere un tributo di affetto al mio compianto amatissimo Maestro, alla cui esistenza fu legata buona parte della mia. Lo conobbi nel pieno possesso delle sue forze il 9 novembre 1898 quando, giovanetto, ascoltai ed ammirai la sua prima lezione nel corso di Botanica; l'ho visto spegnersi serenamente il 3 agosto 1936.

Egli nacque a Pavia il 7 febbraio del 1853 e nella sua città frequentò le scuole di vario grado, laureandosi con pieni voti in Storia Naturale il 29 luglio 1875. I genitori, privi affatto di censo, poterono soltanto badare alla sua sana educazione morale; ai mezzi per studiare il Nostro dovette provvedere da sè dando ripetizioni, ottenendo premi, borse di studio, dispensa dalle tasse e conseguendo nel 1872, ancora prima di laurearsi, un posto di aspirante e in seguito di assistente nel Laboratorio crittogamico annesso all'Istituto di Botanica di Pavia, posto che conservò con lievi interruzioni per vari anni.

Nominato col 16 ottobre 1877 professore di Storia Naturale nel R. Liceo di Pistoia, aveva appena raggiunto la sede che il 25 dello stesso mese rassegnò al Ministero le sue dimissioni, per ritornare a Pavia, attratto irresistibilmente dalla vita fattiva del laboratorio, nel quale, compiuti i primi lavori sotto la guida di Santo Garovaglio, aveva cominciato a gustare tutto il fascino della ricerca scientifica. Ormai la sua mente veniva orientandosi verso la Botanica, sebbene contemporaneamente occupasse il posto di assistente nel Museo di Zoologia dove, con molto zelo ma non con uguale trasporto, attendeva alle mansioni affidategli dal direttore Pietro Pavesi. Senza mezzi di fortuna e per giunta rimasto orfano di entrambi i genitori, egli, il maggiore, doveva provvedere per sè e per i fratelli più giovani, anch'essi avviati allo studio; quindi era per Lui giocoforza sobbarcarsi ad un immane lavoro. Ma la robusta tempra ed il carattere fortemente volitivo del giovane Pirotta non lasciavano adito allo scoraggiamento; e, se le ristrettezze economiche lo obbligavano a lavorare in modo intenso, lo sorreggeva la fede nell'avvenire.

Nel 1879 concorre e vince un premio di perfezionamento all'estero e va a Strasburgo da Antonio De Bary, valoroso botanico, allora in grande



fama specie per i suoi studi sulla riproduzione e sulla metagenesi dei funghi. Sotto la guida di un così abile maestro Egli approfondisce la sua cultura in crittogamia, per la quale aveva chiesto il perfezionamento; ma nello stesso tempo, frequentando oltre al laboratorio le lezioni del De Bary e del suo valente allievo Ernesto Stahl, fissa la sua attenzione sopra argomenti fondamentali di morfologia e di fisiologia vegetale, che poi in Italia imprenderà a trattare da solo o insieme con i suoi scolari. Fortunata coincidenza: in quel laboratorio straniero Egli fa la conoscenza con un altro praticante italiano, volenteroso e intelligente come Lui, Oreste Mattiolo, del quale diventa e rimane amico sincero ed affezionato per tutto il resto della sua vita; bello, ma raro esempio di amicizia fra due studiosi, che dura senza mai il più tenue offuscamento per circa un sessantennio.

L'entusiasmo e il fervore di propositi concepiti all'estero si attenuano quando il Nostro, tornato in patria nell'agosto del 1880, si vede di nuovo di fronte alla necessità di avviarsi per l'insegnamento medio. Egli accetta la destinazione d'Ivrea per chiedere, appena dopo un mese, sempre nelle ferie estive del 1880, il passaggio al Liceo di Alessandria. Io ignoro se il Pirotta abbia iniziato il tirocinio d'insegnante medio in quel liceo, perchè da Pistoia, come ho detto, venne via dopo aver tenuto gli esami di ottobre e riprovato molti ripetenti. Certo è che sulla fine di quell'anno 1880, faticoso per il suo avvenire, Egli vince il concorso per le cattedre vacanti di Botanica dell'Università di Sassari e di Modena ed opta per quest'ultima.

La data del 16 dicembre 1880 segna l'inizio della carriera universitaria del Nostro. Ho sentito riferire da un suo discepolo di quei lontani tempi, illustre scienziato anche lui, che la prolusione fu un successo per il giovane insegnante e Gli conquistò la stima dei colleghi e degli scolari.

Durante la residenza di Modena il Pirotta dedicò la sua infaticabile attività non soltanto all'Istituto e all'Orto Botanico, ma anche a quella R. Stazione Sperimentale Agraria, di cui conservò per due anni l'incarico della direzione affidatogli dal Ministero dell'Agricoltura in attesa della nomina del titolare.

Con decreto del 15 settembre 1883, firmato da Guido Baccelli, allora Ministro della Pubblica Istruzione, il Nostro viene chiamato a Roma e qui rimane alla direzione dell'Istituto e dell'Orto Botanico per oltre 45 anni, fino al 31 ottobre 1928, epoca del suo collocamento a riposo. La chiamata a Roma, voluta espressamente dal Baccelli, che in una visita ufficiale all'Università di Modena aveva avvicinato il giovane botanico ed era rimasto impressionato dei suoi modi vivaci e della sua pronta intelligenza, assumeva per il Pirotta un duplice significato, e cioè il riconoscimento ufficiale dei suoi meriti da parte del dotto Ministro e nello stesso tempo l'impegno di fondare a Roma un Istituto e un Orto Botanico che fossero veramente degni della nuova Capitale d'Italia; giacchè un modesto istituto già era stato improvvisato dopo il '70 in alcuni poco salubri locali tolti ai frati di S. Lo-

renzo in Panisperna e un Orto non meno modesto era sorto in una striscia di terra compresa fra il viale degli Istituti di Chimica e di Fisica e le abitazioni di via Palermo. Come il Nostro corrispondesse alla fiducia del per-spicace Ministro stanno a dimostrarlo l'Istituto Botanico di via Milano, uno dei più belli e meglio attrezzati della nostra Università, prima, naturalmente, che sorgessero quelli recentissimi della Città Universitaria, e l'Orto Botanico della Lungara, sorto, ben si può dire, da uno sterpaio, ove rimanevano rare vestigia dell'antico splendore di Villa Corsini, e trasformato, come voi tutti ammirate salendo lo scalone di questo palazzo, in uno dei più bei parchi della città e in uno dei più ricchi Orti Botanici d'Italia, fornito di rari esemplari e di varie interessanti collezioni di piante. Chi è consapevole delle lungaggini e degli ostacoli di ogni sorta, specialmente burocratici, che s'incontrano in simili imprese, può facilmente comprendere gli sforzi che il Nostro dovette sostenere per superarli; basti dire che l'Istituto, iniziato nel 1887, fu completo, con la biblioteca e l'aula delle lezioni, soltanto nove anni dopo, nel 1896.

Pirotta ebbe versatilità d'ingegno e profonda cultura, doti entrambe che si riflettono nella sua produzione scientifica varia ed interessante.

Durante gli anni del suo assistentato nel Laboratorio crittogamico di Pavia, seguendo l'indirizzo del Garovaglio, valente micetologo, Egli si occupò di patologia vegetale, in particolar modo delle malattie della vite, pianta di una straordinaria importanza economica per tutte le regioni d'Italia, ed a questo argomento portò un notevole contributo. A Lui spetta il merito (Egli invece più giustamente scrive <sup>(1)</sup> « la poco invidiabile sorte ») di avere per il primo svelata la presenza in Italia della peronospora, il nemico più terribile, dopo la fillossera, della viticoltura, che, importata dall'America in Europa, veniva scoperta nel 1878 in Francia e nell'ottobre del 1879 dal Nostro in un vivaio del comune di Santa Giulietta presso Voghera. L'anno successivo la peronospora aveva invasa tutta l'Italia, con quale danno dell'economia nazionale è a tutti noto.

Le ricerche micetologiche del Pirotta ebbero da principio un'importanza prevalentemente descrittiva; ma dopo il soggiorno a Strasburgo furono rivolte soprattutto allo studio del ciclo biologico del parassita ed alla riproduzione sperimentale della malattia; ed i risultati ottenuti col nuovo indirizzo furono davvero molto importanti. Citerò fra i lavori più notevoli nel campo della crittogamia quelli sulla peronospora della vite, sul mal nero o mal dello spacco, sulla ruggine delle malve, sullo sviluppo della *Peziza Fockeliana*, sulla struttura e germinazione del *Sorosporium primulicola* ed infine la Memoria di grande mole sui funghi parassiti dei vitigni, la più completa

(1) R. PIROTTA, *La peronospora viticola*. Relazione al Congresso per le malattie della vite tenutosi in Milano nel settembre 1881.

che fosse stata fino allora pubblicata, in cui sono illustrate con diagnosi latine molto accurate oltre cento specie di funghi, fra le quali alcune nuove.

L'indole dei lavori del Pirotta mutò quasi radicalmente quando Egli, giovane di soli trent'anni, venne a Roma a dirigere un Istituto che, se da principio fu modesto nei suoi ambienti, accolse subito una schiera di giovani d'ingegno (molti dei quali sono oggi professori, alcuni perfino in ritiro ed altri morti), attratti a frequentare il Laboratorio di botanica dallo spirito esuberante e dalle impeccabili lezioni del loro Maestro. Si trattava di avviare questi allievi, di pochi anni soltanto più giovani di Lui, alla ricerca scientifica, guidandoli secondo le loro naturali attitudini nei vari campi della botanica; compito tutt'altro che facile, che Egli però seppe affrontare con la sua abituale energia, compiendo da solo o in collaborazione, ora con l'uno ora con l'altro di codesti scolari, ricerche di morfologia soprattutto, ma anche di fisiologia, di floristica e di sistematica, di storia della botanica. Basta sfogliare i primi volumi dell'*Annuario del R. Istituto Botanico di Roma*, da Lui fondato nel 1884, pochi mesi dopo il suo insediamento in Roma, per ammirarvi tutta una raccolta di bellissime e ragguardevoli memorie, condotte con una perizia tecnica fino allora sconosciuta alla maggioranza dei laboratori italiani. Molti anni dopo, nel 1903, Egli sospendeva al 10° volume l'*Annuario* per iniziare a sue spese la pubblicazione degli *Annali di Botanica* che, portata da Lui fino al 17° volume, è stata poi continuata dal suo successore.

Fra i lavori di morfologia del Nostro molti ve ne sono meritevoli di una speciale menzione. Ricorderò anzitutto il complesso degli studi sulle Oleacee, iniziati nel 1884 con una Memoria sopra la costituzione e lo sviluppo delle varie parti (tegumento, endosperma ed embrione) nonchè sulla natura delle riserve del seme di molte specie appartenenti a detta famiglia, seguita a breve intervallo da un'altra sopra l'anatomia delle foglie delle stesse piante e da una terza sul seme delle Gelsominee, nella quale è affermata l'esistenza anche nelle specie di questo gruppo di un endosperma, negata invece da autori precedenti, che fondavano appunto su questo carattere della presenza o dell'assenza dell'endosperma una delle differenze essenziali per distinguere le Oleacee dalle Jasminacee. In un gruppo di note, pubblicate molti anni più tardi da solo o insieme con Domenico De Pergola, intorno alla distribuzione dei sessi nei fiori dell'olatro (*Phillyrea media*) e dell'olivo domestico (*Olea sativa*) è dimostrato il notevole polimorfismo di queste piante per aborto graduale del pistillo nei fiori cosiddetti staminiferi ed è affacciata l'ipotesi dell'esistenza, in alcune varietà di olivo, di una partenocarpia eventuale.

Ricorderò inoltre le ricerche anatomo-istologiche sopra le specie dei generi *Hypoxis* e *Curculigo*, che Pirotta giustamente propone siano riunite in una famiglia a parte, quella delle *Hypoxidaceae*, affine alla famiglia delle *Amaryllidaceae*, ma da questa distinta per un carattere istologico molto im-



portante, la presenza costante di canali mucipari di origine schizogenetica nel rizoma e nelle guaine fogliari.

Un altro gruppo di lavori illustra la morfologia esterna ed interna della pianta adulta e lo sviluppo della piantina della *Keteleeria Fortunei* (Murr.) Carr., una rara conifera originaria della China, coltivata in Europa in un numero scarsissimo di individui, il maggiore dei quali viene indicato per l'Italia e precisamente per la villa dei Fratelli Rovelli di Pallanza, donde provenne il materiale di studio per le ricerche in parola. Molti autori ammettevano che si trattasse di un *Abies* anzichè di una specie per la quale il Carrière aveva fondato il nuovo genere *Keteleeria*. Il Nostro, avendo avuto l'opportunità di esaminare per il primo i fiori staminiferi di questa pianta e il loro particolare aggruppamento all'estremità dei rami, essenzialmente diverso da quello di *Abies*, aggiunge questo carattere a quelli già indicati dal Carrière per tenere i due generi distinti. Ma un'altra caratteristica differenziale ancora più importante Egli rileva dalla struttura e dalla germinazione del seme e cioè che l'embrione è difillo anzichè polifillo e che le foglie embrionali durante lo sviluppo della piantina sono ipogee anzichè epigee, come nelle altre Abietacee, differenze sostanziali che inducono il Nostro a ritenere il genere *Keteleeria* molto più antico degli altri delle Abietacee.

Altrettanto pregevoli sono le osservazioni fatte dal Pirotta insieme, come ho accennato, con gli scolari o con altri frequentatori del laboratorio. Col compianto Dott. Augusto Albini, ben noto chimico-farmacista romano, studiò lo sviluppo del tartufo giallo (*Terfezia Leonis*), frequente nelle macchie sabbiose delle coste mediterranee, e i suoi rapporti simbiotici con le radici dell'Eliantemo. In collaborazione con Luigi Buscalioni si occupò di un fenomeno altrettanto interessante quanto raro, ossia della plurinuclearità che si determina nelle cellule o articoli delle trachee, in via di formazione, del caule e delle radici di alcune Dioscoreacee. Con lo stesso Buscalioni dapprima e poi da solo studiò lo sviluppo e la differenziazione degli elementi vascolari nelle radici delle Monocotiledoni, giungendo alla conclusione che i primi elementi che si differenziano sono quelli centrali, poi a mano a mano quelli periferici, laddove la lignificazione procede in senso opposto, interessando prima gli elementi periferici, poi quelli centrali. Con Biagio Longo eseguì varie ricerche su una strana pianta parassita, il *Cynomorium coccineum*, vivente a spese delle radici di alofite delle coste mediterranee, ricerche che rimarranno classiche nella letteratura della embriologia vegetale, soprattutto nei riguardi del percorso del tubo pollinico attraverso i tessuti dell'ovulo.

Anche nel campo della fisiologia vegetale il Nostro ha lasciato traccia della sua operosità. Nel 1879 Egli intraprese suo insieme col collega G. Riboni del Laboratorio crittogamico di Pavia studi di chimica fisiologica sul latte e sulle sue modificazioni per opera di batteri e di funghi vari, fermando l'attenzione specialmente sulla fermentazione lattica, sulla coagulazione spon-



tanea e sulla fermentazione alcoolica e individuando con molta esattezza gli agenti di questi processi. Se si tien conto che queste ricerche rimontano a circa 60 anni addietro, si rimane ammirati delle precise affermazioni fornite nelle conclusioni: l'agente della fermentazione lattica è un batterio del gruppo dei cocchi; quello della fermentazione alcoolica è un lievito, cui il Pirotta assegna il nome di *Saccharomyces galacticola*; la coagulazione spontanea si deve esclusivamente alla formazione dell'acido lattico, quindi è un effetto indiretto della vita del fermento lattico; non esiste nessun nesso genetico fra fermento lattico, fermento alcoolico e le muffe *Oidium lactis*, *Penicillium glaucum*, specie di *Mucor*, che comunemente si riscontrano nel latte abbandonato a sè; queste essenze fungine sono assolutamente indipendenti l'una dall'altra, benchè spesso associate. Quest'ultima affermazione, che oggi potrebbe sembrare alquanto banale, non lo era affatto allora, quando gli autori erano propensi ad ammettere uno straordinario polimorfismo in questi organismi.

Un'altra questione che il Nostro imprese a trattare, associandosi nel lavoro un diletto suo scolaro, passato anch'egli da circa un anno nel numero dei più, il conte Luigi Marcatili, fu il significato dei vasi laticiferi nelle piante, questione oltremodo controversa e tuttora non risolta. Si sostiene anche oggi in trattati di prim'ordine, attribuendo al lattice un significato teleologico, che questo liquido serva, alle piante che ne sono fornite, per rimarginare le ferite e, perchè è spesso ricco di principî attivi, contro l'eventualità del morso degli animali. Pirotta e Marcatili invece, partendo dallo studio accurato dei rapporti anatomici che i laticiferi stabiliscono da una parte con i clorenchimi organicatori delle foglie e dall'altra col sistema vascolare, ed estendendo le ricerche ad un numero considerevole di piante, concludono, a conferma di una ipotesi emessa precedentemente dal Haberlandt, che i laticiferi hanno una funzione di trasporto. Fra le varie obiezioni sollevate contro questa ipotesi, si sostiene, in base ai risultati delle analisi chimiche, che sulle sostanze plastiche prevalgono di gran lunga i prodotti escrementizi nel contenuto di vari latici. Comunque, l'argomento è ben lontano dall'essere definito e l'idea del trasporto si presenta per lo meno come più logica.

Per quanto riguarda la fisiologia florale il Pirotta si è interessato per alcuni anni del fenomeno della cleistogamia in dipendenza dei fattori ambientali, specialmente luce e calore, ed è riuscito, oltre che ad osservarla in natura, a indurla sperimentalmente in alcune piante.

Insieme con Michele Puglisi fece per circa un decennio numerose esperienze colturali di forme mostruose per studiarne la ereditarietà, ed ottenne risultati molto importanti soprattutto nella fasciazione di *Bunias orientalis*, che, comparsa nel 1905 in forme modeste nella infiorescenza di un individuo, assunse proporzioni qualitativamente e quantitativamente rilevanti nelle generazioni successive.

L'alta competenza del Pirotta nella fisiologia vegetale si rileva dal trattato che Egli pubblicò per la *Nuova Enciclopedia Agraria Italiana* edita dalla U. T. E. T. Chi esamina questo testo non sa se più ammirare l'ampiezza della trattazione dei singoli capitoli, la lucidità dell'esposizione, anche negli argomenti più difficili, o infine la ricchezza dell'esemplificazione, che ne rende la lettura quanto mai piana e attraente.

Pirotta fu soprattutto uno studioso di laboratorio; tuttavia amò molto la scienza fatta nella libera natura e fin negli ultimi anni del suo insegnamento organizzava gite che compiva volentieri in compagnia degli assistenti e degli scolari. Perciò non rimase affatto estraneo alle attrattive della floristica. Nei primi anni della sua carriera compilò insieme col suo grande amico Giuseppe Gibelli la *Flora del Modenese e del Reggiano*. Venuto a Roma, esplorò diligentemente la regione del Lazio e le località finitime dell'Abruzzo e della Campania, raccogliendo con i suoi allievi abbondanti materiali che, insieme con quelli già esistenti nell'Istituto ed altri offerti o acquistati da privati raccoglitori, furono da Lui ordinati in una distinta collezione sotto il nome di *Erbario Romano*. In questa collezione figurano parecchie specie indicate da Lui come nuove per la regione. Nè minore fu il suo trasporto per le collezioni di piante esotiche, che Egli riuscì a fare affluire all'Istituto sia mediante le sue numerose conoscenze, sia favorendo spedizioni scientifiche o facilitando col concorso di Enti morali, viaggi ai suoi stessi allievi e dipendenti, sia infine mediante scambi di materiali avviati con altri Istituti Botanici. Un cenno particolare merita la collezione che sotto il nome di *Erbario Coloniale* il Nostro volle istituire con materiali provenienti dall'Africa orientale, ma specialmente dall'Eritrea, dalla Somalia e dall'Abissinia, da quella vasta regione insomma che per il valore dei nostri soldati oggi è saldamente assicurata all'Italia. Sarei per dire che il Nostro, presago dell'importanza che quelle terre avrebbero avuto un giorno per la nostra Patria, ne avesse voluto anzitempo studiare la ricca ed interessante vegetazione, illustrandola con un numero considerevole di contribuzioni sia personali, sia di suoi collaboratori (fra i quali ricorderò Carlo Avetta, Achille Terracciano, Ugo Brizi, Emilio Chiovenda, Fabrizio Cortesi, Riccarda Almagià, Beatrice Armari, Ernesta Di Capua, Eva Boselli), contribuzioni che figurano in parte nell'*Annuario dell'Istituto Botanico* e in parte in una pubblicazione molto pregevole, la *Flora della Colonia Eritrea*.

Il Nostro partecipò anche alla illustrazione del materiale proveniente dalle spedizioni di S. A. R. il Duca degli Abruzzi al Ruwenzori e al Caracorum con lo studio delle Felci e delle Gimnosperme, per i quali gruppi aveva una particolare competenza.

Non potrei terminare questa rapida rassegna della produzione del Nostro nel campo della floristica senza accennare, fra le molte specie nuove da Lui descritte, alla ben nota *Mimosa Spegazzinii*, elegante arbusto originario dell'Argentina e coltivato ormai in tutti gli Orti Botanici del mondo, che per

la grande sensibilità delle sue foglie ha quasi soppiantato nelle esperienze di laboratorio la *M. pudica*.

Un altro argomento del quale il Pirotta si diletto molto furono le ricerche storiche di Botanica, specie quando potevano servire a far conoscere ed apprezzare nostri antichi autori o loro opere, manoscritti, collezioni oppure a rivendicare priorità di osservazioni e scoperte di Italiani. Troppo mi dilungherei se volessi accennare soltanto ad alcuni dei lavori storici del Pirotta. Però commetterei un grave torto alla memoria del Maestro, che tante benemerenze si acquistò verso questa sua amatissima Accademia, se non ricordassi i pazienti e profondi studi che Egli fece sulla storia dei primi Lincei, sulla loro operosità, in particolare del fondatore dell'Accademia, Federico Cesi, che fu un botanico, il più illustre botanico della rinascenza della Storia Naturale, le cui *Tabulae Phytosophicae*, monumento di cultura e di acume scientifico, nessuno avrebbe potuto meglio intendere ed illustrare di uno storico botanico della capacità del Pirotta. Le più belle pagine del Nostro intorno ai Lincei si possono leggere, oltre che nel discorso della seduta solenne del 5 giugno 1904 e nella introduzione alle Tavole del Cesi (ristampate a cura della nostra Accademia nello stesso anno 1904 in una edizione molto corretta e di lusso), nella *Flora romana*, opera pregevole e di grande lena, che iniziata nel 1900 in collaborazione con un altro valente storico, suo discepolo, Emilio Chiovenda, fu arrestata per un complesso di circostanze al secondo fascicolo.

Pirotta non fu soltanto insigne scienziato ma anche valoroso insegnante e maestro. Egli impartì fino al 1924 il corso di Botanica ed al termine di quell'anno fece passaggio come professore di ruolo alla Fisiologia vegetale, materia che Egli aveva già tenuta per incarico, quasi ininterrottamente, fin dall'anno accademico 1884-85. Forbito nella forma, chiaro nella esposizione, composto nei gesti, Egli impersonava l'ideale del professore universitario e dettava lezioni veramente perfette, frequentate da una numerosa scolaresca, e spesso anche da colleghi che, di passaggio da Roma o ivi trattenuti da qualche impegno, si procuravano il piacere di venire ad ascoltarlo, confondendosi fra gli scolari.

Anche la colta nostra Regina Margherita, che tanto s'interessava ai progressi della scienza, volle onorarLo, assistendo ad un breve ciclo di conferenze sopra le questioni più attuali di biologia vegetale.

Sebbene molto colto, Egli rifuggì sempre dal dare ai suoi corsi un indirizzo monografico; volle invece che fossero propedeutici e dessero alle menti ancora impreparate dei giovani scolari un'idea generale, ma molto esatta, di tutta la materia. Il perfezionamento, la specializzazione dovevano, secondo Lui, compiersi in seguito nei laboratori, a contatto più diretto con l'insegnante, coi materiali di studio, con gli apparecchi di ricerca. E infatti



nel laboratorio Egli diventava il maestro che indirizza, discute, interroga e si lascia interrogare, incoraggia i perplessi, modera gli esagerati entusiasmi. E non solo gli scolari, ma anche noi assistenti Lo attendevamo nelle sue visite, quasi quotidiane, perchè ci risolvesse qualche dubbio o sedesse al microscopio per esprimerci sopra qualche difficile preparato il suo parere. Mai, quando era in laboratorio con noi, mostrava impazienza di volere allontanarsi, mai nella discussione voleva imporre la sua opinione; davanti ad un fatto nuovo Egli godeva della nostra intima soddisfazione, ed una sua parola di lode, espressa sempre con dignità, rappresentava per noi la massima ricompensa, il più grande incitamento a perseverare.

Fu di un carattere adamantino, di una onestà e di una rettitudine senza pari, fermo nei propositi, inflessibile nelle sue opinioni, quando erano maturate a lungo nel suo acuto intelletto. Alcune di queste doti, se da una parte Gli crearono un ambiente di simpatie e di estimazione, dall'altra Gli procurarono inimicizie feroci, delle quali non si dolse mai; nè mai, sereno e tranquillo com'era del suo operato, si abbassò a rispondere a qualche attacco villano di suoi vecchi dipendenti.

Devoto cittadino, caldeggiò sempre tutto ciò che poteva tornare ad onore della sua Patria. E così Lo troviamo primo fra i promotori per la fondazione della Società Botanica Italiana, della Società Italiana per il progresso delle Scienze, dell'Istituto Coloniale Italiano, dell'Istituto di Genetica per la cerealicoltura, della Federazione « Pro Montibus » e di molte altre utili istituzioni.

Ammiratore delle bellezze naturali del suo paese, ne desiderò la conservazione e concepì e riuscì a far istituire in mezzo a tante difficoltà, con la cooperazione di altri volenterosi, entusiasti alla sua idea, il Parco Nazionale d'Abruzzo, uno splendido territorio montuoso, appartenente quasi tutto alla regione abruzzese, nel quale ora trovano la loro pace e si moltiplicano animali, minacciati un tempo di distruzione, ed erbe ed esemplari legnosi delle più varie essenze forestali.

Patriota ardente, fu interventista nella grande guerra europea, ed anche nei momenti di esito incerto per le nostre armi ebbe sempre cieca fiducia nella vittoria. Fu fedele fin dall'inizio al Regime, perchè in esso vide la salvezza della nostra Patria dall'anarchia. Lo scorso anno, affranto dagli acciacchi, immobile nella sua poltrona, leggeva con entusiasmo gli episodi della guerra africana. E come fremè quel corpo quasi esamine all'annuncio delle strepitose vittorie dei nostri soldati!

Uno sguardo alla vita domestica del Nostro ce Lo mostra come il modello del padre di famiglia. Nel settembre del 1888 si unì in matrimonio con la sua concittadina Giovanna Scarenzio, nipote dell'illustre Angelo Scarenzio che per tanti anni tenne la cattedra di dermosifilopatia nell'Ateneo



ticinese. Questa nobildonna, di fini sentimenti e di non comune cultura, seppe comprendere il Suo Consorte, circondarlo delle sue premure e ben presto divenne la regina della casa, la consigliera e la confortatrice di quell'Uomo che, rigido, talvolta perfino severo nella direzione dell'Istituto, varcata la soglia del suo appartamento, perdeva la volontà, smetteva il comando, perchè in casa doveva comandare e dirigere lei, Giannina, il suo angelo tutelare. Ad allietare la coppia felice nacquero dopo vari anni di matrimonio due cari bambini, che oggi sono l'avv. Luigi e il dott. Pietro Pirotta ostetrico. Verso questi suoi figlioli il Nostro non riuscì mai, neanche in presenza dei suoi dipendenti, a contenere il suo smisurato amore paterno, e da essi fu colmato di eguale affetto.

Le preclari virtù di cittadino, di scienziato e di maestro procurarono al Nostro altissime onorificenze civili e scientifiche. Fu Cavaliere dell'Ordine civile di Savoia e dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, Grand'Ufficiale dell'Ordine della Corona d'Italia. Appartenne a quasi tutte le Accademie scientifiche italiane ed a molte straniere e nel marzo del 1929 fu fra i primi ad assurgere agli onori dell'Accademia d'Italia.

Alla Sua nobile e cara memoria rivolgiamo, illustri Consoci, il nostro mesto, devoto saluto.

## Commemorazione del Socio Straniero Federico Küstner

fatta dal Corrisp. LUIGI CARNERA nella seduta del 3 gennaio 1937.

Designato a rievocare dinanzi a voi, Eccellenze e Signori, la figura dell'Accademico Federico Küstner, rendo grazie alla Presidenza, che volle così venir incontro ad un desiderio mio vivissimo, non perchè mi sentissi più competente degli altri Colleghi, ma perchè sentendomi allievo della stessa scuola, mi sembrava quasi un dovere da parte mia ricordare qui quello, che è stato forse il maggiore allievo delle scuole di Strassburgo e di Berlino.

Carlo Federico Küstner ebbe i natali a Goerlitz nella Slesia il 22 agosto 1856, ed ivi compì gli studi secondari. Attratto più tardi dalla fama di Winnecke, che già vicedirettore della Specola di Pulkowa stava allora costruendo quella nuova di Strassburgo, fu presso di lui, che fece gli studi universitari, prendendo parte vivissima ai lavori dell'Osservatorio, e conseguendo la laurea dottorale nel 1878, con un lavoro premiato dall'Università, nel quale dedusse il valore del diametro medio lunare dalla discussione di una serie di nove osservazioni di occultazioni delle Pleiadi <sup>(1)</sup>. Già in questo lavoro giovanile troviamo una delle caratteristiche più salienti dello scienziato, che doveva essere forse una delle ragioni della sua grandezza: il profondo senso critico con cui affrontava i problemi, e la sensibilità meravigliosa con la quale discutendo le osservazioni intuiva le più riposte cause di errore. Rimase a Strassburgo fino al 1879, essendo stato chiamato subito dopo dalla fiducia di Foerster, quale assistente alla Specola di Berlino. Auwers aveva allora colà appena finita la serie delle proprie osservazioni meridiane, e Becker stava iniziando quelle per la seconda parte del Catalogo di Berlino, mentre Bamberg, per rendere attuabili le determinazioni fondamentali di posizioni stellari con i metodi ideati dal Foerster, aveva costruito e consegnato il nuovo strumento universale dei passaggi. Non si poteva immaginare un ambiente ed un momento più adatto per sviluppare ulteriormente le innate qualità del giovane astronomo. Come primo incarico ebbe lo studio del nuovo strumento di Bamberg, e determinando con esso la latitudine, sia in primo verticale che in meridiano col metodo di Horrebow, intuì la possibilità di una ricerca di maggior lena diretta a determinare con alto grado di precisione il valore della costante di aberrazione. Ma per intraprenderla mancò allora il tempo, chè Auwers, conosciuto ed apprezzato il valore del giovane, lo volle seco a Punta Arenas per osservare nel 1882 il passaggio

(1) «Nova Acta der Leop. Carol. Akademic.», vol. XL, 1879.

di Venere, e ben si può dire che il maggiore peso di quella stazione gravò proprio sul Küstner. Oltre alle numerose osservazioni eliometriche del Sole e di ammassi stellari, attese pure a quelle delle determinazioni di tempo, di latitudine, e di occultazioni, onde ricavare elementi per la determinazione della longitudine della stazione di osservazione. Di ritorno in Europa, dopo una permanenza di pochi mesi ad Amburgo, ove eseguì una serie di misure di stelle doppie, lo ritroviamo al principio del 1884 nuovamente a Berlino, ma ormai col grado di «*Observator*», e, quale successore di Becker, è a lui che resta affidato il grande cerchio meridiano di Pistor. Appena giunto a Berlino mentre attendeva che Bamberg eseguisse al meridiano alcune piccole, ma essenziali innovazioni, riprese con l'universale dei passaggi le determinazioni di latitudine per ricavare secondo il piano dianzi concepito la costante di aberrazione. Seguendo infatti il metodo di Horrebow è possibile, ove si supponga nota la latitudine, misurare con un grado altissimo di precisione la somma delle declinazioni istantanee delle due stelle osservate, e poichè ripetendo le misure sulla stessa coppia di stelle a distanza di sei mesi circa le declinazioni risultano alterate nei due istanti per effetto dell'aberrazione di quantità sensibili, aventi segni opposti, ben si comprende come il metodo dovesse sembrargli adatto allo scopo.

Scelte pertanto sette coppie di stelle brillanti, onde poterle vedere anche nelle ore crepuscolari, nell'aprile dell'84 iniziò le osservazioni, che continuarono fino alla fine dell'aprile dell'anno seguente. E poichè al solito e durante il lavoro di osservazione, e poscia nella discussione dei risultati nulla venne trascurato, che potesse lasciare traccia di errori, anche minimi, dai disaccordi trovati fu indotto a riconoscenza come erronea l'ipotesi essenziale dell'invariabilità delle latitudini. Partito da elementi su cui credeva potersi ritenere sicuro, avendo considerato e studiato in modo magistrale tutti i possibili errori, di fronte a disaccordi, che si aggiravano su soli  $0''.2$  di secondo, non esitò ad attribuirne la causa alla variabilità delle latitudini, e tale e tanta apparve la fondatezza di quella conclusione, che da allora e da lui si può dire incominciò lo studio effettivo, e la conoscenza del fenomeno della migrazione dei poli. Eppure già nel 1883, il prof. Fergola accennando in una sua relazione alla R. Commissione Geodetica a risultati ottenuti dal prof. Arminio Nobile a Capodimonte, aveva creduto poter concludere come molto probabile la variabilità delle latitudini; e nel 1885 lo stesso Nobile riferendo sui risultati delle ulteriori sue misure, fatte contemporaneamente a quelle del Küstner, riteneva provata « una variazione annua della latitudine intorno ad un valore medio, che potrebbe alla sua volta esser pure variabile ». Sgraziatamente per noi, mentre il Nobile con questa pubblicazione aveva preceduto il Küstner di circa tre anni, i metodi seguiti ed i mezzi usati non erano stati tali da dare quel grado di sicurezza, che si trova nei risultati delle osservazioni di Berlino, e per ciò appunto si attribuisce sempre all'astronomo tedesco il vanto della grande scoperta.

Avuto nel frattempo in consegna il cerchio meridiano iniziò una serie di osservazioni stellari, rivolgendo l'attenzione oltre che alle stelle fondamentali, a gruppi di stelle a forte moto proprio, a stelle utilizzate in osservazioni di occultazioni, ed a quelle incluse nel programma di quella, che fu forse la prima intrapresa scientifica internazionale, alla determinazione cioè della parallasse solare mediante le osservazioni dei piccoli pianeti Iris, Victoria e Saffo. Fu in questa occasione, che egli riuscì a portare il limite della precisione nelle osservazioni ad un limite così alto, da superare di gran lunga ogni altro risultato precedente<sup>(1)</sup>. Non può quindi far meraviglia, se pur avendo soli 35 anni l'Università di Bonn lo volle alla cattedra di astronomia, ed alla direzione di quella Specola, che per merito Argelander e del suo successore Schoenfeld era salita a tanta rinomanza nel mondo scientifico. Giunto nella sua nuova residenza dopo pochi giorni fece aprire le casse contenenti il nuovo cerchio meridiano costruito da Repsold, che giacevano intatte da oltre 12 anni, e constatato il perfetto stato di conservazione dello strumento, prese immediati accordi per la sua installazione, dopo essersi inteso col costruttore per l'introduzione di alcune migliorie. Il 1892 e 1893 trascorsero nell'esecuzione di questi lavori, e nella preparazione del Catalogo stellare tratto dalle osservazioni fatte a Berlino fra il 1886 ed il 1891; ed il 5 maggio del 1894 iniziò al nuovo strumento le osservazioni meridiane per il grande catalogo. A quell'epoca si stava concludendo presso tredici osservatorii diversi la grande opera della « Astronomische Gesellschaft », destinata a dare un catalogo preciso di tutte le stelle comprese fino alla nona grandezza trovantisi nell'emisfero boreale; i quindici cataloghi, essendo riferiti ad un sistema unico di stelle fondamentali, avrebbero dovuto costituire un complesso omogeneo, ma praticamente già si era dimostrato insufficiente l'espedito ideato per il controllo dei raccordi fra zona e zona. Ecco allora che il Küstner ebbe ad iniziare la sua nuova serie di osservazioni meridiane, e fondandosi ancora strettamente sul catalogo fondamentale di Auwers a fissare la posizione di oltre dieci mila stelle, distribuite omogeneamente sulla fascia di cielo, che va dall'equatore a  $51^{\circ}$  di declinazione boreale; e scegliendo stelle di tutte le grandezze fino alla 9.5, ed usando tutte le precauzioni ed accorgimenti possibili per evitare errori sistematici e personali creò il raccordo fra i diversi cataloghi della « A. G. ». Credo sia ben difficile anche solamente immaginare un lavoro più accurato e più magistralmente condotto: il lungo studio, che costituisce la prefazione del Catalogo, comparso nel 1908, dovrebbe essere guida ed esempio per tutti coloro, che desiderano sapere cosa sia, e come si debba fare un catalogo stellare! Nel lavoro di osservazione du-

(1) Nella discussione dei risultati ottenuti con la collaborazione di ben ventitré osservatorii, pubblicata da D. GILL negli « Annali dell'Osservatorio del Capo », Auwers trova che l'errore medio delle posizioni tratte da cinque osservazioni fatte da Küstner è:  $\pm 0''.012$  e  $\pm 0''.06$ , mentre i valori corrispondenti degli altri sono:  $\pm 0''.025$  e  $0''.10$ , onde si hanno i pesi per Küstner 7.2 e 2.9, e per gli altri 1.55 e 0.92.



rato circa cinque anni (fino al giugno 1899), troviamo applicato in modo sistematico il sistema degli schermi di reticelle metalliche anteposti all'obbiettivo, per ridurre tutte le stelle a grandezze apparenti non molto diverse, attenuando od eliminando così l'errore personale dipendente dallo splendore diverso. Troppo lungo, e non di questo momento, sarebbe il mettere in luce tutti i pregi di quel lavoro, ma non so astenermi dal riportare a questo proposito quanto scriveva un'altro grandissimo astronomo, ora purtroppo scomparso, il De Sitter. Egli disse: « dall'unione di una accuratezza infinita con una impareggiabile attività di osservatore, e con un senso critico acutissimo è derivata un'opera magistrale, che sarà di modello a tutti i futuri lavori analoghi, e che non ha alcuna, che possa gareggiare per attendibilità. Ed ogni astronomo sa, che niun elogio sarà mai troppo grande per simile opera » <sup>(1)</sup>.

Intanto mentre attendeva a questo catalogo con infaticabile attività, curava la nuova edizione dell'Atlante della Durchmusterung di Argelander, che corretto apparve nel 1899, anno del centenario della nascita dell'autore, e subito dopo si accinse pure alla ristampa corretta del Catalogo della Durchmusterung (1903); pubblicò le osservazioni sparse ed inedite di stelle variabili dell'Argelander nonchè numerose ricerche proprie fra cui quella sui moti propri di 335 stelle. Nel 1900, avendo rifiutato il posto offertogli di Direttore della Specola di Amburgo, per rimanere nella sua Bonn, ottenne per la Specola un ottimo equatoriale fotografico, ed immediatamente iniziò con questo una serie di nuove ricerche, portando anche nel campo dell'astrofisica lo spirito geniale ed acuto, che aveva fatto di lui uno dei più grandi maestri nelle osservazioni di posizioni stellari. Come primo lavoro eseguì una serie di fotografie di ammassi stellari, onde ricercare e fissare le posizioni relative, e grandezze delle singole stelle, base indispensabile per dedurre poscia la conformazione del complesso, ed i movimenti interni. La cura posta nella preparazione e nell'esecuzione delle fotografie sono paragonabili a quelle usate dianzi nelle osservazioni meridiane, talchè ancora il De Sitter avendo potuto avere due lastre dell'ammasso delle Jadi, esclama: « non ho mai avuto da elaborare lastre, che fossero così perfette sotto ogni punto di vista come quelle ». E mentre attendeva a raccogliere questo materiale prezioso, rimettendo l'elaborazione all'avvenire, si accingeva ad un'altra serie di osservazioni nel campo dell'astrofisica, portando anche nella spettroscopia stellare con la genialità tutta sua propria di vedute, anche lo studio approfondito e minuzioso di tutte le più minute circostanze atte a rilevare o cause di errori o fatti

(1) Credo non inutile riportare a questo proposito i valori degli errori probabili di una osservazione:  $\pm 0^s.023$  e  $\pm 0''.29$ , per le stelle di grandezza superiore alla 9.5, e:  $\pm 0^s.025$  e  $\pm 0''.30$ , per le più deboli; mentre analogamente nelle grandezze stellari la stima è così accurata da trovare un perfetto accordo con i valori della Durchmusterung fotometrica di Potsdam, con deviazione sistematica piccolissima: per le grandezze inferiori alla 6.5, stimandole il Küstner più brillanti di circa 0.05, mentre analogamente stima più deboli di circa altrettanto quelle di grandezza minore alla 6.5.

nuovi. La Memoria pubblicata nell'agosto del 1904, in cui riferisce i primi risultati delle misure di spettrogrammi ottenuti dalle stelle brillanti per dedurre le loro velocità di movimento nella direzione della visuale, rivelano nel modo più brillante le qualità eccelse dell'astronomo, che sapeva nel tempo stesso essere e matematico e fisico, e soprattutto un profondo conoscitore di strumenti, tanto da esser riuscito in quest'occasione a porre in luce gli effetti prodotti in simili ricerche dalla flessione dello spettrografo, effetti che dianzi non erano stati nè notati nè sospettati da alcuno. Non era trascorso poi neppur un anno da quella prima comunicazione, che sorprende il mondo astronomico, indicando un nuovo metodo rigoroso per determinare la parallasse solare basato sulle velocità radiali osservate nelle stelle, e ne dava un primo risultato ottenuto con solo venti spettrogrammi della stella Arturo <sup>(1)</sup>. Per arrivare a quel risultato aveva dovuto approfondire anzitutto lo studio di ciò, che si può ottenere con gli spettrogrammi, e severare le possibili fonti di errori; giunto così a fissare i limiti di attendibilità dei risultati, aveva conclusa l'applicabilità del metodo alla nuova ricerca. Partiva dalla velocità effettiva di traslazione della Terra nel suo movimento intorno al Sole, legata per leggi di meccanica alla distanza media Terra-Sole, e dalla differenza di velocità osservata nella direzione della visuale per la stessa stella a sei mesi di distanza, quando cioè la Terra rispetto alla stella si sposta in direzioni opposte, era giunto a concludere un valore, che si scostava pochissimo da quel tratto in modo laborioso, e sulla base di numerosissime osservazioni, o dai passaggi di Venere, o dalle osservazioni dei piccoli pianeti, e particolarmente di Eros <sup>(2)</sup>.

E non insisterò ancora a ricordare le accurate sue misure di lastre fotografiche degli ammassi stellari, nè a mettere in luce le preziose qualità degli altri numerosi cataloghi stellari; non mi indugiero a parlare delle innumerevoli comunicazioni apparse nei diversi periodici scientifici o per chiarire punti oscuri o per rettificare errori e fare aggiunte alla *Durchmusterung*, o per studiare lo spettro della *Nova Geminorum 2*, in cui riuscì ad identificare la presenza dell'Uranio, del Titanio e dell'Argon, o per determinare la parallasse della seconda *Nova* della costellazione di Perseo <sup>(3)</sup>, o mille altri lavori, ma credo riescirei incompleto in un punto veramente essenziale, se non ricordassi ancora una sua qualità eccelsa. Fu oltre a tutto un grande maestro,

(1) Il metodo era stato intuito genialmente da D. Gill fin dal 1891, che ammirando gli spettrogrammi ottenuti a Potsdam dal Vogel ne aveva visto la possibile applicazione: ma mentre allora la precisione era insufficiente allo scopo, nessuno poi aveva ricordato le parole pronunciate dal Gill in quella sua visita all'Osservatorio di Potsdam.

(2) Il valore allora concluso fu di  $\pi = 8''.844 \pm 0''.017$ , mentre quello più attendibile dedotto nel 1910 da R. R. Hinks, dalla discussione delle numerose osservazioni di Eros è di:  $8''.806 \pm 0''.004$ .

(3) Il valore della parallasse della *Nova Persei*, ricavato da una serie di misure fatte servendosi di fotografie, va considerato come uno dei più precisi ottenuti: egli ottenne  $\pi = + 0''.002 \pm 0''.004$ .

che non solo seppe infondere negli allievi amore alle ricerche, ma che seppe pur ispirare metodi ed indirizzo. Ed ancor oggi, dopo oltre un trentennio, rammento sempre le parole di riconoscente affetto con le quali il compagno di lavoro ed amico mio prof. C. Wirtz ricordava sempre il venerato suo Maestro e tutti gli insegnamenti suoi.

Dieci anni circa or sono, nel 1927, colpito dalla legge sui limiti di età dovette lasciare dopo trentacinque anni il posto di Direttore della Specola universitaria di Bonn, continuando però indefesso ad elaborare il ricco materiale delle sue osservazioni ancora inedite. Pochi mesi or sono aveva compiuto l'ottantesimo anno, senza che nulla facesse temere imminente la scomparsa, invece mentre ancor non era spenta l'eco delle onoranze fatte in quell'occasione mancò il 15 ottobre 1936.

Le numerose Accademie e Società scientifiche, che si erano onorate chiamandolo a far parte di esse, gli amici, i colleghi e gli allievi s'addolorano ora per il vuoto incolmabile da esso lasciato.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Corrispondente CARANO pronuncia un'elevata e commossa commemorazione del Socio ROMUALDO PIROTTA.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia il Socio CARANO per la bella commemorazione pronunciata che ha fatto rivivere per un momento la nobile figura di uomo e di scienziato di ROMUALDO PIROTTA.

Il Corrispondente CARNERA pronuncia una dotta e compiuta commemorazione del Socio Straniero KÜSTNER.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia il Socio CARNERA per la bella commemorazione pronunciata.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta i volumi inviati in omaggio all'Accademia segnalando il « Catalogo metodico degli scritti contenuti nelle Pubblicazioni periodiche italiane e straniere », parte 1<sup>a</sup>, Nuova Serie, vol. IV, pubblicato a cura della Biblioteca della Camera dei Deputati; il « Cours de Mécanique des Fluides » di Joseph Pérès; il « Cours de Cinématique » e gli « Elements de Géometrie Infinitésimale » di Gaston Julia; il volume pubblicato in occasione del giubileo scientifico di Louis Lumière; il volume I, 2<sup>a</sup> edizione del « Trattato di Fisica generale e sperimentale » di E. Perucca.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei Rendiconti i Soci: BORDONI, CHECCHIA-RISPOLI, LEVI-CIVITA, RONDONI, SCORZA, SEVERI.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 3 gennaio 1937*

---

- FANTOLI GAUDENZIO. — L'inaugurazione dell'anno Accademico 1936-37 del R. Politecnico di Milano. Milano, 1937. 8° pp. 1-12.
- JULIA GASTON. — Cours de cinématique, rédigé par J. Dieudonné. Paris, Editeur Gauthier Villars, 1936. 8°, pp. 1-161.
- JULIA GASTON. — Eléments de géométrie infinitésimale, Edition II. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1936. 8°. pp. I-VI, 1-262.
- LUMIÈRE LOUIS. — Jubilé Louis Lumière, 6 novembre 1935. Renaissance Française (Macon), 1936. 4°, pp. 1-121.
- PALLOTTI GIUSEPPE. — Il secondo principio fondamentale dell'Universo: la pressione d'etere. Como, 1936. 8°, pp. 1-19.
- PÈRES JOSEPH. — Cours de mécanique des fluides (fluides parfaits, aile portante, résistance). Avec la collaboration de L. Malavard. Préf. de M. Henri Villat. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1936. 8°, pp. I-VIII. 1-329.
- PERUCCA ELIGIO. — Fisica generale e sperimentale. Vol. I. Meccanica-calore. 2ª ed. Torino, Unione Tipografica-Editrice Torinese, 1937. 8°, pp. I-XVI, 1-719.
- PETROVITCH MICHEL. — Notice sur les travaux scientifiques de M. Michel Petrovitch (1894-1921). Académie R. de Serbie. Paris, Editeurs Gauthier-Villars et C.<sup>ie</sup>. 1922. 8°, pp. I-IX, 1-152.
- SQUASSI FRANCESCO. — I consumi di combustibile dei sistemi di riscaldamento a radiazione rispetto a quelli a convezione negli ambienti di degenza sanatoriali. Roma, 1936. 4°, pp. 1-46.
- TOMITA GUNJI. — Melanophore Reactions to Light during the Early Stages of the Paradise Fish, *Macropodus opercularis*. (Separate print no. 13. The « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section IV. Vol. II, pp. 237-264). Shanghai, 1936. 8°.
- VILLEY JEAN. — Propriétés générales des fluides moteurs. Fasc. XXXIII [du] Mémorial des Sciences Physiques. Paris, 1936. 8°, pp. 1-66.
- WINANTS MARCEL. — Remarque sur une certaine convergence diagonale. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques ». Serie II, t. LX). Paris, 1936. 8°, pp. 1-2.
-



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 17 gennaio 1937 - Anno XV

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Laplace.* Nota di G. SANSONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TONELLI.

1. Un noto teorema di Lebesgue-Hardy <sup>(2)</sup> assicura che la media di Cesaro di ordine  $\delta > 0$  della serie trigonometrica di Fourier di una funzione sommabile  $f(x)$  converge quasi ovunque verso  $f(x)$ . Passando dalle serie trigonometriche alle serie di Laplace, alla luce di una supposizione di E. Kogbetliantz <sup>(3)</sup> secondo la quale le medie di Cesaro d'ordine  $\delta + 1, 2$  delle serie di Laplace godono le proprietà delle medie d'ordine  $\delta$  delle serie trigonometriche, dovrà presumersi la validità del teorema: *La somma  $(C, \kappa)$ ,  $\kappa > 1/2$ , della serie di Laplace di una funzione sommabile  $f(P)$  [nel senso di Lebesgue] converge quasi ovunque verso  $f(P)$ .*

Nell'importantissimo lavoro di L. Fejér <sup>(4)</sup> sulla sommazione della serie di Laplace una tale proposizione non risulta enunciata, nè è a conoscenza dell'A. che essa risulti osservata per la sommazione più potente di Abel-

(1) Nella seduta del 17 gennaio 1937.

(2) Per le somme  $(C, 1)$  [LEBESGUE] cfr. L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. (Bologna, 1928), p. 175; per le somme  $(C, \delta)$ ,  $\delta > 0$  [HARDY] cfr. A. ZYGMUND, *Trigonometrical Series*. (Warszawa, 1935), p. 49.

(3) E. KOGBETLIANTZ, *Recherches sur la sommabilité des séries ultrasphériques par la méthode des moyennes arithmétiques*. « Journ. de Liouville » (9), III (1924) (pp. 107-187), p. 109.

(4) L. FEJÉR, *Ueber die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel*. « Math. Zeitschrift », 24 (1925), pp. 267-284; oppure E. W. HOBSON, *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics*. (Cambridge, 1931), pp. 347-359.

Poisson, perciò lo scopo di questa Nota è di provare l'indicata proposizione [cfr. n. 6] e di estenderne la validità alle medie di ordine  $\kappa > 0$ , quando ci si riferisca a funzioni di quadrato sommabile [cfr. n. 4].

§ 1.

2. a) Sia  $\omega$  una superficie sferica di raggio 1 e col simbolo  $C(P, \varepsilon)$  indichiamo la calotta sferica di  $\omega$  di centro  $P$  e raggio sferico  $\varepsilon$ . Se  $f(P)$  è una funzione definita in ogni punto  $P$  di  $\omega$  e sommabile nel senso di Lebesgue, vale quasi ovunque su  $\omega$  la relazione

$$(2.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } C(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} f(Q) d\omega(Q) = f(P),$$

ove  $d\omega(Q)$  indica l'elemento d'area della superficie  $\omega$ .

Si consideri infatti la proiezione di Lambert della sfera  $\omega$  sul cilindro circoscritto lungo un cerchio massimo avente i poli nei punti  $A$  e  $A^*$  e si stenda il cilindro su un piano; tale proiezione conserva le aree e in particolare ad un insieme di misura nulla corrisponde un insieme di misura nulla. Se  $Q \equiv (\theta, \varphi)$  è un punto della sfera di longitudine  $\theta$  e di colatitudine polare  $\varphi$  rispetto ad un sistema sferico di riferimento con origine in  $A$ , e  $Q' \equiv (x, y)$  è il corrispondente punto del piano rispetto ad un sistema cartesiano  $x, y$ , con un'opportuna scelta di assi si avrà

$$(2.2) \quad x = \theta, \quad y = \cos \varphi$$

e se alla calotta  $C(P, \varepsilon)$  corrisponde il campo piano  $F$  abbiamo

$$(2.3) \quad \frac{1}{\text{area } C(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} f(Q) d\omega = \frac{1}{\text{area } F} \iint_F f(Q') dx dy \quad [f(Q') = f(P)]$$

e perciò in luogo della (2.1) basterà provare

$$(2.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } F} \iint_F f(Q') dx dy = f(P).$$

Osserviamo che escluso il caso che  $P$  coincida con  $A$  o con  $A^*$  la famiglia dei campi  $F$  è regolare, cioè il rapporto

$$\text{area minimo quadrato contenente } F / \text{area } F$$

è superiormente limitato quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .



Se infatti  $(\theta', \varphi')$  sono le coordinate sferiche di P  $\left[0 < \varphi' \leq \frac{\pi}{2}\right]$ , e  $2\omega \left[0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right]$  è l'angolo delle tangenti sferiche condotte da A al cerchio della sfera  $\omega$  di centro P e raggio sferico  $\varepsilon$ , la figura F è tutta contenuta nel rettangolo R avente due lati di equazione

$$x = \theta' - \omega \quad , \quad x = \theta' + \omega$$

e gli altri due di equazione

$$y = \cos(\varphi' + \varepsilon) \quad , \quad y = \cos(\varphi' - \varepsilon).$$

L'area del minimo quadrato contenente F è minore dell'area del quadrato Q costruito sulla diagonale di R, abbiamo quindi

$$\begin{aligned} \frac{\text{ar. min. quadrato cont. F}}{\text{ar. F}} &< \frac{\text{ar. Q}}{\text{ar. C}(P, \varepsilon)} = \\ &= \frac{4\omega^2 + [\cos(\varphi' - \varepsilon) - \cos(\varphi' + \varepsilon)]^2}{4\pi \sin^2(\varepsilon/2)} = \frac{\omega^2 + \sin^2 \varphi' \sin^2 \varepsilon}{\pi \sin^2(\varepsilon/2)}, \end{aligned}$$

ma è  $\sin \omega = \sin \varepsilon / \sin \varphi'$  ,  $\omega \leq \frac{\pi}{2} \sin \omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \varphi'} \sin \varepsilon$ , e perciò il rapporto considerato è minore di

$$\left[ \frac{\pi^2}{4} \frac{1}{\sin^2 \varphi'} + \sin^2 \varphi' \right] \frac{\sin^2 \varepsilon}{\pi \sin^2(\varepsilon/2)} < \frac{\pi}{4} \frac{1}{\sin^2 \varphi'} + \frac{4}{\pi} \sin^2 \varphi'.$$

Poichè la famiglia F è regolare, da un teorema di Lebesgue<sup>(1)</sup> abbiamo che, eccettuato al più un insieme di punti P di  $\omega$  di misura nulla, sussiste la (2.4) o ciò che è lo stesso la (2.1) c. v. d.

b) Se esiste il limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area C}(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} f(Q) d\omega = A$$

diremo che A è la *media areale* di f nel punto P di  $\omega$ <sup>(2)</sup>; abbiamo allora: se f(P) è sommabile su  $\omega$ , la sua media areale vale quasi ovunque f(P).

3. Vogliamo trarre un'immediata conseguenza dalla proposizione dimostrata.

(1) Cfr., ad es., CH. DE LA VALLÉE-POUSSIN, *Intégrales de Lebesgue...* (Paris, 1916), pp. 59, 72.

(2) Alcuni Autori [cfr., ad es., M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore*, p. 213 (in corso di pubblicazione)] usano la locuzione *media asintotica*.

Sia  $f(P)$  sommabile sulla sfera  $\omega$  e sia  $\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(P)$  la sua serie di Laplace, si abbia cioè

$$(3.1) \quad f(P) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(P)$$

con

$$(3.2) \quad Y_n(P) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{\omega} f(Q) P_n[\cos \gamma(P, Q)] d\omega$$

dove  $\gamma(P, Q)$  indica la distanza sferica compresa tra  $o$  e  $\pi$  tra il punto  $P$  e il punto  $Q$ , e  $P_n$  è l'*n*esimo polinomio di Legendre.

Per  $0 < \rho < 1$  vale la formula

$$(3.2) \quad u(\rho, P) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} f(Q) \frac{(1-\rho^2) d\omega}{[1-2\rho \cos \gamma(P, Q) + \rho^2]^{3/2}}$$

e sussiste la limitazione

$$(3.4) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } C(P, \epsilon)} \int_{C(P, \epsilon)} f(Q) d\omega \leq \lim_{\rho \rightarrow 1-0} u(\rho, P) \leq \\ \leq \overline{\lim}_{\rho \rightarrow 1-0} u(\rho, P) \leq \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{area } C(P, \epsilon)} \int_{C(P, \epsilon)} f(Q) d\omega^{(1)}.$$

In virtù della (2.1) si ha da quest'ultima quasi dappertutto su  $\omega$

$$(3.5) \quad \lim_{\rho \rightarrow 1-0} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n Y_n(P) = f(P)$$

cioè vale il teorema:

*La somma di Abel-Poisson della serie di Laplace di una funzione sommabile  $f(P)$  converge quasi ovunque verso  $f(P)$  <sup>(2)</sup>.*

4. Supponiamo in particolare che  $f(P)$  sia sommabile insieme al suo quadrato su  $\omega$ ; siccome la serie (3.1) è sommabile col procedimento di *Abel-Poisson*, per un teorema di S. Kaczmarz e A. Zygmund <sup>(3)</sup> essa risulta sommabile  $(C, x)$ ,  $x > 0$ , quasi ovunque su  $\omega$ , abbiamo quindi:

(1) Cfr., ad es., M. PICONE, *Appunti di Analisi superiore* (in corso di pubblicazione), pp. 214, 246.

(2) Abbiamo dedotto questo teorema dalle (3.4) e (2.1), ma esso è anche conseguenza del teorema del n. 6.

(3) Cfr. S. KACZMARZ e A. ZYGMUND, *Theorie der Orthogonalreihen*. (Warszawa, 1935), p. 189; oppure S. KACZMARZ, *Sur la convergence et la sommabilité des développements orthogonaux*. « *Studia Math.* », I (1929), (pp. 87-121), pp. 104-105.

La somma  $(C, \kappa)$ ,  $\kappa > 0$ , della serie di Laplace di una funzione sommabile  $f(P)$  sulla sfera  $\omega$  insieme al suo quadrato, converge quasi ovunque su  $\omega$  verso  $f(P)$ .

§ 2:

5. a) Sussiste il teorema: Se  $f(P)$  è sommabile su  $\omega$  e se  $c$  è una costante qualunque, eccettuato al più un insieme  $I$  di punti  $P$  di misura nulla e indipendente dalla costante  $c$ , per ogni punto di  $\omega - I$  si ha

$$(5.1) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\text{area } C(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} |f(Q) - c| d\omega = |f(P) - c|.$$

Per la dimostrazione basterà tener conto della (2.1) e ripetere i ragionamenti del corrispondente teorema di Lebesgue per le funzioni sommabili di una variabile reale (1).

6. Sia  $P$  un punto di  $\omega - I$  e si faccia  $c = f(P)$  nella (5.1), si ha

$$(5.2) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\text{area } C(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} |f(Q) - f(P)| d\omega = 0.$$

Indichiamo con  $I^*$  l'insieme dei punti della sfera  $\omega$  diametralmente opposti dei punti di  $I$ ;  $I + I^*$  è anch'esso un insieme di misura nulla e in  $\omega - (I + I^*)$  sussistono simultaneamente la (5.2) e la relazione

$$(5.3) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\text{area } C(P^*, \varepsilon)} \iint_{C(P^*, \varepsilon)} |f(Q) - f(P^*)| d\omega = 0.$$

Chiamando una costante  $A$  media areale assoluta di  $f$  nel punto  $P$  di  $\omega$  quando sia

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{I}{\text{area } C(P, \varepsilon)} \iint_{C(P, \varepsilon)} |f(Q) - A| d\omega = 0$$

abbiamo che se una funzione  $f(P)$  è sommabile su  $\omega$ , eccettuate al più le coppie di punti diametralmente opposti appartenenti ad un insieme di misura nulla, in ogni altra coppia di punti  $P$  e  $P^*$  (diametralmente opposti) la media areale assoluta di  $f$  coincide rispettivamente con  $f(P)$  e  $f(P^*)$ , valgono cioè le (5.2) e (5.3).

6. Possiamo ora dimostrare il teorema: La somma  $(C, \kappa)$ ,  $\kappa > 1/2$ , della serie di Laplace di una funzione sommabile  $f(P)$  converge quasi ovunque verso  $f(P)$ .

(1) Cfr., ad es., L. TONELLI, *Serie trigonometriche*. (Bologna, 1928), p. 174.

Sia

$$(6.1) \quad f(P) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(P)$$

e limitiamoci a considerare le coppie di punti  $P$  e  $P^*$  per i quali si verificano le (5.2) e (5.3).

Riferiamo la sfera  $\omega$  a un sistema di coordinate sferiche  $\theta, \varphi$ , [ $\theta$  longitudine,  $\varphi$  colatitudine polare] con l'origine in  $P$  e indichiamo con  $\sum_n^{(\kappa)}(\varphi)$  la media di ordine  $\kappa$  dei primi  $n$  termini della serie

$$(6.2) \quad P_0(\cos \varphi) + 3 P_1(\cos \varphi) + 5 P_2(\cos \varphi) + \dots;$$

indichiamo infine con  $\sigma_n^{(\kappa)}$  la media di ordine  $\kappa$  della (6.1) nel punto  $P$ ; si ha

$$\sigma_n^{(\kappa)} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sum_n^{(\kappa)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta.$$

Poichè in  $P$  e  $P^*$  sussistono rispettivamente le (5.2) e (5.3) ne viene in virtù di una notevole osservazione di Fejér<sup>(1)</sup> che posto

$$F(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta$$

la funzione  $|F(\varphi)|$  è sommabile in  $(0, \varepsilon)$  e  $(\pi - \varepsilon, \pi)$ , con  $\varepsilon$  positivo arbitrario, e si ha inoltre

$$(6.4) \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\int_0^\varphi |F(\varphi) - f(P)| d\varphi}{\varphi} = 0^{(2)}.$$

Per la dimostrazione di Fejér della Memoria più volte citata si deduce da quest'ultima

$$(6.5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi-\varepsilon} \sum_n^{(\kappa)}(\varphi) \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta = f(P).$$

(1) Cfr. FEJÉR, *Ueber die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel*. « Math. Zeitschrift », 24 (1925), pp. 282-284.

(2) Per la (5.3) si avrebbe anche  $\lim_{\varphi \rightarrow 0} \int_0^\pi |F(\varphi) - f(P^*)| d\varphi / \varphi = 0$ .



D'altra parte per  $1/2 < \kappa \leq 1$  vale la limitazione di Fejér <sup>(1)</sup>

$$\left| \sum_n^{(\kappa)} (\varphi) \right| \leq H \frac{1}{n^{\kappa-1/2}} \frac{1}{\varphi^{1+\kappa} \sqrt{\sin \varphi}}$$

$$(0 < \varphi < \pi; n = 1, 2, \dots, 1/2 < \kappa \leq 1),$$

con  $H$  costante assoluta indipendente da  $n$  e da  $\varphi$ , e perciò

$$\left| \frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \sum_n^{(\kappa)} (\varphi) \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta \right| \leq$$

$$\leq \frac{H}{2} \frac{1}{n^{\kappa-1/2}} \frac{1}{(\pi-\varepsilon)^{1+\kappa}} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} |F(\varphi)| d\varphi$$

e poichè  $\kappa > 1/2$  ne viene

$$(6.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi} \int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} \sum_n^{(\kappa)} (\varphi) \sin \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) d\theta = 0,$$

e sommando le (6.5) e (6.6) si ha infine

$$(6.7) \quad \lim \sigma_n^{(\kappa)} = f(P)$$

per tutti i punti  $P$  per i quali valgono le (5.2) e (5.3), cioè quasi ovunque su  $\omega$ .

La (6.7) varrà a più forte ragione per  $\kappa > 1$  e il teorema è dimostrato

(1) Cfr. L. FEJÉR, *Ueber die Summabilität der Laplaceschen Reihe durch arithmetische Mittel*. « Math. Zeitschrift », 24 (1925), p. 277, form. (29).

**Meccanica.** — *Propagazione del movimento nei fili.* Nota di B. FINZI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. A. MAGGI.

Un filo flessibile ed inestendibile, soggetto soltanto a due forze opposte applicate agli estremi, ha configurazione di equilibrio rettilinea, e la tensione **T**, in ogni punto del filo, è eguale alla forza applicata ad un estremo. I *piccoli* spostamenti trasversali  $y$ , relativi ai *piccoli* movimenti del filo precedente, sono funzioni del tempo  $t$  e dell'ascissa  $x$  del punto a cui sono riferiti, ed è notissimo che essi ubbidiscono all'equazione, detta appunto delle « corde vibranti » :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0.$$

Nella (1), se il filo è omogeneo,  $v$  è una costante, rappresentante la velocità di propagazione del movimento lungo il filo, e, detta  $k$  la massa per unità di lunghezza del filo, risulta notoriamente :

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{T}{k}}.$$

Supponiamo ora che il filo non sia soggetto soltanto a due forze opposte applicate agli estremi, ma sia soggetto a forze applicate agli estremi e a forze su di esso distribuite. La configurazione di equilibrio del filo non sarà più in generale rettilinea, ma curvilinea. Come si propaga, in queste condizioni, un *generico movimento finito* del filo lungo il filo stesso? Per rispondere a questa domanda, basta scrivere il sistema di quattro equazioni differenziali che regge il movimento del filo, e, senza bisogno di integrare il sistema, determinarne le caratteristiche. Si conclude allora facilmente che, benchè la (1) cessi di sussistere, il movimento si propaga ancora lungo il filo con velocità data dalla (2). In questa formula però  $T$  non è costante, ma, in generale, variabile da posto a posto e da istante ad istante, e  $k$ , se il filo non è omogeneo, varia da posto a posto; onde la velocità di propagazione varia, in generale, da punto a punto e da istante ad istante.

La semplicità della risposta alla questione prospettata, e la classicità dell'argomento alla quale questa si riferisce, mi fanno dubitare che il risultato da me ottenuto sia già noto. Il non averne però trovato traccia nella

(1) Nella seduta del 17 gennaio 1937.

letteratura più corrente, ed il benevolo incoraggiamento del prof. Maggi, mi inducono, nonostante il dubbio che mi si affaccia, a pubblicare la mia breve ricerca.

Diciamo  $x, y, z$  le coordinate cartesiane di un punto P del filo,  $t$  il tempo,  $s$  la lunghezza dell'arco di filo terminato al punto P,  $k$  la densità,  $T$  la tensione,  $F_x, F_y, F_z$  le componenti cartesiane del vettore  $\mathbf{F}$ , tale che  $\mathbf{F} ds$  rappresenti il risultante delle forze agenti sull'elemento  $ds$ . Le coordinate  $x, y, z$  sono funzioni, *a priori* ignote, di  $s$  e di  $t$ , che definiscono il movimento del filo, cioè la sua configurazione ad ogni istante; la tensione  $T$  è pur essa funzione, *a priori* ignota, di  $s$  e di  $t$ ; mentre sono funzioni note di  $s$  la densità  $k$  e le componenti di  $\mathbf{F}$ .

Indichiamo, per semplicità, con un punto sovrapposto la derivazione rispetto a  $t$  e con un apice la derivazione rispetto a  $s$ : il sistema di quattro equazioni differenziali a cui soddisfanno le quattro funzioni incognite  $x, y, z, T$ , caratterizzanti il movimento e la tensione di un filo flessibile ed inestendibile, è il seguente (1):

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x - k \ddot{x} + T' x' + T x'' = 0 \\ F_y - k \ddot{y} + T' y' + T y'' = 0 \\ F_z - k \ddot{z} + T' z' + T z'' = 0 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1. \end{array} \right.$$

Ponendo

$$(4) \quad T = U'$$

scriveremo con maggior simmetria le equazioni indefinite della dinamica dei fili:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_x - k \ddot{x} + U'' x' + U' x'' = 0 \\ F_y - k \ddot{y} + U'' y' + U' y'' = 0 \\ F_z - k \ddot{z} + U'' z' + U' z'' = 0 \\ x' x'' + y' y'' + z' z'' = 0. \end{array} \right.$$

Supponiamo ora che, in un istante  $t$ , un movimento abbia perturbato il tratto di filo a monte del punto P, mentre risulti imperturbato il tratto a valle. In P le funzioni  $x, y, z$  e le loro derivate prime siano continue, mentre discontinue siano le loro derivate seconde; pure continua in P sia  $T$ , cioè  $U$  e le sue derivate prime, mentre discontinue siano le derivate di  $T$ , cioè le derivate seconde di  $U$ . Il propagarsi delle discontinuità considerate,

(1) Cfr. G. A. MAGGI, *Sul moto di un filo flessibile ed inestendibile che si sposta pochissimo dalla sua posizione di equilibrio*. «Giornale di Matematiche», vol. XIX, 1881.

cioè il propagarsi del movimento dal tratto perturbato al tratto imperturbato, sarà completamente individuato dalle caratteristiche del sistema (5).  
Sia

$$(6) \quad \tau(t, s) = \text{cost.}$$

l'equazione delle caratteristiche. Se  $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_U$  sono quattro moltiplicatori, *a priori* arbitrari, le condizioni di compatibilità cinematica delle discontinuità delle derivate seconde si esprimono così <sup>(1)</sup>:

$$(7) \quad \Delta \ddot{x} = \lambda_x \dot{\tau}^2, \quad \Delta x'' = \lambda_x \tau'^2, \text{ ecc.}, \quad \Delta U'' = \lambda_U \tau'^2.$$

Le condizioni di compatibilità dinamica <sup>(2)</sup> sono allora le seguenti:

$$(8) \quad \begin{cases} F_x + (U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2) \lambda_x + x' \tau'^2 \lambda_U = 0 \\ F_y + (U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2) \lambda_y + y' \tau'^2 \lambda_U = 0 \\ F_z + (U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2) \lambda_z + z' \tau'^2 \lambda_U = 0 \\ x' \tau'^2 \lambda_x + y' \tau'^2 \lambda_y + z' \tau'^2 \lambda_z = 0. \end{cases}$$

Eguagliando a zero il determinante del sistema (8), nel quale fungono da incognite i moltiplicatori, si ottiene, come è noto <sup>(3)</sup>, l'equazione differenziale delle caratteristiche (6):

$$(9) \quad \begin{vmatrix} U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2 & 0 & 0 & x' \tau'^2 \\ 0 & U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2 & 0 & y' \tau'^2 \\ 0 & 0 & U' \tau'^2 - k \dot{\tau}^2 & z' \tau'^2 \\ x' \tau'^2 & y' \tau'^2 & z' \tau'^2 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Se  $\tau' \neq 0$ , se cioè vi è effettiva propagazione lungo il filo, ricordando la quarta delle (3) e la posizione (4), dalla (9) si ricava facilmente:

$$(10) \quad T \tau'^2 - k \dot{\tau}^2 = 0.$$

Dalla forma semplificata (10) dell'equazione delle caratteristiche si deduce immediatamente che le discontinuità, e quindi il movimento, si propagano lungo il filo con velocità

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*. Bologna, 1931, pp. 56-62.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit.

(3) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit.



(11)

$$v = \sqrt{\frac{T}{k}}$$

precisamente così come era stato annunciato (1).

Se, contrariamente all'ipotesi fin qui fatta, il tratto di filo a valle di P è pur esso in movimento, la (11) non definisce più la velocità di propagazione lungo il filo, ma soltanto la velocità di avanzamento. La velocità di propagazione si ottiene semplicemente facendo la differenza fra la velocità di avanzamento (11) e la componente tangenziale al filo della velocità posseduta dal filo in P (2). Risulta così:

(12)

$$v = \sqrt{\frac{T}{k}} - (\dot{x}x' + \dot{y}y' + \dot{z}z').$$

(1) Vale la pena di rilevare come il fatto che  $v$  sia direttamente proporzionale alla radice quadrata di  $T$  e inversamente proporzionale alla radice quadrata di  $k$ , possa essere dimostrato ricorrendo a semplici procedimenti dimensionali.

Infatti, se riteniamo che  $v$ , in un punto P del filo, dipenda soltanto da  $T$ , da  $k$ , e, al più, anche dal raggio di curvatura  $\rho$ , valutati in P, scriveremo:

$$v = \chi T^\alpha k^\beta \rho^\gamma$$

dove  $\chi$  è un puro numero e gli esponenti  $\alpha, \beta, \gamma$  possono essere calcolati tenendo presenti le dimensioni delle quantità considerate. Riferendosi alle quantità fondamentali: lunghezza  $[l]$ , tempo  $[t]$ , massa  $[m]$ , risulta infatti:

$$[v] = [l t^{-1}] \quad , \quad [T] = [l t^{-2} m] \quad , \quad [k] = [l^{-1} m] \quad , \quad [\rho] = [l].$$

Ne segue

$$\alpha - \beta + \gamma = 1 \quad , \quad -2\alpha = -1 \quad , \quad \alpha + \beta = 0$$

ossia

$$\alpha = \frac{1}{2} \quad , \quad \beta = -\frac{1}{2} \quad , \quad \gamma = 0.$$

Cioè

$$v = \chi \sqrt{\frac{T}{k}}.$$

Questa formula dimostra appunto quanto era stato annunciato. Soltanto però in base all'effettivo calcolo eseguito, possiamo affermare che  $\chi = 1$ .

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, loc. cit., p. 25.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Spettri molecolari ed analisi spettroscopica*. — VI. *Sulla ricerca del Samario*. <sup>(1)</sup> Nota di G. PICCARDI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

La ricerca del samario, com'è noto, può esser condotta colla massima comodità in base allo spettro d'assorbimento delle sue soluzioni, similmente alla ricerca della maggior parte degli elementi delle terre rare. Non avevo quindi una forte ragione per cimentare sul samario il metodo degli spettri molecolari, come l'avevo invece avuta nel caso degli elementi che non danno luogo ad assorbimento visibile: scandio, ittrio, lantanio e gadolinio.

Ho creduto opportuno d'altra parte applicare il mio metodo alla ricerca del samario, poichè questo elemento, nelle operazioni di cristallizzazione frazionata, si trova sovente in miscela col gadolinio. Ricercando quindi il gadolinio in base allo spettro di bande si sarebbero osservate anche le bande del samario; poteva interessare perciò conoscere la persistenza e la sensibilità di queste nei riguardi della concentrazione.

A rigore, secondo il sistema periodico, fra samario e gadolinio, si intercala l'europio, come effettivamente lo si ritrova sempre intercalato durante il frazionamento delle terre rare. Ma l'europio è il più delle volte in quantità così esigua che la sua presenza non impedisce alle frazioni che lo contengono, anche alle più ricche, di essere essenzialmente costituite da samario e da gadolinio.

Ricordo che io osservai per la prima volta nel 1929 lo spettro emesso dall'ossido di samario allo stato di vapore <sup>(3)</sup> e che dopo lunghe e faticose misure potei elencare, nel 1935, le lunghezze d'onda di circa duecento delle sue bande caratteristiche <sup>(4)</sup>.

Lo spettro dell'ossido di samario, che è verosimilmente emesso dal monossido  $\text{SaO}$  appare estremamente complesso, tanto che non gli è stato dato ancora nessun ordinamento. Esso si compone di bande, per lo più finissime, distribuite fra  $\lambda$  4300 e  $\lambda$  6700 circa, la maggior parte di queste (comprese tutte quelle più intense) si ammassa fra  $\lambda$  5800 e  $\lambda$  6600. Particolarmente folla, e ricca di bande di notevole intensità, è la zona compresa fra  $\lambda$  6350 e  $\lambda$  6600, tanto che vista a piccola dispersione, si può scambiare

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 20 dicembre 1936.

(3) G. PICCARDI, « Nature », 24, 618 (1929).

(4) G. PICCARDI, questi « Rendiconti », 21 (6), 584 (1935).

Na

SO

- 6619
- 6570
- 6557
- 6533
- 6511
- 6485
- 6457
- 6396
- 6349
- 6244
- 6230
- 6169
- 6140
- 6113
- 6072
- 6047
- 6034
- 5988
- 5948
- 5869
- 5822





per una larga fascia luminosa. Su questa zona, spiccano quattro brillantissime bande, le più belle di tutto lo spettro, le cui lunghezze d'onda sono:

6511      ,      6533      ,      6557      ,      6570.

Esse decrescono d'intensità nell'ordine indicato.

Questa particolare disposizione dello spettro del monossido  $\text{SaO}$  a sì che questo possa coesistere con quello dell'ossido  $\text{GdO}$ , senza gran chè disturbarlo. Le bande più intense emesse da  $\text{GdO}$  sono nettamente separate da quelle più intense emesse da  $\text{SaO}$ .

Ho cercato di stabilire la varia sensibilità delle bande, nei riguardi della concentrazione, osservando lo spettro emesso dal consueto dispositivo di fiamma, descritto in precedenti Note<sup>(1)</sup> utilizzando soluzioni contenenti 10, 1, 0.1, 0.01, 0.001 e 0.0001 % di  $\text{Sa}_2\text{O}_3$  pure, disciolto in acido nitrico diluito convenientemente. Poichè le bande più intense sono situate in una regione di buona sensibilità per l'occhio, non ho creduto opportuno registrare fotograficamente lo spettro.

I risultati ottenuti sono:

Alla concentrazione di 0.0001, 0.001 e 0.01 % la fiamma non è colorata e le bande non sono affatto osservabili, neanche a fenditura aperta.

Alla concentrazione di 0.1 % si comincia ad osservare una colorazione rosea nella fiamma, senza che lo spettroscopio (a fenditura normale) permetta di distinguere le bande. Aprendo invece la fenditura le bande sono visibili quantunque molto deboli.

Alla concentrazione dell'1 % la fiamma è brillantemente colorata in rosso e sono nettamente distinguibili non solo i gruppi di bande più intensi situati nell'arancione e nel rosso, ma anche quelli che si trovano verso le piccole lunghezze d'onda (spettroscopio con fenditura normale).

Alla concentrazione del 10 % tutto lo spettro appare brillantissimo.

La sensibilità del metodo nel caso del samario è alquanto scarsa, forse un poco inferiore a quella riscontrata nel caso del gadolinio. Anche le quattro bande rosse, così brillanti a concentrazioni relativamente alte, svaniscono rapidamente coll'aumentare della diluizione.

Riporto qui una fotografia dello spettro dell'ossido di samario, sulla quale ho segnata le lunghezze d'onda di alcune bande.

(1) G. PICCARDI, questi « Rendiconti », 14 (6), 578 (1931); G. PICCARDI e A. SBERNA, questi « Rendiconti », 15 (6), 83, 309, 577 (1932); G. PICCARDI, questi « Rendiconti », in corso di stampa.

**Geologia.** — *Fauna a Ippopotamo ed industrie paleolitiche nel riempimento delle grotte litoranee del Monte Circeo.* — I. *La Grotta delle Capre.* — II. *La Grotta del Fossellone*<sup>(1)</sup>. Nota di A. C. BLANC, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. G. STEFANINI.

La campagna di ricerche e di scavo di cui vengono qui esposti i primi risultati, e che si compie per iniziativa dell'Istituto Italiano di Paleontologia Umana, ha per oggetto lo studio sistematico delle formazioni quaternarie brecciose e detritiche del litorale meridionale del Lazio, e particolarmente della regione calcarea adiacente all'Agro Pontino. Lo studio suddetto viene condotto, analogamente e parallelamente a quelli già avviati delle pianure costiere versiliese e pontina<sup>(3)</sup>, applicando il metodo ecologico<sup>(4)</sup>, mediante la collaborazione di specialisti, i quali esaminano il materiale raccolto nei giacimenti, dal punto di vista geologico, geochimico, paleontologico, paleontologico ecc.

Obiettivo di questa prima campagna è stato l'esplorazione stratigrafica di alcune formazioni detritiche costituenti il riempimento di cavità litoranee del Monte Circeo. Per la sua posizione geografica questo presentava auspici particolarmente promettenti per il rinvenimento, in stratigrafia di grotta, delle faune quaternarie e delle industrie paleolitiche recentemente segnalate nel sottosuolo dell'Agro Pontino<sup>(5)</sup>. Nell'ipotesi che le grotte suddette fossero state abitate dai Paleolitici, ipotesi che, per la Grotta delle Capre, era avvalorata da alcune osservazioni di Issel, si poteva sperare di rinvenire negli strati di riempimento i frammenti di carbone dei focolari, la cui determinazione avrebbe permesso una valida correlazione con le flore fossili del prossimo Agro<sup>(6)</sup>. Queste previsioni hanno trovato, fin dai primi giorni di scavo, una piena conferma.

**GROTTA DELLE CAPRE.** — Com'è noto, la Grotta delle Capre si apre nel calcare liasico sulla scogliera meridionale del Circeo, ad occidente della Torre del Fico, all'altezza di pochi metri sul mare.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Geologia della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1937.

(3) A. C. BLANC, *Sulla stratigrafia quaternaria dell'Agro Pontino e della Bassa Versilia*. «Boll. Soc. Geol. It.», LX, fasc. 2, Roma, 1936.

(4) G. A. BLANC, *Il metodo ecologico in paleontologia*. «Arch. Antr. e Etn.», LXI, Firenze, 1930-31.

(5) A. C. BLANC, op. cit.

(6) E. TONGIORGI, *Ricerche sulla vegetazione dell'Etruria marittima* — V. *Documenti per la Storia della vegetazione della Toscana e del Lazio*. «Nuovo Giorn. Bot. It.», XLIII, fasc. 4°, Pisa, 1936.

Brocchi <sup>(1)</sup> ed Issel <sup>(2)</sup> hanno descritto il solco di battigia ed i fori di litodomi esistenti nell'interno di essa e sulle pareti dell'apertura. Essi testimoniano una linea di riva marina di 8 a 9 m. più elevata dell'attuale, che ha subito una stasi relativamente prolungata a quell'altezza, ed un abbassamento consecutivo della medesima, fino ad una quota certamente inferiore all'attuale. Con le condizioni costiere odierne non avrebbe infatti potuto formarsi nè il riempimento della grotta, in parte di apporto eolico, nè la breccia che si protende al livello del mare ad occidente dell'apertura e che cementa alcuni massi perforati da litodomi, franati dalla fronte rocciosa soprastante.

Il piano attuale della grotta trovasi a circa 6 m. sopra il livello del mare; esso era costituito principalmente da guano di capre e di pipistrelli, che è stato recentemente asportato, fino allo scoprimento di una crosta stalagmitica irregolarmente ondulata che ne ricopre oggi, in modo continuo, tutta la superficie. Nella parte anteriore della grotta le pareti dell'apertura conservano lembi di breccia e di stalagmite aderenti, che testimoniano come il riempimento si spingesse, originariamente, assai più esternamente di quanto oggi non appaia. Le azioni dinamiche litorali hanno infatti asportato tutta la parte più esposta del riempimento, ponendone in rilievo la stratigrafia: la demolizione si è arrestata soltanto davanti un'imponente barriera di blocchi calcarei franati dalla volta della caverna, intercalati negli strati, e che hanno esercitato una valida protezione. Issel (op. cit.) ha succintamente descritto la stratigrafia dei depositi, così sezionati, segnalando la presenza di uno strato di « terra ocracea rossa, con ossa di mammiferi, pezzetti di carbone, stromenti litici ecc. », sottostante uno strato stalagmitico.

Il primo compito è stato di ravvivare questa sezione naturale, sondandone anche la parte basale, mascherata da detriti, e di iniziare l'apertura di una trincea che consentisse l'accesso all'esplorazione dei sedimenti interni della grotta. Durante questi lavori preparatori sono venuti in luce alcuni documenti paleontologici e paletnologici non privi di interesse.

All'apertura della Grotta, la stratigrafia si presenta nel modo seguente, dal basso all'alto:

1. Spiaggia marina, con grossi ciottoli di calcare fluitati, sabbia giallastra con frammenti di molluschi, *Pectunculus*, *Cardium* ecc. . . . . cm. 50
- 2a. Terra violacea, brunastra verso la base, poco coerente, con tracce di vegetazione e frammenti di carboni . . . . » 50
- 2b. Terra nerastra, sabbiosa alla base, con tracce di vegetazione

(1) G. B. BROCCHI, *Catalogo ragionato di una raccolta di rocce* ecc. Milano, 1887, p. 83.

(2) A. ISSEL, *Le oscillazioni lente del suolo o bradisismi*. « Atti R. Un. Genova », V, 1883, pp. 205 e sg.

- e molluschi terricoli, *Cyclostoma*, *Helix*, ecc. e frammenti di carboni . . . . . cm. 40
3. Terra bruno-rossiccia cementata da vari strati stalagmitici, includente molti frammenti di calcare angolosi e frammenti di carboni . . . . . » 50
4. Sabbia e limo sabbioso gialli, regolarmente stratificati . . » 25
5. Terra rossa con abbondanti frammenti di carboni, talvolta disposti a strati, contenente ossa e denti di mammiferi, tra cui un molare di *Hippopotamus* ed una scheggia litica lavorata . . . . . » 30
6. Frana di grandi blocchi calcarei, spesso perforati da lito-  
domi . . . . . cm. 100 a 150
7. Terra rossa con abundantissimi frammenti di calcare an-  
goloso, riempiente gli interstizi dei blocchi dello strato 6;  
in superficie crostane stalagmitico ondulato . . . . . cm. 50
8. Limo sabbioso giallo-verdastro, stratificato, con ossa e denti  
di mammiferi . . . . . » 10
- 9a. Terra rossastra coerente, con croste stalagmitiche, ossa di  
mammiferi e frammenti di carboni . . . . . » 40
- 9b. Terra brunastra, poco coerente . . . . . » 12
10. Limo sabbioso loessoide giallo, non stratificato . . . . . » 40
11. Terra brunastra, poco coerente con ceramica e frammenti  
di carboni . . . . . » 9
12. Stalagmite con ceramica e frammenti di carboni . . . . . » 10

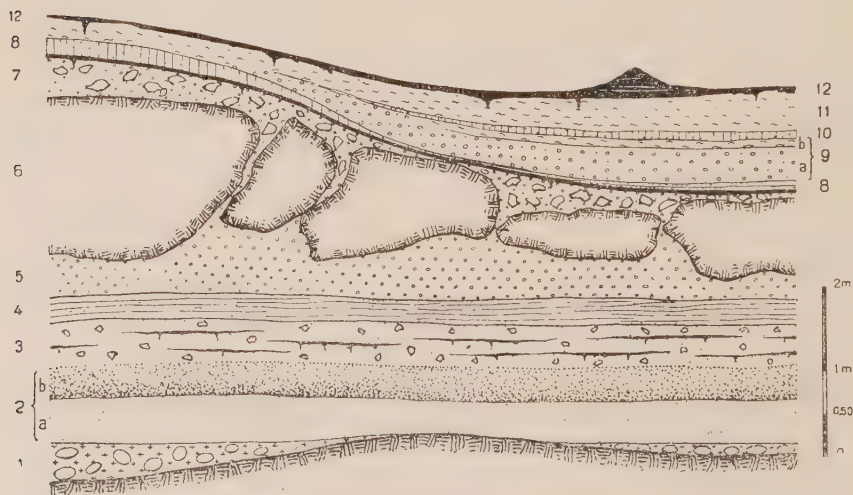


Fig. 1.

Lo strato 5 è quello segnalato da Issel (op. cit.) le cui osservazioni vengono così confermate ed ampliate.



Due strati, e precisamente gli strati 3' e 6, indicano periodi di attivo disfacimento termoclastico della volta <sup>(1)</sup>, il primo probabilmente più umido e meno freddo, il secondo asciutto ed assai freddo. Entrambi questi periodi sono stati seguiti da una parziale invasione idrica della Grotta, con formazione di specchi d'acqua tranquilla nei quali si sono deposti e stratificati i limi sabbiosi 4 e 8.

Se ne deducono le seguenti considerazioni:

a) il riempimento della grotta, che si inizia con una serie di strati terrosi, contenenti abbondanti tracce di vegetazione, molluschi terricoli e frammenti di carboni, ricoprenti la spiaggia marina di base a circa 2 m. sopra il livello del mare, in posizione esposta ai marosi, testimonia in modo incontrovertibile l'esistenza di un periodo di regressione marina posteriore alla deposizione di quella spiaggia marina, e precedente alla costituzione delle condizioni costiere odierne, periodo in cui la linea di riva è stata portata ad un livello inferiore a quello attuale.

b) La presenza del genere *Hippopotamus* nel riempimento della grotta suggerisce l'attribuzione della spiaggia marina di base ad uno stadio regressivo del piano Tirreniano.

c) Il riempimento della Grotta delle Capre viene quindi a costituire, accanto a quelli delle grotte litoranee coeve (Balzi Rossi di Grimaldi, Grotta Romanelli ecc.) un nuovo giacimento quaternario, come quelli cronologicamente connesso con la regressione marina post-tirreniana (ovvero prefianfrana) che ne ha consentito la formazione, e racchiudente testimonianze utili alla conoscenza geologica, climatica e paleontologica del Quaternario mediterraneo.

LA GROTTA DEL FOSSELLONE. — A poche centinaia di metri a ovest della Grotta delle Capre, appena oltrepassata la Grotta dell'« Uomo Impiso » si apre la grotta nota ai pescatori col nome di Fossellone o Buco. Meno ampia della Grotta delle Capre, essa presenta l'apertura alta e stretta, ormai invasa dal mare, rivolta a sud-est. Essa non sarebbe accessibile per via di terra se una gran parte della volta non fosse franata, determinando sulle falde del monte una larga voragine subcircolare: il « Fossellone » o il « Buco » dei frequentatori della scogliera. Scendendo nell'interno dalla parte occidentale, la grotta principale appare suddivisa in antri secondari, disposti sulle pareti orientali e settentrionali. Un solco di battigia, situato a circa otto metri sul mare, e perforazioni di litodomi ancora ben visibili nei punti più protetti della grotta, indicano che anch'essa, come la prossima grotta delle Capre, in epoca posteriore alla sua formazione è stata invasa dal mare quaternario fino a quell'altezza. Lembi di breccia a grandi elementi o crostoni stalagmitici sospesi sul vuoto nelle parti più elevate della

(1) Cfr. G. A. BLANC, *Grotta Romanelli*. I e II. « Arch. per l'Antrop. e l'Etnol. », Firenze, L, 1920 e LVIII, 1928.

grotta testimoniano un antico riempimento di essa, oggi in gran parte distrutto. Sulla parete nord orientale dell'apertura, un voluminoso lembo di breccia aderente al calcare fra 2 e 7 metri sul mare contiene abbondanti residui ossei, schegge silicee e mostra chiaramente i segni di una stratificazione. Altri lembi di breccia aderiscono sulla parete opposta, fino al livello del mare.

Gli antri secondari che si aprono all'interno della cavità principale sono tre. Il primo che si incontra a sinistra scendendo nella grotta misura m. 2,10 per m. 2,60 ed un'altezza attuale di m. 1,10 (sopra il riempimento). Esso è circondato da formazioni stalagmitiche e presenta in superficie un riempimento terroso giallastro. Lo chiamerò Antro Aguet, ispirandomi al nome del barone Luigi Aguet, proprietario della grotta. L'esplorazione di questo antro è stata rinviata ad una prossima campagna di scavo.

Il secondo, il più ampio, si apre nella parete settentrionale orientale nel fondo della grotta e misura m. 2,30 per m. 5 ed un'altezza di circa m. 5. Lo chiamerò Antro Obermaier, in onore del prof. H. Obermaier, il cui consiglio e la cui guida mi sono stati preziosi in questa campagna di ricerche.

Il riempimento, esplorato per uno spessore di circa m. 1,20 comprende strati di terriccio brunastro con molti frammenti di calcare franati dalle pareti, carboni, fauna ed industria paleolitica. La stratigrafia finora accertata è la seguente dal basso all'alto:

- a) Terriccio brunastro con fauna abbondante tra cui *Hyaena*.  
Molte delle ossa contenute in questo strato sono intere. . . cm. 30
- b) Terriccio brunastro con molti frammenti di carboni, selci lavorate ed ossa di mammiferi scheggiate. L'industria è di tipo paleolitico superiore senza microliti, attribuibile probabilmente ad un Aurignaziano inferiore . . . » 50
- c) Terriccio brunastro con molti carboni, selci del medesimo tipo ed ossa scheggiate, formanti un focolare superiore. . . » 35  
In superficie uno strato polverulento giallastro con frammenti di calcare franati dalla volta.

Il terzo antro, stretto e alto è situato sulla parete orientale della grotta; misura circa m. 2,20 per m. 2,20 ed è alto circa m. 3,50. Lo chiamerò Antro Jourdan, dal nome dell'ing. F. Jourdan, al cui suggerimento debbo l'iniziativa presa di esplorare la Grotta del Fossellone.

Il riempimento, che ricopre il suolo calcareo per uno spessore di appena 30 cm. è composto di terriccio brunastro, con molti frammenti calcarei, carboni, fauna, ed industria paleolitica. Una suddivisione stratigrafica del deposito è impossibile: la fauna e l'industria contenutevi sono, del resto, perfettamente omogenee. La prima comporta fra l'altro, i generi

*Rhinoceros* e *Ursus*. La seconda presenta una tipologia musteriana con totale assenza di elementi tipici del Paleolitico superiore. Questo antro, poco spazioso e più esposto, come non è stato frequentato dalle Iene durante il periodo in cui esse hanno abitato la caverna, non è stato nemmeno adoperato dagli Uomini del Paleolitico superiore, che hanno preferito l'Antro Obermaier, più spazioso, più protetto, meno accessibile, e quindi più facilmente difendibile di quello.

Non è escluso che sotto la scarpata dei materiali detritici franati, sulla parete occidentale della grotta, non vi fossero altri antri abitati, come sembrano testimoniare gli affioramenti di alcuni lembi di riempimento terroso, che ad un saggio preliminare hanno fornito alcune ossa e denti di mammiferi.

La Grotta del Fossellone, se non presenta l'imponente serie di strati della Grotta delle Capre, ha tuttavia un notevole interesse, sia per i resti di fauna e di industria che ha fornito, sia per la conservazione delle tracce di un antico riempimento breccioso che la colmava fino ad un livello inferiore a quello marino attuale.

Questa testimonianza conferma, come alla Grotta delle Capre, l'esistenza e l'importanza della regressione marina post-tirreniana.

**Patologia.** — *Ricerche sulla glicolisi della retina* <sup>(1)</sup>. Nota di L. CALIFANO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio P. RONDONI.

Il ricambio della retina è caratterizzato da valori altissimi sia della glicolisi che della respirazione. La glicolisi anaerobica ( $Q_M^{N_2}$ ) della retina di ratto è secondo Warburg <sup>(3)</sup> + 88 e la respirazione ( $Q_{O_2}$ ) — 31, valori entrambi che sono i più elevati finora noti, sia per le cellule adulte quiescenti, che per quelle in sviluppo embrionale o neoplastico. Di conseguenza l' $U(Q_M^{N_2} - 2 Q_{O_2})$ , cioè il predominio della glicolisi sulla respirazione raggiunge la cifra di + 26, che è la più alta nota finora.

Se nelle prime ricerche sembrava che la elevata glicolisi retinica fosse espressione del danneggiamento portato sugli elementi durante la preparazione, ora non esiste più dubbio che essa rappresenti una caratteristica metabolica fondamentale del tessuto. Appare perciò interessante lo studio del meccanismo con cui essa si effettua, fatto su cui finora non esistono che poche e frammentarie nozioni.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Patologia generale della R. Università « B. Mussolini » di Bari.

(2) Nella seduta del 3 gennaio 1937.

(3) O. WARBURG, « Bioch. Zeitschr. », 184, 484, 1927.

La scissione dello zucchero si avvera nei vari protoplasmi con modalità differenti. Lo schema meglio noto è quello del tessuto muscolare in cui dal glicogeno, per un processo di fosforizzazione si forma acido fruttosiofosforico, che si scinde in una molecola di acido gliceroaldeido-fosforico ed in una di acido diossiacetonfosforico. Per dismutazione di questi due triosi si ha come corpo ridotto l'acido  $\alpha$ -glicerofosforico e come corpo ossidato l'acido fosfoglicerico, che dà luogo ad acido piruvico. Da una molecola di questo ed una di acido  $\alpha$ -gliceroiosforico si ha una molecola di acido lattico ed una di acido trioso-fosforico che rientra in circolo. Questo schema formulato da Embden è stato poi perfezionato da Meyerhof e Collaboratori nel senso che è stato veduto che la trasformazione dell'acido fosfoglicerico ad acido piruvico attraversa due stadi reversibili e cioè dall'acido 3-fosfoglicerico si passa al 2-fosfoglicerico e quindi all'acido fosfopiruvico, che in presenza di acido adenosintrifosforico e creatina dà luogo ad acido piruvico. La trasformazione dell'acido esosodifosforico avviene per opera di un enzima denominato da Meyerhof « zimoexasi ».

Lo schema di Embden-Meyerhof è stato sostanzialmente trovato valido per la fermentazione alcoolica (Meyerhof <sup>(1)</sup>) e per quanto pare anche per la glicolisi dei globuli rossi (Dische <sup>(2)</sup>). Anche nella demolizione batterica dello zucchero si hanno fatti analoghi, complicati dalla rapida successione delle altre fermentazioni che si avverano (vedi Kluyver <sup>(3)</sup>). Per il sistema nervoso centrale, su cui si è molto lavorato, si ammette che esistano due vie di demolizione: una che dal glucosio, senza fosforizzazione, porta all'acido lattico ed un'altra che partendo dal glicogeno implica la formazione di corpi fosforati (Ashford e Holmes <sup>(4)</sup>). Questa via, che in sostanza è quella seguita dal tessuto muscolare, appare sempre più importante (Peters e Thompson <sup>(5)</sup>, Mazza e Malaguzzi <sup>(6)</sup>).

Per la glicolisi delle cellule neoplastiche esistono dati alquanto disparati e per quanto sia dimostrata una larga capacità alla fosforizzazione non si può dire se e in quale misura risulti valido lo schema di Embden (vedi Calò <sup>(7)</sup>, ove è riassunta la questione).

Per quanto riguarda la glicolisi retinica risultò dalle prime ricerche che i fosfati non hanno parte attiva nella fermentazione del glucosio, sia perchè non si liberano fosfati nè l'aggiunta di questi incrementa sensibilmente la formazione di acido lattico, sia perchè l'aggiunta di arseniato, che nel muscolo attiva la formazione di acido lattico, per aumentata scissione dell'esosofosfato,

(1) O. MEYERHOF, « *Ergebnisse der Enzymforschung* », 4, 208, 1935.

(2) Z. DISCHE, « *Bioch. Zeitschr.* », 274, 51, 1934.

(3) A. J. KLUYVER, « *Ergebnisse der Enzymforschung* », 4, 230, 1935.

(4) CH. A. ASHFORD, e E. G. HOLMES, « *Bioch. Journ.* », 23, 748, 1929.

(5) R. A. PETERS, e R. H. S. THOMPSON, « *Bioch. Journ.* », 28, 916, 1934.

(6) F. P. MAZZA, e C. MALAGUZZI, « *Arch. Scienze biol.* », 21, 444, 1935.

(7) A. CALÒ, « *Riv. di Patol. sper.* », 6 (N. S.); 299, 1936.



non spiega nessuna azione sulla glicolisi retinica (Bumm e Fehrenbach <sup>(1)</sup>). Contro di ciò esiste però il fatto che la florizina, che ha azione specifica sul processo di fosforizzazione, inibisce notevolmente la glicolisi, ciò che farebbe supporre l'intervento di un ciclo del fosforo nella demolizione dello zucchero (de Conciliis <sup>(2)</sup>). Da ricerche fatte eseguire da Possenti <sup>(3)</sup> risultò che una tenue produzione di acido lattico si ha sia dall'esosodifosfato che dalla miscela di  $\alpha$ -glicerofosfato e fosfoglicerato, ciò che però non autorizza ancora a ritenere valido per la retina il meccanismo glicolitico del muscolo; in ogni caso la produzione di acido lattico a partire dal glucosio avviene con velocità enormemente superiore.

Che, in effetti, differenze sostanziali esistano nel meccanismo di produzione di acido lattico tra i vari tessuti sede di glicolisi risulta da vari fatti. Sin dalle prime ricerche fu, per esempio, veduto che mentre nel muscolo in cui la glicolisi è prevalentemente da glicogeno non esiste nessuna differenza nella produzione di acido lattico sia che si parta dal glucosio che dal fruttosio (Meyerhof, Laquer e Meyer <sup>(4)</sup>) i tumori invece non fermentano che i soli esosi e tra questi oltre il glucosio, il mannosio, il fruttosio ed il galattosio con i seguenti valori del  $Q_{CO_2}^{N_2}$   $d$ -glucosio 23,9;  $d$ -mannosio 21,6;  $d$ -fruttosio 3,3;  $d$ -galattosio 1,3. L' $\alpha$  ed il  $\beta$  glucosio sono fermentati quasi con la stessa velocità (Warburg, Posener e Negelein <sup>(5)</sup>). Inoltre mentre la glicolisi muscolare è eccitata dai narcotici indifferenti (Meyerhof <sup>(6)</sup>) quella dei tumori è inibita, così come è inibita la respirazione (Minami <sup>(7)</sup>). Più di recente, infine, è stato veduto che mentre la glicolisi a partire dal glicogeno è lievemente inibita dal glutatione ridotto, quella del glucosio è fortemente accelerata (Geiger <sup>(8)</sup>).

Che zuccheri differenti dal glucosio sieno fermentabili risulta anche per i muscoli da successive ricerche del Meyerhof <sup>(9)</sup> il quale stabilì le percentuali di scissione dei vari zuccheri <sup>(10)</sup> da parte di estratti muscolari, venendo alla conclusione che con gli estratti di rana la produzione di acido lattico a partire

(1) E. BUMM, e K. FEHRENBACH, «Zeitschr. f. physiol. Chemie», 195, 101, 1931.

(2) N. DE CONCILIIIS, «Lo Sperimentale», 89, 82, 1935.

(3) G. POSSENTI, «Riv. di Patol. sper.», 4 (N. S.), 183, 1935.

(4) O. MEYERHOF, F. LAQUER, P. MEYER, «Zeitschr. f. physiol. Chemie», 124, 211, 1923.

(5) O. WARBURG, K. POSENER, E. NEGELEIN, «Bioch. Zeitschr.», 152, 309, 1924.

(6) O. MEYERHOF, «Pflüger's Arch.», 188, 148, 1921.

(7) S. MINAMI, «Bioch. Zeitschr.», 142, 334, 1923.

(8) A. GEIGER, «Bioch. Journ.», 29, 811, 1935.

(9) O. MEYERHOF, «Bioch. Zeitschr.», 183, 176, 1927.

(10) Con estratto muscolare di rana senza attivatori il Meyerhof riporta, ad esempio, i seguenti dati:

Glicogeno 63 %; amido 100 %; glucosio 20 %; fruttosio 17 %; mannosio 13 %; galattosio 3 %; e per un'altra determinazione: amido 100 %; glucosio 42 %; maltosio 13 %; amilobiosio 13 %; saccarosio 0.

dal glicogeno è sempre più cospicua che dal glucosio; nel coniglio si possono avere anche valori non molto differenti (100 % per il glicogeno, 95 % per il glucosio) ma con l'invecchiamento degli estratti mentre permane immutata l'attività glicolitica per il glicogeno, quella per il glucosio si attenua sino a scomparire.

Per i tumori ricerche di Downes <sup>(1)</sup> mostrano che essi scindono il glucosio, il maltosio e il mannosio con pari velocità, meno rapidamente il fruttosio e l'esosofosfato, niente del tutto il lattosio il galattosio ed il glicogeno. Altri tessuti e specialmente il sistema nervoso centrale presentano un comportamento analogo a quello dei tumori e quindi differente da quello dei muscoli, così il glicogeno, il fruttosio ed il maltosio come l'aldeide glicerica e il diossioacetone sono poco o punto fermentati il mannosio lo è largamente, meno l'acido esosofosforico (Loebel <sup>(2)</sup>).

Nella tabella I sono riportati i dati della capacità fermentativa della retina verso vari zuccheri. Le determinazioni manometriche, secondo Warburg, si sono eseguite su frammenti di retina di bue in liquido di Ringer secondo Warburg ed in ambiente 5 % CO<sub>2</sub> in N<sub>2</sub>. Gli occhi venivano rapidamente asportati dagli animali appena abbattuti e trasportati in laboratorio. Non trascorrevano in genere più di 10-15 minuti tra la morte degli animali e l'inizio delle letture manometriche, lasso di tempo che è senza importanza sull'altezza della glicolisi e respirazione del tessuto.

Nella tabella II sono riportati i dati relativi alla fermentazione di 3 esteri esoso-fosforici; l'estere di Harden e Young (ac. 1:6 fruttosodifosforico) l'estere di Neuberg (acido 6-fruttosofosforico) e l'estere di Robison (acido 6-glucosofosforico). È ora noto il significato fisiologico e la struttura di questi tre composti: l'estere di Embden (lattacidogeno), che si trova nel muscolo vivente, è identico all'estere di Robison che, come Meyerhof e Lohmann <sup>(3)</sup> hanno dimostrato, non è una sostanza unitaria ma una miscela di cui 3/4 sono rappresentati da acido aldoso monofosforico e 1/4 da acido chetoso monofosforico. Dall'idrolisi enzimatica dell'estere difosforico non si forma mai estere di Neuberg, come avviene nella idrolisi acida, ma sempre quello di Robison-Embden giacchè si stabilisce subito, per azione enzimatica, un equilibrio tra i due componenti sia che si parta dall'estere del glucosio che da quello del fruttosio.

Gli estratti muscolari, secondo ricerche di Meyerhof e Lohmann <sup>(4)</sup>, trasformano rapidamente i due manoesteri naturali, giacchè una parte si scinde in acido lattico ed un'altra si sintetizza ad acido esosodifosforico. La velocità di trasformazione va progressivamente scemando sino a ridursi a quella dell'acido esosodifosforico e anche meno o quando per la sintesi

(1) H. R. DOWNES, « Journ. Canc. Research. », 13, 268, 1929.

(2) R. O. LOEBEL, « Bioch. Zeitschr. », 161, 219, 1925.

(3) O. MEYERHOF e K. LOHMANN, « Bioch. Zeitschr. », 185, 113, 1927.

(4) O. MEYERHOF e K. LOHMANN, « Bioch. Zeitschr. », 185, 113, 1927.

TABELLA I.

Substrati (in concentra- zione M/100)	1 <sup>a</sup> ora		2 <sup>a</sup> ora	
	$Q_M^{N_2}$	Acido lattico in % di tessuto secco per ora	$Q_M^{N_2}$	Acido lattico in % di tessuto secco per ora
Glucosio . . .	+ 21.8	8.76	—	—
Fruttosio . . .	+ 5.60	2.25	—	—
Mannosio . . .	+ 26.80	10.77	—	—
Galattosio . . .	+ 2.46	0.888	—	—
Arabinosio . . .	+ 0.70	0.281	—	—
Nilosio . . . .	0	0	—	—
—	+ 0.320	0.128	+ 0.336	0.135
Glucosio . . .	+ 30.50	12.26	+ 25.90	10.41
Fruttosio . . .	+ 8.50	3.42	+ 7.70	3.095
Mannosio . . .	+ 31.80	12.78	+ 27.00	10.85
Galattosio . . .	+ 2.86	1.14	+ 1.01	0.406
Amido . . . .	+ 0.53	0.213	+ 0.705	0.283
—	+ 1.22	0.490	+ 1.49	0.598
Glucosio . . .	+ 35.6	14.31	+ 21.00	8.44
Glicogeno . . .	+ 2.34	0.94	+ 1.54	0.62
Saccarosio . . .	+ 1.86	0.747	+ 1.68	0.675
Maltosio . . .	+ 3.42	1.37	+ 3.84	1.54
Lattosio . . .	+ 2.10	0.844	+ 2.25	0.945

e scissione tutto il monoestere è stato consumato, ovvero quando tutti i fosfati anorganici della soluzione sono stati esterificati.

I tre composti da me adoperati provenivano da sali di calcio o di bario, che venivano trasformati in sali sodici per trattamento con le quantità calcolate di ossalato e rispettivamente di solfato sodico. Il precipitato di ossalato di calcio o di solfato di bario veniva allontanato per centrifugazione <sup>(1)</sup>.

(1) Ringrazio vivamente anche qui il prof. C. Neuberg che mi ha gentilmente favorito alcuni dei composti adoperati.

Per la presenza di fosfati si è naturalmente determinata la « ritenzione » del  $\text{CO}_2$  da parte del liquido alla fine dell'esperienza. Nei valori riportati è tenuto perciò conto di tale « ritenzione » che si è aggirata tra il 15 % e il 18 % del valore globale del  $\text{CO}_2$  sviluppato.

TABELLA II.

Substrati (in concentra- zione M/100)	1 <sup>a</sup> ora		2 <sup>a</sup> ora		3 <sup>a</sup> ora	
	$Q_M^{N_2}$	Acido lattico in % di tes- suto secco per ora	$Q_M^{N_2}$	Acido lattico in % di tes- suto secco per ora	$Q_M^{N_2}$	Acido lattico in % di tes- suto secco per ora
--	+ 1.04	0.418	+ 0.97	0.389	+ 0.97	0.389
Glucosio . .	+ 28.3	11.30	+ 15.60	6.27	+ 14.00	5.62
Difosfato . .	+ 3.46	1.39	+ 2.77	1.13	+ 2.77	1.13
Estere di Neu- berg. . .	+ 3.89	1.60	+ 3.11	1.25	+ 2.72	1.09
Estere di Ro- bison . .	+ 4.50	1.81	+ 2.77	1.11	+ 2.42	0.97

La fermentazione, dunque, dei vari carboidrati ha nella retina il seguente sviluppo: i pentosi (arabinosio e xilosio) non sono fermentabili; gli esosi lo sono con velocità decrescente nel seguente senso: mannosio, glucosio, fruttosio, galattosio. La velocità di fermentazione è per il fruttosio circa un quarto e per il galattosio circa un decimo di quella corrispondente al mannosio e glucosio. Dei disaccaridi il maltosio è intaccato appena, il saccarosio ed il lattosio affatto. Dei polisaccaridi il glicogeno da origine solo a tracce di acido lattico, l'amido è del tutto inattaccabile.

Gli zuccheri fosforati danno sicuramente luogo a formazione di acido lattico; il più attivo appare essere l'estere di Neuberg, mentre il difosfato e l'estere di Robison sono fermentati con pari velocità. La fermentazione dei tre esosofosfati è in ogni caso assai più limitata di quello del glucosio e perciò appare più verosimile che la produzione di acido lattico, che si riscontra con gli esteri fosforici, sia piuttosto espressione della fermentazione del carboidrato defosforato perchè necessariamente esposto all'azione della attiva fosfatasi retinica (De Conciliis<sup>(1)</sup>), che non ad un vero e proprio ciclo dell'estere come tale.

L'aggiunta di fosfati non determina nessuna variazione sulla velocità di fermentazione degli zuccheri nè diventano fermentescibili, in tali condizioni, altri carboidrati.

(1) N. DE CONCILIIIS, « Lo Sperimentale », 88, 793, 1934.

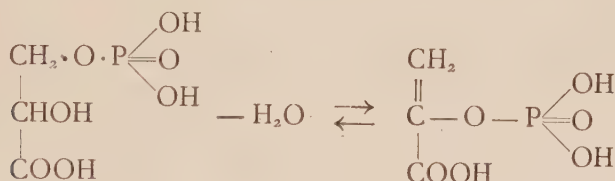


Degno di rilievo appare il comportamento dell'acido monoiodoacetico che limita notevolmente, fino ad arrestarla, la fermentazione del glucosio e del mannosio.

TABELLA III.

		$Q_M^{N_2}$ Glucosio	$Q_M^{N_2}$ Glucosio con iodoacetato n/1000	$Q_M^{N_2}$ Mannosio	$Q_M^{N_2}$ Mannosio con iodoacetato n/1000
I	60'	+ 39.4	+ 5.08	+ 46	+ 6.35
	120'	+ 17.5	+ 0.88	+ 25	0
2	60'	+ 21.2	+ 2.92	+ 24.6	+ 3.48
	120'	+ 16.5	+ 0.366	+ 16.4	0

Dalle ricerche di Meyerhof e Kiessling<sup>(1)</sup> risulta che mentre i fluoruri inibiscono la glicolisi muscolare perchè agenti elettivamente sulla enolasi, cioè sull'enzima che determina la trasformazione dell'acido fosfoglicerico in acido fosfopiruvico:



l'acido monoiodoacetico non ha nessuna azione su questo sistema. Agisce esso invece sulla ossidazione dell'acido triosofosforico ad acido fosfoglicerico così che, mentre in presenza di fluoruri si ha formazione di acido fosfoglicerico ed il processo si arresta a questo punto, in presenza di iodoacetato è inibita la formazione di acido fosfoglicerico mentre non è ostacolata la reazione successiva cioè la trasformazione in acido fosfopiruvico.

La inibizione riscontrata con l'acido monoiodoacetico, se se ne deve ritenere elettiva l'azione, farebbe pertanto pensare che nella glicolisi della retina del glucosio e del mannosio si abbia formazione di triosi e l'acido monoiodoacetico inibisca la glicolisi perchè paralizza l'ossidazione di questi. Ciò sarebbe avvalorato dal fatto dimostrato da Meyerhof e Lohmann<sup>(2)</sup> che nella retina esiste una zimoxesasi — il fermento cioè determinante la tra-

(1) O. MEYERHOF e W. KIESSLING, « Bioch. Zeitschr. », 264, 40, 1933; 267, 313, 1933.

(2) O. MEYERHOF e K. LOHMANN, « Bioch. Zeitschr. », 273, 413, 1934.

sformazione dell'acido esodifosforico in triosi — discretamente attiva (quantità relative: muscolo 100, cuore 4, retina 2, cervello 1.6, carcinoma 1.3 ecc.).

La glicolisi della retina, dunque, che è essenzialmente una glicolisi da glucosio, e in cui un ciclo del fosforo sarebbe da escludersi per le esposte considerazioni, è pure inibita dagli stessi agenti che paralizzano la glicolisi muscolare, corpi che agiscono sul processo di fosforizzazione (florizina) o sulla ossidazione di corpi intermedi originanti da composti fosforati (acido iodoacetico), ciò che è indice della complessità dei fenomeni che intervengono, fatto cui sono indirizzate ricerche in corso.

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 7 febbraio 1937 - Anno XV*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Geologia.** — *Verso una nuova sintesi tettonica delle Alpi Occidentali.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. ROVERETO.

È poco più di trent'anni che le Alpi si studiano partendo dal concetto che il loro insieme sia dovuto a grandi falde di ricoprimento. È questo un concetto, per alcune parti della regione alpina reale e necessario, per altre ipotetico e superfluo, che è stato gradatamente intuito e precisato: ma quando, dopo tanto lavoro, pareva provato e di ammissione sicura, ha cominciato a mostrarsi parzialmente fallace, od almeno modificabile. Ora qui sono riportate alcune mie viste personali che mi pongono sul cammino dei revisionisti, ma non dei demolitori.

Cominciando dai grossi massicci cristallini - Alpi Marittime - Pelvoux - Beldonne - Monte Bianco - Aar -, determinatisi sin dai tempi erciniani, e che si ritenevano assiali, oggi debbono dirsi *esterni* rispetto alla curvatura delle Alpi Piemontesi e ai massicci *interni*: ciò che sta al loro oriente è ben diverso di ciò che sta al loro occidente. La profondità dell'affondamento gneissico-granitico, sotto questo limite della dissimmetria, messo in rapporto col calcolo diretto delle anomalie gravimetriche, e controllato con delle considerazioni relative all'isostasia, è risultata all'Jung di 100 km. <sup>(2)</sup>.

Questa cifra, a seconda delle varie sintesi sugli involucri, ci fa discendere: alla base della *crosta* di Washington, che sta sopra alla zona *perido-*

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) « Ann. de l'Inst. de Physique », Paris, vol. XI, 1933.

*tica*; a una parte inferiore della *litosfera* di Sieberg, sotto cui sta la *barisfera*, che corrisponde pur essa in parte a una zona peridotica: oltre alla *crosta sialica* di Waterschoot, che sotto i continenti è potente sino a 60 km.; sino alla parte inferiore della *crosta sialica* di Goldschmitt, che raggiunge i 120 km.

Nel complesso si ha la possibilità teoretica, che il quantitativo di affondamento dei massicci esterni abbia messo in relazione tutta quella porzione di crosta, o di litosfera, corrispondente al basamento alpino, con i magmi della zona peridotica o del *sima*, oltrechè con quelli del *sial*, non inteso però il *sima*, nel senso di Suess, poichè questi lo fa cominciare alla profondità di 1500 km., da dove non avrebbe potuto mandare materiale nella crosta durante i tempi dei corrugamenti o dei diastrofismi.

Un altro dato geofisico bisogna pure coordinare con i precedenti, ed è quello della profondità alla quale ha luogo la cristallizzazione delle rocce plutoniche, in specie delle sialiche.

Goldschmitt mette questa profondità a 40 km., ma più di recente la stessa è stata portata a 80 km. da Daly: e queste cifre sono enormi rispetto alla possibilità di affondamento dei terreni sedimentizi. Questi, quando non sono interessati da fenomeni di contatto, le masse plutoniche già cristallizzate le debbono aver ricevute *per estrusione* e non per intrusione. Ciò intendo applicarlo soprattutto alle enormi masse di serpentina, e delle altre pietre verdi a questa collegate, che nelle Alpi Occidentali per il tettonista costituiscono l'ostacolo più insormontabile per giungere a una sintesi.

Dal magma fluido indifferenziato in profondità, la massa chimicamente peridotica si innalza per intrusione, giunge alla profondità di cristallizzazione, e così si ha una peridotite consolidata. Poi l'ascensione per intrusione cessa, ma la massa è giunta nella zona di movimento tettonico, e sotto le pressioni tangenziali continua ad innalzarsi, sino a penetrare nel medio sedimentizio, mentre nel frattempo si idrata, diventa serpentinoso, e l'accrescimento di volume, in contrasto con le pressioni, le conferisce i caratteri di scagliosità che la contraddistinguono: i sedimenti che in ultimo attraversa sono i calcescisti liassici, e in unione a questi i suoi movimenti diventano orogenetici o tettonici.

Si può pure dire, dopo le premesse del principio, che tutte queste fasi di modificazione petrografica, e di movimento mesozoico, avvengono lateralmente alla radiazione dei massicci cristallini che datano dall'erciniano, e questi, affondati, come si è detto, sino a oltre 100 km., guidano, o subiscono, in vario modo l'ascesa, dapprima di intrusione, dopo di estrusione.

Si osserva difatti, che le masse di pietre verdi si allungano lenticolarmente lungo i contorni del massiccio Dora-Maira, e di quello del Gran Paradiso, e questo è il caso più tipico di una penetrazione di contatto; oppure separano il massiccio Dora-Maira da quello successivo Sesia-Lanzo, e, poichè è poco probabile che si tratti di una penetrazione assiale, bisogna



dire, che i due massicci erano già separati, e che nell'intercapedine si aveva una zona di minore resistenza.

Fra i massicci: Gran Paradiso, Sesia-Lanzo, Monte Rosa, Mischabel, Dent Blanche, Val Savaranche, che sono in più condizioni di assetto e di più età, è compreso il mosaico di pietre verdi della Dora Baltea, con i difficili problemi del M. Emilius, del Pilonet, di M. Mary-Valturnanche: questi rappresentano degli innegabili sovrapponimenti, ma non hanno alcun rapporto con ciò che sta loro attorno, e tanto meno con la zona del Biellese, e con il restante dell'arco piemontese e ligure; sono solo dei frammenti di una falda locale: *così si abolisce la zona della Dent Blanche compresa come grande falda.*

Rispetto alla ulteriore delimitazione della zona del M. Rosa, o falda penninica, bisogna dire, che se essa ha più caratteri per essere considerata radicata attorno ai massicci interni, non è probabilmente tale in corrispondenza del massiccio del M. Rosa propriamente detto. Questo deve far parte dei sovrapponimenti in più falde della zona ossolana o del Sempione: e ciò è confermato dalla distribuzione delle pietre verdi, le quali si insinuano nelle alte valli del Lys e della Sesia sino all'Ossola, fra il massiccio Stura-Sesia e il massiccio M. Rosa.

Quindi è anche abolita la falda penninica, come sinora si è intesa; si ha invece una zona che rimane limitata ai massicci interni Sesia-Lanzo, Dora-Maira, cui si può aggiungere quello ligure scoperto dal Peretti di di M. Lajone, che sono radicati; non ne fa parte il sovrapponimento del M. Rosa.

Per questo radicamento, oltre alle considerazioni derivate dalla distribuzione delle pietre verdi, ho riconosciuto attorno al Gran Paradiso, e deve verificarsi anche altrove, che al finire dei movimenti erciniani, si ha una subsidenza, svelata dai calcari dolomitici del trias. Ora tali calcari *vengono costrutti dalle sifonee sui margini del massiccio*, già esistente come rilievo cupolare: quindi questo non è un carapace della falda penninica, ma una vera cupola radicata, di determinazione erciniana, accentuatasi di poi durante l'orogenesi alpina.

Ma se l'interno dell'arco delle Alpi Piemontesi è radicato, e risulta così abolita la sua falda, e radicata è pure parte della zona dei calcescisti attorniante questi massicci, più a occidente, avvicinandosi alla falda del Gran San Bernardo, la zona dei calcescisti comprende massicci che sono probabilmente senza radici: alcuni (Denti d'Ambin, Vanoise) isolati, gli altri (dalla Vanoise al Gran San Bernardo e oltre) in fascia lungo il sorgere della falda interna alpina, o falda del Gran San Bernardo.

Anche per il massiccio ligure delle pietre verdi si può credere, che una parte di esso, con il nucleo di M. Lajone, sia radicato, ma che dove ricopre il massiccio del Savonese, e quindi la falda del Gran San Bernardo, sia in falda carreggiata.

Ciò che mi risulta nettamente in falda, partendo dallo studio dei Monti Liguri, è la zona del Gran San Bernardo, o del Brianzonnese, la cui continuazione lungo il mezzo delle Alpi è tale, che non si può ammettere un cambiamento di assetto in qualche suo tratto: le sue radici sono sotto la zona dei calcescisti, la sua fronte è contro il parautoctono dei massicci esterni, con l'intercalazione della zona paleogenica, e in falde locali, Embrunais-Ubaye, in Liguria sostituita dalla zona *neautoctona della Riviera Occidentale*, da Ceriale a Ventimiglia. A Ceriale si ha pure l'interessante caso di una falesia marina del mare del luteziano superiore, scolpita nella cerniera della falda, e accompagnata da brecce a legamento sericitizzato: ciò stabilisce l'età dello spostamento della falda, avvenuto nel luteziano inferiore (considerando il luteziano inferiore diviso in due sole parti).

Mi è stato scherzosamente detto che ho portato San Bernardo ai bagni di mare: è certo che la costa del Tirreno fra Ceriale e Albissola mostra nel miglior modo: come si sviluppa la falda; come sorge, avendo compresi nella sua massa i massicci di Savona e di Calizzano, cui di recente l'Airoldi ha aggiunto quello di Bardinetto, i quali sono frammenti di un massiccio erciniano, provenienti dalla zona delle radici, e che *nulla hanno di dinarico*, benchè da molti si asserisca il contrario; come si corica, con le sue finestre del Santuario e di M. Mao o di Spotorno; come termina con la sua cerniera, digitata o a scaglie, a seconda dei tratti, tanto evidente a Ceriale, e per un buon tratto verso l'interno, in senso diagonale alla costa, sin quasi alla valle del Tanaro.

**Matematica.** — *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* Nota del Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli, in Terra d'Otranto.* Nota del Corrisp. G. A. BLANC.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sistemi di linee di una superficie invarianti rispetto a trasformazione per congruenza W.* Nota di R. CALAPSO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Lo studio delle corrispondenze puntuali fra due superficie nell'indirizzo istituito e sviluppato dal Bompiani (e cioè uscendo dalle superficie e passando inoltre all'esame d'intorni di ordine superiore) dà origine (per le coppie di superficie appartenenti ad uno spazio  $S_3$  a tre dimensioni) a due congruenze di rette (che il Bompiani chiama *assi della corrispondenza*) le quali individuano su ciascuna superficie un sistema  $\infty^2$  di linee assiali.

Si presentano però come singolari i casi in cui sulle superficie si corrispondano le asintotiche. In tal caso, come osserva il Bompiani, non si hanno, in generale, sistemi assiali corrispondenti; ovvero ad ogni sistema assiale corrisponde sempre un sistema assiale e questo fatto caratterizza un'applicabilità proiettiva fra le due superficie <sup>(2)</sup>.

Nella presente Nota vogliamo segnalare alcuni risultati da noi riscontrati per la corrispondenza puntuale esistente fra le focali di una congruenza W, quando si chiamino corrispondenti i punti appartenenti ad un stesso raggio.

È questo uno dei suddetti casi singolari, nei quali non esistono, in generale, sistemi assiali corrispondenti. Nondimeno riusciamo a caratterizzare sistemi di linee *invarianti* rispetto alla detta trasformazione, servendoci dei sistemi di *geodetiche generalizzate* <sup>(3)</sup>.

I nostri risultati si riassumono nei seguenti termini.

Sopra una superficie focale S di una congruenza W, sia (L) un fascio di curve nel senso del Fubini <sup>(4)</sup>; ( $\bar{g}$ ) il sistema di geodetiche individuato dalle curve (L); (g) un sistema di geodetiche diverso dal primo <sup>(5)</sup>.

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) BOMPIANI, *Proprietà generale della rappresentazione puntuale fra due superficie*. (« Annali di Matematica », ser. IV, to. I, anno 1924); *Corrispondenza puntuale ecc.* (« Rendiconti Lincei », 1923); *Nozioni proiettivo differenziale relative ad una superficie ecc.* (« Rendiconti Lincei », 1924); *Sistemi coniugati e sistemi assiali ecc.* (« Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1924); BIANCHI, *Intorno ai sistemi assiali di curve sopra una superficie*. (« Bollettino della Unione Matematica Italiana », 1927); E. ČECH, *Sur la correspondance générale de deux surfaces*. (« Bulletin international de l'Académie de Sciences de Bohême », 1922).

(3) FUBINI e ČECH, *Geometria proiettiva differenziale*, to. I, p. 133.

(4) Loc. cit., p. 139. Ved. pure BOMPIANI, *Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie*. (« Annali di Matematica », ser. IV, to. III, 1925-1926).

(5) Qui e nel seguito la geodetica deve essere intesa nel senso generalizzato.

Per il punto  $P$  della superficie si assuma una linea  $L$  del fascio e la sua coniugata  $L'$  e si costruisca in  $P$  l'intersezione  $\Gamma$  del piano osculatore ad  $L$  col piano osculatore alla geodetica  $g$  tangente ad  $L'$ ; similmente si costruisca l'intersezione  $\Gamma'$  del piano osculatore ad  $L'$  col piano osculatore alla geodetica  $g$  tangente ad  $L$ .

Sussiste il teorema:

Fra i sistemi di geodetiche aventi in comune con  $(\bar{g})$  il primo asse, ne esiste uno ed un solo  $(g)$  in cui l'asse, la retta  $\Gamma$  e la retta  $\Gamma'$  appartengono ad un piano, qualunque sia la curva  $L$  del fascio <sup>(1)</sup>.

Costruito il sistema  $(g)$  nelle condizioni ora dette e fissata per  $P$  una linea  $L$  del fascio, si consideri (al variare di  $P$  sulla superficie):

il sistema delle linee  $L$ ; la congruenza  $(\Gamma)$  descritta dalla retta  $\Gamma$ ; il sistema  $(G)$  di linee della superficie che corrisponde alle sviluppabili di  $(\Gamma)$ ; il sistema  $(G_1)$  che corrisponde alle sviluppabili della congruenza duale.

Attorno al punto  $P$  si assume (sul piano tangente alla superficie) l'involuzione determinata dalla coppia  $G$  delle tangenti alle curve  $(G)$  e dalla coppia  $G_1$  delle tangenti alle curve  $(G_1)$  e l'involuzione delle tangenti coniugate. Sia  $G_2$  la coppia comune a queste due involuzioni.

Nell'involuzione determinata dalle coppie  $G$  e  $G_1$ , considerando la coppia come elemento, si costruisca la coppia  $\bar{G}$  armonica di  $G_2$  rispetto a  $G$  e  $G_1$ . Questa coppia  $\bar{G}$ , al variare di  $P$  sulla superficie, involuppa un sistema di linee  $(\bar{G})$  che risulta perfettamente determinato dato che sia il sistema delle linee  $L$ .

Fin qui il sistema delle linee  $L$  è da assumersi ad arbitrio; ma sembra notevole che:

*Se come linee  $L$  si prendono sopra  $S$  quelle involupate dai raggi della congruenza  $W$ , il sistema  $(\bar{G})$  è invariante per la trasformazione  $W$ , nel senso che ad esso corrisponde sulla seconda focale il sistema ottenuto colla costruzione analoga, assumendo sulla seconda focale come linee  $L_1$  quelle involupate dai raggi della stessa congruenza.*

È da notare che le linee  $L_1$ , da assumere sulla seconda focale sono le corrispondenti delle linee  $L'$  di  $S$ .

(1) Si escludono i casi in cui il piano passi per l'una o per l'altra tangente asintotica della superficie.



**Matematica.** — *Sulle «trasformate asintotiche» delle curve sghembe.* Nota di I. POPA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Diremo (con Bianchi) che due curve sghembe  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  sono «trasformate asintotiche» una dell'altra se fra i loro punti  $m, m_1$  intercede una corrispondenza tale che i piani osculatori in  $m$ , rispettivamente,  $m_1$  passano per la retta  $mm_1$ . Questa trasformazione è stata studiata da Koenigs, Bianchi, Tzitzeica, Picone, Tortorici... Un'estensione negli iperspazi è dovuta al prof. Tzitzeica che ha presentato la trasformazione considerata sotto un punto di vista nuovo e più interessante. In un lavoro recente <sup>(2)</sup>, ho trovato degli invarianti proiettivi di questa trasformazione.

La questione si può, però, riguardare da un altro punto di vista; precisamente quello iniziato dal prof. Bompiani e particolarmente esposto in un suo recentissimo lavoro «Sulle curve sghembe» <sup>(3)</sup>. Con le sue direttive, sono riuscito ad associare a due elementi di quart'ordine di due curve trasformate asintotiche una dell'altra, un riferimento proiettivo (tetraedro e punto unità) e determinare alcuni invarianti collegati a questa configurazione.

Mi sia permesso d'esprimere al prof. Bompiani la mia profonda gratitudine.

2. Consideriamo due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  nella posizione indicata. Rispetto ad un riferimento (tetraedro) formato: dallo spigolo  $mm_1$  (con equazioni  $x_2 = x_4 = 0$ ); dalle tangenti nei punti  $m, m_1$  (con rispettive equazioni  $x_3 = x_4 = 0, x_1 = x_2 = 0$ ) e da un'altra retta appoggiantesi su queste, le due  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  hanno sviluppi del tipo

$$(\Gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_3}{x_1} = a \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + b \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^3 + c \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_4}{x_1} = B \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^3 + C \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \end{array} \right.,$$

$$(\Gamma_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_1}{x_3} = a_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^2 + b_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^3 + c_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_2}{x_3} = B_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^3 + C_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5]. \end{array} \right.$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) *Sur la transformation asymptotique des courbes gauches.* «Matematica», vol. XII, Cluj, 1936.

(3) *Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari.* Pavia, 1936 (in corso di pubblicazione). Ringrazio il prof. Bompiani per la possibilità datami di conoscere il suo lavoro.

Ai due elementi di second'ordine delle curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  si può associare una *superficie principale* (luogo dei coni quadrici che contengono i due elementi) la quale, nel presente caso, si spezza in una *coppia di piani* passanti per lo spigolo  $mm_1$  e formanti gruppo armonico con i rispettivi piani osculatori.

Infatti, esistono  $\infty^3$  quadriche che contengono i detti elementi; esse sono rappresentate dall'equazione

$$(1) \quad ax_2^2 + a_1x_4^2 - x_1x_3 + \lambda x_2x_3 + \mu x_1x_4 + \nu x_2x_4 = 0.$$

Fra queste, si trovano  $\infty^2$  coni per i quali è soddisfatta la relazione  $(\lambda\mu + \nu)^2 = 4aa_1$  e che hanno i vertici nei punti  $V(x_1, x_2, x_3, x_4)$  per i quali

$$(2) \quad \frac{x_1}{x_2} = \lambda, \quad \frac{x_3}{x_4} = \mu, \quad -2a\frac{x_2}{x_4} = \lambda\mu + \nu.$$

Al variare dei parametri  $\lambda, \mu, \nu$  i punti  $V$  descrivono la coppia di pian

$$(3) \quad ax_2^2 - a_1x_4^2 = 0.$$

*Osservazione.* Nel caso di due elementi generici, il prof. Bompiani ha trovato come *superficie principale* una superficie del quart'ordine la quale, presentemente, è composta della coppia (3) e di quella dei piani osculatori.

3. Per trovare altri elementi geometrici collegati alla precedente configurazione, si devono considerare intorni di ordini superiori. Consideriamo dunque gli elementi di terz'ordine di  $\Gamma$  e di  $\Gamma_1$ . Fra le quadriche (1) esistono  $\infty^1$ , formanti fascio, che contengono questi elementi e, precisamente, sono quelle per le quali

$$(4) \quad \begin{cases} \lambda a + \mu B = b \\ \lambda B_1 + \mu a_1 = b_1. \end{cases}$$

Queste relazioni possono determinare  $\lambda$  e  $\mu$  tanto che  $1 - I = 1 - \frac{BB_1}{aa_1} \neq 0$ . Il caso  $I = 1$  esprime che  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  si trovano in una relazione più particolare; precisamente, se  $ab_1 \neq bB_1$ , e  $ba_1 \neq Bb_1$  non esistono quadriche contenenti i due elementi del terz'ordine e se  $ab_1 = bB_1$  oppure  $ba_1 = Bb_1$  allora ne esistono  $\infty^2$ . In seguito, questo caso sarà scartato.

Le relazioni (2) e (4) mostrano che in ciascuno dei piani principali si trovano due rette luogo dei vertici dei coni quadrici contenenti un elemento di second'ordine e un altro di terz'ordine. Le rette s'incontrano due a due in due punti, vertici di coni contenenti gli elementi di terz'ordine.

In questo modo, è messo in evidenza l'esistenza di due punti principali situati nei piani principali e proiettivamente collegati agli intorni di terz'ordine delle due curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ .

La retta dei punti principali ha le equazioni

$$\begin{aligned}(aa_1 - BB_1)x_1 &= (ba_1 - Bb_1)x_2 \\ (aa_1 - BB_1)x_3 &= (ab_1 - bB_1)x_4\end{aligned}$$

e quindi essa incontra le due tangenti. Si possono, dunque, considerare, come rappresentanti dei detti intorni, questi punti situati sulle due tangenti. Si deve osservare che essi dipendono contemporaneamente da  $\Gamma$  e da  $\Gamma_1$ . Prendiamo questa retta come ulteriore spigolo del tetraedro di riferimento. Ne segue  $b = b_1 = 0$ . Rispetto a questo tetraedro, le curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  hanno degli sviluppi

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} \frac{x_3}{x_1} = a \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + c \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_4}{x_1} = B \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^3 + C \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \end{cases},$$

$$(\Gamma_1) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_3} = a_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^2 + c_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_2}{x_3} = B_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^3 + C_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5] \end{cases}$$

e il fascio di quadriche contenenti i due elementi di terz'ordine

$$(I') \quad ax_2^2 + a_1x_4^2 - x_1x_3 + vx_2x_4 = 0.$$

4. Gli intorni considerati definiscono anche alcuni invarianti numerici. In primo luogo, un invariante infinitesimo è il birapporto <sup>(1)</sup> del fascio dei piani osculatori e di altri due ciascuno contenente un punto vicino di  $m$  rispettivamente  $m_1$  i quali non si trovano nei rispettivi piani osculatori. Se  $y = y(u)$ ,  $z = z(u)$  sono le equazioni di  $\Gamma$  e di  $\Gamma_1$ , quest'invariante vale

$$-\frac{1}{36} \frac{(vdy\delta z d^2y)(zdy\delta z\delta^2z)}{(yzdy\delta z)^2}.$$

Le  $\infty^3$  omografie che conservano il precedente tetraedro conservano, com'è facile vedere, anche le espressioni

(1) Cfr. E. BOMPIANI, *Alcuni invarianti proiettivi di elementi curvilinei*. «Rend. R. Acc. dei Lincei», vol. XXII, ser. 6<sup>a</sup>, fasc. 11, 1936.

$$I = \frac{BB_1}{aa_1} \quad , \quad J = \frac{c}{B} : \frac{c_1}{B_1} \quad , \quad H = \frac{cc_1}{(aa_1)^2}$$

$$L = \frac{c}{a} \left( \frac{C_1}{c_1} \right)^2, \quad M = \frac{c_1}{a_1} \left( \frac{C}{c} \right)^2.$$

5. Gli intorno di ordini superiori forniscono semplicissime interpretazioni geometriche di questi invarianti. Fra le quadriche ( $\Gamma'$ ) esiste solamente una ( $Q$ ) che contiene l'elemento di quart'ordine di  $\Gamma$ : è quella per la quale  $v = \frac{c}{B}$ . Analogamente, la quadrica ( $Q_1$ ) contenente l'elemento di quart'ordine di  $\Gamma_1$ :  $v = \frac{c_1}{B_1}$ . Ne segue un significato di  $J = 1$ : questa è la condizione necessaria e sufficiente affinchè le due quadriche ( $Q$ ) e ( $Q_1$ ) coincidano.

Queste quadriche danno due invarianti proiettivi della trasformazione. La prima quadrica taglia sullo spigolo già definito una coppia di punti i quali hanno con i punti sulle tangenti un birapporto, evidentemente, invariante. La seconda quadrica fornisce, ugualmente, un invariante. Siano  $\varphi$  e  $\varphi_1$  questi invarianti. Di essi si ha

$$J = \frac{1 + \varphi}{1 + \varphi_1} \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi}} \quad , \quad H = I \frac{(1 + \varphi)(1 + \varphi_1)}{\sqrt{\varphi\varphi_1}}.$$

Per trovare un'interpretazione geometrica dell'invariante  $I$  - dunque anche per  $H$  -, consideriamo le cubiche rigate aventi come direttrice doppia la retta  $mm_1$  e come direttrice semplice lo spigolo opposto nel tetraedro già trovato. Esse formano il fascio

$$x_2 (a x_1 x_4 - B x_2 x_3) + \rho x_4 (B_1 x_1 x_4 - a_1 x_2 x_3) = 0.$$

Le loro cuspidi definiscono sulla retta  $mm_1$  un'omografia con  $m$  e  $m_1$  punti uniti e con birapporto (invariante) espresso da

$$(\sqrt{I} + \sqrt{I-1})^4.$$

6. L'introduzione degli elementi di quart'ordine delle curve  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$  basta per definire completamente il riferimento proiettivo e per interpretare geometricamente gli invarianti rimasti. A tale scopo, consideriamo gli  $\infty^1$  coni quadrici con vertice in  $m$  e passanti per altri quattro punti di  $\Gamma$  infinitamente vicini a  $m$ . Analogamente, esistono  $\infty^1$  coni relativi a  $\Gamma_1$ . Essi hanno per equazioni

$$\begin{aligned} B^2 x_3^2 + a C x_3 x_4 - a^2 B x_2 x_4 + \sigma x_4^2 &= 0 \\ B_1^2 x_1^2 + a_1 C_1 x_1 x_2 - a_1^2 B_1 x_2 x_4 + \tau x_2^2 &= 0. \end{aligned} \quad (\sigma \text{ e } \tau \text{ arbitrarie}).$$



Fra questi, esiste una coppia determinata per la quale la quartica di intersezione si spezza in due coniche. La retta ( $d$ ) comune ai piani delle dette coniche incontra le due tangenti di  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ . I birapporti delle sue intersezioni con le due tangenti e con le quadriche ( $Q$ ), rispettivamente ( $Q_1$ ), sono degli invarianti proiettivi della configurazione considerata.

La medesima retta ( $d$ ) incontra i piani principali (2) in punti che non appartengono al tetraedro sopra definito. Segue dunque che è determinato — con una sola ambiguità di segno — un punto unità. Questa scelta ha come conseguenze

$$a = a_1, \frac{a_1 C_1}{2 B_1^2} = \frac{a C}{2 B^2} = -1,$$

e tutti i coefficienti  $a, B, \dots$  risultano invarianti.

Si può dunque concludere:

*Gli intorni di quart'ordine di due curve trasformate asintotiche una dell'altra definiscono completamente un riferimento proiettivo rispetto al quale le due curve hanno gli sviluppi*

$$(\Gamma) \quad \begin{cases} \frac{x_3}{x_1} = a \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^2 + c \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_4}{x_1} = B \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^3 - \frac{2 B^2}{a} \left( \frac{x_2}{x_1} \right)^4 + [5] \end{cases},$$

$$(\Gamma_1) \quad \begin{cases} \frac{x_1}{x_3} = a \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^2 + c_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5] \\ \frac{x_2}{x_3} = B_1 \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^3 - \frac{2 B_1^2}{a} \left( \frac{x_4}{x_3} \right)^4 + [5], \end{cases}$$

dove i coefficienti  $a, B, \dots$  sono invarianti proiettivi.

*Osservazione.* Da ciò che precede, si può ricavare l'esistenza di alcuni piani e rette proiettivamente collegati a due asintotiche curvilinee di una superficie rigata.

**Matematica.** — *Sur le cas continu des probabilités en chaîne.* Nota di W. DOEBLIN, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Invarianti di complessi.* Nota di W. BLASCHKE, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Quadriche di Moutard e fascio canonico.* Nota di E. BORTOLOTTI, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Alcune superficie di terzo e quarto ordine.* Nota di R. CALAPSO, presentata dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Corrente traslocircolatoria, in presenza di un arco di circonferenza, con una sorgente eccentrica.* Nota di G. SESTINI, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

È stato recentemente studiato<sup>(2)</sup> il problema di una corrente liquida traslocircolatoria nel piano indefinito, in presenza di una lamina piegata ad arco di circonferenza e di una sorgente aperta nel centro, compreso il caso in cui l'arco si chiude a circonferenza. In questo lavoro si studia, dal punto di vista idrocinematico lo stesso problema, ma con la sorgente eccentrica, rimandando ad una seconda Nota la trattazione idromeccanica. L'eccentricità della sorgente influenza, al chiudersi dell'arco, soltanto il moto interno, mentre la corrente traslocircolatoria diviene quella nota in presenza di un disco rotondo.

*Sorgente.* — Nel piano  $z = x + iy$  si consideri il moto liquido in presenza di uno ostacolo costituito da una lamina rigida foggata ad arco di circonferenza, di raggio  $a$  e di apertura angolare  $2\alpha$ , generato da una sorgente puntiforme di portata  $q$ , posta in un punto generico  $z = z_1$  non giacente sull'arco. Poniamo l'origine degli assi nel centro della circonferenza e con l'asse delle  $y$  positive che dimezza l'arco.

La determinazione della velocità  $w_s$  del moto liquido si può fare ricorrendo alla relazione

$$(1) \quad z = -ia\zeta \frac{\zeta - j_0}{j_0\zeta + 1},$$

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) B. CALDONAZZO, *Sopra un problema idrodinamico relativo ad un arco di circonferenza*. «Rend. R. Acc. Lincei», ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXIII, 1<sup>o</sup> sem., pp. 322-328, 1936.

che, per  $|\zeta| \geq 1$ , stabilisce la corrispondenza biunivoca tra il piano  $z$  tagliato da l'arco e il piano  $\zeta$  forato dal cerchio  $|\zeta| \leq 1$ , con  $j_0 = -\frac{i}{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}$  immagine di  $z = 0$ . Inversamente dalla precedente si ricava

$$(2) \quad \zeta = -\frac{1}{2a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}} \left\{ z - ia \pm \sqrt{z^2 - 2ia z \cos \alpha - a^2} \right\},$$

dove la determinazione del radicale va fatta in modo che il segno  $+$  valga sul bordo convesso dell'arco, il segno  $-$  su quello concavo. L'immagine  $j_1$  sul piano  $\zeta$  del punto  $z_1$  è necessariamente esterna alla circonferenza  $|\zeta| = 1$ , per cui è  $|j_1| > 1$ ; quindi il suo reciproco  $j'_1$  rispetto alla circonferenza  $|\zeta| = 1$  è interno a questa,  $|j'_1| < 1$ .

Ciò premesso

$$(3) \quad f_s(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \log \frac{(\zeta - j_1)(\zeta - j'_1)}{\zeta},$$

a meno di una costante, inessenziale per il moto, definisce per  $|\zeta| \geq 1$  il potenziale complesso di un moto liquido irrotazionale, dovuto ad una sorgente di portata  $q$  nel punto  $\zeta = j_1$ . Per la (2), la (3) quale funzione di  $z$ , definisce sul piano  $z$  un moto analogo in presenza dell'arco, con una sorgente di portata  $q$  posta nel punto  $z = z_1$ . Dalla formula  $w_s = \frac{df_s}{d\zeta} =$

$= \frac{df_s}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dz}$ , si ottiene

$$\begin{aligned} w_s &= \frac{q}{2\pi} \left\{ \frac{1}{\zeta - j_1} + \frac{1}{\zeta - j'_1} - \frac{1}{\zeta} \right\} \frac{d\zeta}{dz} = \\ &= \frac{iq}{2\pi a j_0} \frac{(\zeta^2 - j_1 j'_1)(j_0 \zeta + 1)^2}{\zeta(\zeta - j_1)(\zeta - j'_1)(\zeta - j_1)(\zeta - j'_1)}, \end{aligned}$$

questa mostra che la  $w_s$ , essendo  $|j_1 j'_1| = 1$  si annulla al finito in due punti del contorno cui corrispondono nel piano  $\zeta$  gli estremi del diametro, che passa per il punto immagine della sorgente. Si ha inoltre che  $w_s$  diviene infinita agli estremi dell'arco ( $\zeta = j$ ,  $\zeta = j'$ ) e nella sorgente ( $\zeta = j_1$ ), non avendo corrispondenti nel campo del moto i punti  $\zeta = 0$  e  $\zeta = j'_1$ . Si ha infine che per  $\zeta$  tendente all'infinito  $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} w_s = 0$ .

*Sorgente con l'arco chiuso.* — Facciamo adesso tendere  $\alpha$  a  $\pi$ , con questo l'arco tende a chiudersi a circonferenza nel punto  $z = -ia$ , in modo che sia sempre  $|z_1| < a$ , con che la sorgente resta interna alla circonferenza limite dell'arco.

La (2), per  $\alpha \rightarrow \pi$ , per i punti esterni si riduce alla dilatazione

$$\zeta = \frac{\bar{z}}{a},$$

mentre per i punti interni degenera in  $\zeta = -i$ , il che importa che tutti i punti interni hanno sul piano  $\zeta$  le immagini addensate in  $-i$ .

Per quanto riguarda il campo esterno, sostituendo direttamente nella (3) a  $\zeta$  il suo limite  $\frac{\bar{z}}{a}$  e a  $j_1$  il suo limite  $-i$ , che è anche limite per  $j'_1$ , si ha, a meno di una costante, per i punti esterni

$$(4) \quad f_{s,e}^* = \lim_{\alpha \rightarrow \pi} f_s = \frac{q}{2\pi} \log \frac{(\bar{z} + ia)^2}{\bar{z}},$$

che è il potenziale di un moto liquido irrotazionale, nel campo esterno al cerchio  $|\bar{z}| \leq a$ , determinato da una sorgente di portata  $2q$ , aperta nel punto  $\bar{z} = -ia$ , dove cioè gli estremi dell'arco si sono accostati.

Lo stesso passaggio al limite per i punti interni non è immediatamente lecito sulla (3). Ciò dipende dal fatto che la  $f_s$ , con la determinazione (3) al tendere di  $\alpha \rightarrow \pi$ , diviene infinita in ogni punto del campo. Bisognerà ora imporre che la  $f_s$  conservi uno stesso valore finito in un assegnato punto, diverso dalla sorgente, ciò che determina la costante, la quale inessenziale, nel caso dell'arco aperto e nel caso dell'arco chiuso per i punti esterni, non lo è più per il caso limite nel campo interno. Per di più, poichè la rappresentazione conforme sul piano  $\zeta$  ora degenera, conviene operare direttamente sul piano  $\bar{z}$ .

Cominciamo con l'imporre ad es.  $f_s(-i) = \frac{q}{2\pi} \log i$ . Con questo la  $f_s(\zeta)$  diventa

$$f_{s,i} = \frac{q}{2\pi} \log \frac{(\zeta - j_1)(\zeta - j'_1)}{\zeta(i + j_1)(i + j'_1)}.$$

Si considerino adesso i due rapporti

$$Z = \frac{\zeta - j_1}{i + j_1} \quad \text{e} \quad Z' = \frac{\zeta - j'_1}{i + j'_1},$$

ed esprimiamoli in funzione di  $\bar{z}$ . Posto

$$A(\bar{z}) = \sqrt{\bar{z}^2 - 2ia\bar{z} \cos \alpha - a^2},$$

dalla (2), con il radicale preso con il segno —, si ha

$$Z = \frac{\bar{z} - \bar{z}_1 - \sqrt{A(\bar{z})} + \sqrt{A(\bar{z}_1)}}{2ia \sin \frac{\alpha}{2} + \bar{z}_1 - ia - \sqrt{A(\bar{z}_1)}};$$



al tendere di  $\alpha$  a  $\pi$  questo rapporto assume la forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Operando con il teorema di de l'Hôpital si ottiene

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} Z = \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1}{\tilde{\alpha} + ia} \cdot \frac{2ia}{\tilde{\alpha}_1 - ia},$$

che per  $\tilde{\alpha} = ia$  diventa uguale a  $-1$ . Esaminiamo adesso l'altro rapporto  $Z'$ . Ricordando che

$$j_1 = \frac{1}{2a \sin \frac{\alpha}{2}} \{ \tilde{\alpha}_1 - ia - \sqrt{A(\tilde{\alpha}_1)} \}$$

definisce  $j_1$  quale funzione regolare dei due parametri  $\tilde{\alpha}_1$  ed  $\alpha$  in tutto il campo  $\tilde{\alpha}$  e per ogni valore di  $\alpha$ , dalla (1) si dimostra facilmente che

$$j_1'' = \frac{1}{2a \sin \frac{\alpha}{2}} \{ \tilde{\alpha}_1' - ia - \sqrt{A(\tilde{\alpha}_1')} \},$$

con  $\tilde{\alpha}_1'$  immagine coniugata di  $\tilde{\alpha}_1$  rispetto alla circonferenza  $|\tilde{\alpha}| = a$ . Ne segue che la  $Z'$  si ottiene da  $Z$  con il solo scambio di  $\tilde{\alpha}_1$  in  $\tilde{\alpha}_1'$  e perciò il limite di  $Z'$ , data la regolarità delle funzioni, si otterrà da quello di  $Z$  con il solo scambio di  $\tilde{\alpha}_1$  in  $\tilde{\alpha}_1'$ , per cui

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} Z' = \frac{\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1'}{\tilde{\alpha} + ia} \cdot \frac{2ia}{\tilde{\alpha}_1' - ia},$$

che, per  $\tilde{\alpha} = ia$ , diventa uguale a  $-1$ .

Si ha infine per i punti interni, a meno di una costante, che  $f_{s,i}^*$ , limite di  $f_{s,i}$  è dato da

$$(5) \quad f_{s,i}^* = \frac{q}{2\pi} \log \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1)(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1')}{(\tilde{\alpha} + ia)^2}.$$

Si vede subito che questo è il potenziale del moto dovuto ad una sorgente di portata  $q$  posta nel punto  $\tilde{\alpha}_1$  e ad una sorgente di portata  $-2q$  posta in  $\tilde{\alpha} = -ia$ , oltre che ad una sorgente di portata  $q$  nel punto  $\tilde{\alpha}_1'$  esterno al campo considerato. Dalle (4) e (5) si deducono le corrispondenti velocità

$$w_{s,i}^* = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{\tilde{\alpha} - ia}{\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} + ia)};$$

$$w_{s,i}^* = \frac{q}{2\pi} \cdot \frac{(\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1')(ia + \tilde{\alpha}_1) - (\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}_1)(ia + \tilde{\alpha}_1')}{\tilde{\alpha} + ia}.$$

Queste mostrano che l'eccentricità della sorgente influenza soltanto il moto interno non avendo alcun effetto sul moto esterno. Si ha inoltre da

queste che il moto esterno ha un punto di arresto per  $z = ia$ , mentre per quello interno la velocità si annulla nel punto definito dai parametri  $a$  e  $z_1$

$$\tilde{z} = \frac{-ia(\tilde{z}_1^2 + a^2 - 2ia\tilde{z}_1)}{(\tilde{z}_1^2 + a^2 + 2ia\tilde{z}_1)},$$

di modulo  $a$  e quindi sul contorno.

*Corrente traslocircolatoria.* — Una corrente traslocircolatoria, di velocità asintotica  $V$ , formante con l'asse delle  $x$  l'angolo  $\beta$  e di circolazione  $C$  attorno all'ostacolo, investe l'arco aperto sopra considerato. La velocità dovuta a questa corrente è pertanto, tenuto conto della (1),

$$w_t + w_c = - \left\{ a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} V \left( e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) + \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} \right\} \frac{(j_0 \zeta + 1)^2}{ia j_0 (\zeta - j) (\zeta - j')},$$

con  $w_t$  velocità dovuta alla corrente traslatoria e  $w_c$  velocità dovuta a quella circolatoria. Combinando la corrente traslocircolatoria con quella dovuta alla sorgente il moto risultante, compatibile con la presenza dell'ostacolo, ha la velocità  $w = w_t + w_c + w_s$ , cioè

$$(6) \quad w = - \frac{(j_0 \zeta + 1)^2}{ia j_0} \left\{ a \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} V \left( e^{-i\beta} - \frac{e^{i\beta}}{\zeta^2} \right) + \frac{C}{2\pi i} \frac{1}{\zeta} + \right. \\ \left. + \frac{q}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta - j_1} + \frac{1}{\zeta - j_1'} - \frac{1}{\zeta} \right) \right\} \frac{1}{(\zeta - j)(\zeta - j')}.$$

Questa mostra che la velocità risultante  $w$  resta ancora in generale infinita per  $\zeta = j$  e per  $\zeta = j'$ , cioè nei punti estremi dell'arco. La presenza però della corrente traslocircolatoria permette, disponendo dei parametri  $V$ ,  $\beta$ ,  $C$ , oltre che di  $q$  e  $j_1$ , supposti fissi  $a$  ed  $\alpha$ , di regolarizzare il moto in uno od in entrambi gli estremi dell'arco.

Ad esempio nel caso particolare  $z_1 = y_1 i$ , con che  $j_1 = ci$ ,  $j_1' = \frac{i}{c}$  con  $|c| > 1$ ,  $C = 0$ ,  $\beta = -\frac{\pi}{2}$ , dalla (6) si trova che  $w$  resta finita negli estremi dell'arco, quando i parametri  $V$ ,  $q$ ,  $c$  soddisfano l'unica equazione

$$\frac{q}{\pi} + 2aV \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \left( 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} + \frac{1 + c^2}{c} \right) = 0.$$

Per questa l'espressione tra le  $\{ \}$  (6) si annulla tanto per  $\zeta = j$  che per  $\zeta = j'$  e la  $w$ , regolare ora negli estremi, diventa

$$w = - \frac{(j_0 \zeta + 1)^2}{j_0} \frac{V \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} (\zeta^2 + 1)}{\zeta^2 (\zeta - j_1) (\zeta - j_1')},$$

con l'unico punto d'infinito nella sorgente, dove  $\zeta = j_1$  ( $\zeta = 0$  e  $\zeta = j_1'$  non avendo corrispondenti nel campo  $\tau$ ).

Nel caso limite dell'arco chiuso la corrente traslocircolatoria per i punti esterni diviene quella nota in presenza di un disco rotondo e si sovrappone a quella di velocità  $w_{s,e}^*$  sopra definita <sup>(1)</sup>. Invece nel campo interno la corrente traslocircolatoria non può penetrare e quindi vi rimane solo quella di velocità  $w_{s,i}^*$ .

**Meccanica.** — *Dimostrazione generale del Principio del De Saint-Venant.* Nota di O. ZANABONI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.

È noto che il famoso principio del De Saint-Venant, sulla equivalenza (nei riguardi degli effetti elastici) dei sistemi di forze superficiali aventi identiche caratteristiche statiche, è stato enunciato dal suo scopritore senza dimostrazione.

I successivi cultori della materia hanno più volte tentato di colmare questa lacuna, ma sono riusciti unicamente a riconoscere l'esattezza del principio attraverso particolari verifiche sperimentali, tanto che, ormai, i trattatisti si limitano alla sua pura e semplice enunciazione, e ad insistere sulla sua portata pratica.

L'Albenga ammette senz'altro il principio come una verità intuitiva, e lo commenta asserendo che « Questo postulato, di cui si è invano tentata una giustificazione teorica, è confermato dai risultati dell'esperienza » <sup>(3)</sup>.

Posteriormente a tale affermazione, il Supino riuscì a risolvere la questione per un campo elastico isotropo a due dimensioni, ed a dare contemporaneamente una limitazione quantitativa del valore delle tensioni in funzione della distanza dalla zona superficiale sollecitata <sup>(4)</sup>: anche rimanendo nell'orbita più ristretta di un semplice apprezzamento qualitativo, quale è offerto in realtà dall'enunciato del principio del De Saint-Venant, non mi risulta che in prosieguo di tempo sia stato raggiunto qualche apprezzabile risultato più generale.

(1) È questo il moto considerato dal prof. U. CISOTTI, *Un criterio di valutazione delle azioni dinamiche sopra un ostacolo circolare munito di una sorgente ed immerso in una corrente traslocircolatoria.* « Rend. R. Acc. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXII, 2° sem., pp. 275-279, 1935.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(3) G. ALBENGA, *Meccanica applicata alle costruzioni.* Parte 1<sup>a</sup>. Teoria dell'elasticità. Ed. lit. Viretto. Torino, 1922-23.

(4) G. SUPINO, *Sopra alcune limitazioni per la sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del Principio del De Saint-Venant.* « Annali di Matematica pura ed applicata », 1931, ser. IV, to. IX.

In questa sede si darà la dimostrazione del classico principio senza porre alcuna restrizione: vale a dire prendendo in considerazione un qualsiasi solido elastico, anche a tre dimensioni, ed eventualmente anisotropo.

Allo svolgimento vero e proprio delle considerazioni che ci interessano, faremo precedere la deduzione di una relazione ausiliaria indispensabile; come conclusione, noteremo che, il nostro svolgimento, consente di attribuire al principio una portata assai più ampia di quella comunemente intesa.

1. Sia un corpo elastico  $C_1$ , libero da forze di massa, in equilibrio, e soggetto a forze agenti unicamente su alcune regioni limitate del contorno, per modo che su di questo si possa individuare almeno una zona scarica: in tali condizioni il sistema delle forze esterne deve essere equilibrato.

Si disponga inoltre di un secondo corpo  $c_2$ , scarico completamente, il quale sia così conformato da possedere al contorno una zona  $S$  che possa combaciare con una corrispondente zona scarica del contorno di  $C_1$ , per modo che vi sia la possibilità di costituire il corpo elastico  $C_2 = C_1 + c_2$ , proveniente dall'unione dei due precedentemente considerati.

Sotto l'azione delle forze date  $F$ , competeranno, a  $C_1$  e  $C_2$ , i lavori di deformazione  $L_1$  ed  $L_2$ ; e, qualora si pongano in evidenza le reazioni  $R$  che  $C_1$  e  $c_2$  si trasmettono attraverso la parte comune  $S$  di contorno, si potrà asserire che  $L_2$  è dato dalla somma del lavoro  $l_2$  che le  $R$  compiono su  $C_2$ , più il lavoro che,  $F$  ed  $R$  insieme, compiono su  $C_1$ .

Quest'ultimo lavoro può a sua volta scindersi in tre addendi, l'uno dei quali è il lavoro, già chiamato con  $L_1$ , che  $F$  compie su  $C_1$  indipendentemente dalle  $R$ , l'altro è il lavoro  $\lambda_1$  che le  $R$  compiono su  $C_1$  indipendentemente dalle  $F$ , ed infine il terzo è il lavoro indiretto  $l_m$  che  $F$  compie su  $C_1$  per l'azione di  $R$ , o viceversa.

Notiamo che tale decomposizione è fisicamente legittima in quanto, per l'equilibrio di  $c_2$ , anche le  $R$  costituiscono un sistema equilibrato di forze al pari delle  $F$ .

Abbiamo dunque:

$$(1) \quad L_2 = L_1 + \lambda_1 + l_m + l_2.$$

Chiamato ora con  $\varepsilon$  un numero arbitrario e sufficientemente piccolo, immaginiamo di sostituire le  $R$ , sia su  $C_1$  che su  $c_2$ , col sistema, ancora equilibrato,  $(1 + \varepsilon)R$ : potremo allora prendere in considerazione di nuovo i termini analoghi e corrispondenti a quelli che si presentano al 2° membro della (1), e stabilire che la loro somma vale:

$$L'_2 = L_1 + (1 + \varepsilon)^2 \lambda_1 + (1 + \varepsilon) l_m + (1 + \varepsilon)^2 l_2.$$

Ciò per la legge di proporzionalità, e per la relazione quadratica intercedente tra forze e lavoro di deformazione.



Se in queste ultime condizioni di carico pensiamo di ricostituire il corpo  $C_2$ , troviamo che le forze esterne non sono variate, che il sistema elastico è ancora equilibrato, ma che non è più congruente dato che, le uniche tensioni interne su  $S$ , atte a soddisfare questa condizione, sono le  $R$ .

In virtù del teorema di Menabrea potremo dunque concludere che la quantità  $L'_2$ , calcolata per  $C_2$  colle regole formali colle quali si deduce il lavoro di deformazione, deve essere maggiore di  $L_2$ .

Sarà dunque:

$$L'_2 - L_2 = \varepsilon (l_m + 2\lambda_1 + 2l_2) + \varepsilon^2 (\lambda_1 + l_2) > 0.$$

Siccome la disuguaglianza deve valere qualunque sia il segno ed il valore di  $\varepsilon$ , se ne deduce che:

$$(2) \quad l_m = -2(\lambda_1 + l_2).$$

Valendoci di questa notevole relazione per sostituirla in (1), si trova:

$$(3) \quad L_2 = L_1 - (\lambda_1 + l_2)$$

che è la formula richiesta.

Ricordando che  $\lambda_1$  ed  $l_2$  sono lavori di deformazione, e perciò per loro natura sempre positivi, la (3) stabilisce che:

« Allorchè, nelle convenute condizioni di carico, che si suppone vengano mantenute invariate, un corpo  $C_1$  si accresce di materia e diviene un nuovo corpo  $C_2$ , il primitivo lavoro di deformazione  $L_1$  passa ad un valore  $L_2$  che è certamente minore del primo ».

2. Sia di nuovo un corpo libero nello spazio, non soggetto a forze di massa, caricato in una zona del contorno da un sistema equilibrato di forze, e presentante una zona libera del contorno medesimo.

A partire da questa, mediante successive sovrapposizioni di materia, si può individuare una serie continua di corpi corrispondenti ai vari gradi di accrescimento, e potremo anche, nell'insieme così definito, introdurre un ordine, assumendo come elemento che precede, quello che può essere completamente contenuto nell'altro.

Nulla impedisce che il processo di accrescimento (determinato sebbene arbitrario) prosegua indefinitamente, e noi ci porremo precisamente in questo caso.

Insieme all'aggregato dei corpi, consideriamo l'aggregato ( $L$ ) dei corrispondenti valori assunti dal lavoro di deformazione, il quale verrà ordinato di conseguenza.

Le conclusioni tratte al paragrafo precedente ci consentono di affermare che i successivi elementi di ( $L$ ) sono in progressione decrescente, essendo

corrispondenti a corpi che si deducono l'uno dall'altro per continua aggiunta di materia.

Notiamo inoltre che  $(L)$  è limitato inferiormente, poichè il lavoro di deformazione è sempre positivo.

Ne concludiamo, per cose note, che il lavoro di deformazione ammette un limite inferiore cui tende come limite.

In base al criterio di Cauchy, vi sarà allora un elemento  $(\alpha)$  a partire dal quale, per tutte le coppie di elementi seguenti, è soddisfatta la relazione :

$$(4) \quad L_p - L_q < \varepsilon$$

con  $\varepsilon$  scelto comunque piccolo.

Questa disuguaglianza, una volta fissato  $\varepsilon$ , comincia a valere a distanza finita, ed è indipendente dal fatto che si abbiano a considerare, o no, degli elementi che seguano il corrispondente  $(q)$  di  $L_q$ .

Escludendo allora tutti i corpi oltre  $(q)$ , ci riduciamo completamente al finito, ed anzi, ricordando l'andamento decrescente di  $L$ , ci sarà consentito di retrocedere l'elemento  $(\alpha)$ , per modo che l'intervallo  $(\alpha \div q)$  risulta ampliato.

Siccome il valore di  $L$  non dipende dal modo col quale il corpo si può supporre generato, nè tanto meno dalla possibilità che da esso se ne possano dedurre altri a piacimento, e siccome il nostro ragionamento non ha richiesto ipotesi alcuna circa l'ampiezza dell'intervallo  $(\alpha \div q)$ , così si può concludere che:

« Per un corpo sufficientemente esteso, sottoposto a sole forze equilibrate superficiali, esiste una sua porzione, la quale può assumere anche notevole entità rispetto al corpo iniziale, che può considerarsi come inesistente agli effetti di una valutazione pratica del lavoro di deformazione: quest'ultimo può essere calcolato assumendo la distribuzione delle tensioni che competerebbe alla sola parte ridotta del corpo ».

Abbiamo così formulato una proposizione che è un modo di enunciare il principio del De Saint-Venant; è tuttavia possibile arrivare anche alla considerazione delle tensioni, che riesce più consueta.

Infatti, ricordando la (3), ricaviamo che la (4) equivale a :

$$\lambda_p + l_q < \varepsilon$$

dove, al primo membro, compaiono i lavori di deformazione che le azioni interne in  $(q)$ , trasmettentensi attraverso la superficie che lo separa da  $(p)$ , generano nei due corpi  $(p)$  e  $(q - p)$ .

Siccome si tratta qui di due quantità positive, la loro somma può divenire infinitesima soltanto se divengono tali i due addendi separatamente, ed in particolare  $l_q$  che si riferisce al solido, finito,  $(q - p)$ .

A sua volta  $l_q$  è l'integrale, esteso a tale volume, del potenziale elementare  $\varphi_q$ , per sua natura essenzialmente positivo; cosicchè, l'essere  $l_q$  infinitesimo, richiede che lo sia pure  $\varphi_q$ .

Infine questa quantità è funzione quadratica sempre positiva delle tensioni, ed uguale a zero nel solo caso che queste ultime si annullino tutte contemporaneamente.

Dunque, se la  $\varphi_q$  è infinitesima, tutte le tensioni interne debbono, a loro volta, tendere a zero.

CONCLUSIONE. — La dimostrazione svolta non ha richiesto alcuna ipotesi circa il numero di dimensioni del corpo in esame, nè sulla sua natura fisica.

Possiamo quindi ritenere provato il principio, sia nel piano che nello spazio, e per la più arbitraria distribuzione delle costanti elastiche.

L'unica condizione imposta dal nostro ragionamento è che le forze esterne sul contorno siano così disposte da consentire un ideale accrescimento indefinito del corpo.

Perchè ciò possa avvenire, è necessario che la porzione minima continua di contorno, che si può concepire come il supporto materiale di tutte le forze esterne, risulti aperta; o, in caso contrario, che le forze agiscano all'interno del volume racchiuso da esso contorno (per esempio all'interno di una sfera cava).

È chiaro quindi che le forze date, in equilibrio complessivamente, possono anche interessare varie zone distinte della superficie del corpo, per modo che risulta lecito considerare alcune di esse anche come reazioni di vincoli precedentemente eliminati.

Mediante questa osservazione, il principio del De Saint-Venant viene ad estendersi in misura notevolissima ed a comprendere, si può dire, tutti i corpi, qualsiasi possano essere le loro condizioni statiche.

Degli sviluppi che l'argomento consente, si tratterà in una prossima Nota, destinata a mostrare come, mediante questa generalizzazione, si possano spiegare qualitativamente con un criterio unitario, molti casi di concentrazione di tensione che, studiati separatamente, richiedono laboriosi sviluppi analitici.

**Fisica.** — *Energia potenziale e curvatura nei campi gravitazionali.* Nota di L. LABOCCETTA, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. A. CROCCO.

I. DENSITÀ DELL'ENERGIA POTENZIALE. — Una massa  $m$  uniformemente distribuita, in uno strato infinitamente sottile, alla superficie di una sfera di raggio  $r$ , per effetto della reciproca attrazione fra le sue parti tende a contrarsi come se fosse soggetta ad una pressione  $P$  agente dall'esterno sulla sua superficie ed avente il valore

$$(1) \quad P = \frac{1}{8 \pi k} \left( \frac{k m}{r^2} \right)^2 = \frac{f^2}{8 \pi k}$$

dove si è posto  $f = km/r^2$ , con  $k$  costante della gravitazione. Contraendosi la sfera se il raggio di essa diminuisce di  $dr$  si ha una variazione di volume  $dv = 4 \pi r^2 dr$  alla quale corrisponde un lavoro

$$(2) \quad dL = P dv = (f^2/8 \pi k) dv.$$

Mentre si compie questo lavoro lo spazio, nel quale l'intensità del campo ha il valore  $f$ , si accresce dello stesso volume  $dv$  a spese di quello dove l'intensità è nulla. Risulta da questo semplice ragionamento, analogo a quello che per l'attrazione di due strati piani indefiniti trovasi ora esposto anche in trattati elementari<sup>(2)</sup>, che l'apparizione di un campo gravitazionale corrisponde ad una diminuzione dell'energia potenziale, per cui deve prendersi negativamente la densità  $\Delta$  di questa nello spazio da essa occupato,

$$(3) \quad \Delta = dL/dv = -f^2/8 \pi k = P.$$

Il segno negativo della densità indica pure che la pressione, da essa misurata, è diretta verso l'interno della sfera.

2. EQUIVALENZA DELLA MASSA E DELL'ENERGIA. — Una sfera solida può esser supposta formata da tanti strati sferici infinitamente sottili che, partendo da un raggio infinitamente grande si contraggono fino ad applicarsi successivamente l'uno sull'altro, nel mentre le forze gravitazionali compiono

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) Ved. pp. 299-300 di J. PERRIN, *Les éléments de la Physique*. Paris (1929), Albin Michel Ed.



due diversi lavori ai quali corrisponde la formazione del campo esterno alla sfera:

a) Il lavoro  $dL_1$  dovuto all'attrazione su se stesso dello strato sferico sottilissimo di massa infinitamente piccola  $dm$ .

b) Il lavoro  $dL_2$  dovuto all'attrazione, sullo stesso strato, della sfera di massa  $m$  già formata

$$(4) \quad dL_1 = (k dm / 2 r^2) dm dr, \quad dL_2 = (km / r^2) dm dr.$$

Il primo essendo infinitesimo di ordine superiore rispetto al secondo può essere trascurato. Quindi il lavoro totale compiuto nei successivi passaggi delle masse elementari  $dm$  dalla sfera di raggio  $r + dr$  a quella di raggio  $r$ , mentre la massa della sfera in formazione cresce da zero ad  $m$  è semplicemente

$$(5) \quad L_2 = \int_0^m \left( \frac{k dr}{r^2} \right) m dm = \frac{km^2 dr}{2 r^2}.$$

La densità dell'energia nello spazio compreso fra le due sfere di raggi  $r$  ed  $r + dr$  è dunque

$$(6) \quad \Delta = \frac{L_2}{4 \pi r^2 dr} = \frac{1}{8 \pi k} \left( \frac{km}{r^2} \right)^2 = \frac{f^2}{8 \pi k}$$

si ritrova cioè lo stesso valore (3) che si era trovato nel caso dello strato sottilissimo.

La diminuzione dell'energia in tutto lo spazio durante la formazione di una sfera di massa  $m$  e raggio  $R$ , si ottiene integrando il lavoro elementare (5) mentre  $r$  varia prima da zero ad  $R$  e poi da  $R$  ad  $\infty$ .

Nel primo intervallo, se si suppone che nel formarsi la sfera si sia accresciuta restando sempre sfera normale<sup>(1)</sup>, la massa cresce linearmente col raggio e ha il valore  $mr/R$  per il raggio  $r$ ; nel secondo intervallo essa resta invece costante. Si ha perciò per l'energia  $E_t$  di tutto lo spazio

$$(7) \quad -E_t = \int_0^R \frac{k}{2 r^2} \left( \frac{mr}{R} \right)^2 dr + \int_R^\infty \frac{km^2}{2 r^2} dr = \frac{km^2}{2 R} + \frac{km^2}{2 R}$$

$$-E_t = km^2 R$$

e siccome  $R$  è il raggio di una sfera normale di massa  $m$ , cosicchè è  $R = km/c^2$ , l'energia totale, ponendo  $m = n\mu$ , con  $\mu$  massa dell'atomo elementare<sup>(2)</sup>, diventa

$$(8) \quad E_t = -mc^2 = -n\mu c^2.$$

(1) Per la definizione e le proprietà delle sfere normali ved. L. LABOCCETTA, *Definizione assoluta e significato fisico delle costanti gravitazionali di Newton, Einstein, Keplero*. Questi «Rendiconti», vol. XX, ser. 6<sup>a</sup>, novembre 1924, p. 327.

(2) Come indicato in un precedente scritto conviene come massa dell'atomo elementare assumere quella del neutrone anzichè 1/16 di  $O_{16}$ .

D'altra parte, com'è noto<sup>(1)</sup> all'espressione dell'energia cinetica si può dar forma quantica, essendo

$$(9) \quad \frac{1}{2} m v^2 = n \cdot \frac{1}{2} 2 \pi \hbar_1 \nu_0 \beta^2$$

dove  $\hbar_1 = \mu c \lambda_1 = h_1/\pi$  è il momento angolare unitario corrispondente al quanto gravitazionale  $h_1$  nel sistema di unità atomiche gravitazionali (u. a. g.),  $\nu_0 = 1/2\pi\tau$  è la frequenza fondamentale, cioè la frequenza propria della sfera atomica gravitazionalmente definita, e  $\beta = v/c$ ; quindi la (8) può scriversi

$$(10) \quad E_t = - n \cdot 2 \pi \hbar_1 \cdot \nu_0$$

poichè per  $v = c$  diventa  $\beta = 1$ .

Nel sistema di u. a. g., nel quale  $c = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\hbar_1 = 1$ ,  $\nu_0 = 1/2\pi$ , le tre relazioni

$$(11) \quad m = n\mu, \quad E_t = - n\mu c^2, \quad E_t = - n \cdot 2\pi \hbar_1 \cdot \nu_0$$

diventano

$$(12) \quad m = n, \quad E_t = - n, \quad E_t = - n.$$

Dunque la massa di una sfera normale è misurata dallo stesso numero che, col segno cambiato, misura l'energia del campo che l'accompagna, e questo numero, che è un numero intero, indica quindi sia il numero di atomi formanti la sfera, sia il numero dei quanti esprimenti l'energia del campo gravitazionale ad essa dovuto.

Poichè ad ogni atomo elementare corrisponde una sfera atomica gravitazionalmente definita, che è una sfera normale di massa  $\mu$ , segue da quanto precede che l'energia potenziale dell'universo è data da un numero intero  $N$ , preso negativamente, che è il numero degli atomi elementari in esso esistenti ai quali è dovuto il campo gravitazionale.

L'interpretazione di questo fatto è semplice se si ammette che la materia sia energia concentrata, in modo che ad una massa  $m$  corrisponda un'energia  $mc^2$ , perchè esso significa che negli atomi elementari dell'universo trovasi concentrata l'energia sottratta allo spazio per formare il campo gravitazionale in esso esistente.

3. LA CURVATURA ASSOCIATA AI PUNTI DELLO SPAZIO NEI CAMPI GRAVITAZIONALI. — Poichè ad un'energia  $E$  corrisponde una massa  $m = E/c^2$ , chiamando  $\Delta'$  la densità della massa corrispondente alla densità  $\Delta$  della

(1) L. LABOCCETTA, *L'equivalenza della forma classica e della forma quantica della espressione dell'energia cinetica*. « Ric. Scient. », VII, 2 (1936) p. 637.

energia, data dalla (3) in un punto nel quale l'intensità del campo è  $f$ , si dovrà avere

$$(13) \quad \Delta' = \frac{\Delta}{c^2} = \frac{f^2}{8 \pi k c^2} = \frac{km^2}{8 \pi r^4 c^2}.$$

Siccome basta la sola densità a definire completamente una sfera normale, segue da ciò che ad ogni punto dello spazio si possono associare due diverse sfere normali:

a) la sfera di raggio  $R_1$  alla cui superficie l'intensità della gravità ha lo stesso valore  $f$  che nel punto considerato;

b) La sfera di raggio  $R_2$  la cui densità  $\Delta'$  è, in valore assoluto, uguale a quella della massa dell'energia nello stesso punto.

Avuto riguardo alla relazione  $R = km/c^2$  che lega il raggio alla massa di una sfera normale, si trova per il valore dei due raggi

$$(14) \quad R_1 = c^2/f, \quad R_2 = 3c^2/4\pi k\Delta'.$$

Dovendo però l'intensità  $f$  e la densità  $\Delta'$  corrispondersi, secondo la (13), detta  $m$  una massa, scelta ad arbitrio, ed  $r$  la distanza di essa dal punto considerato alla quale dovrebbe essere collocata per produrre in esso il campo effettivamente esistente, si deve avere contemporaneamente

$$(15) \quad f^2 = k^2 m^2/r^4, \quad \Delta' = km^2/8 \pi r^4 c^2$$

e con questi valori le (14) forniscono per il rapporto fra i due raggi, o meglio fra le curvature delle due sfere

$$(16) \quad R_1^2/R_2^2 = \frac{4 \pi k c^2}{3} \frac{\Delta'}{f^2} = 6.$$

Riesce perciò indifferente, nel descrivere lo spazio nel quale si ha un campo gravitazionale, servirsi dell'una o dell'altra delle due sfere definendo l'intensità o la densità mediante la curvatura  $1/R_1^2$ ,  $1/R_2^2$  dell'una o dell'altra di esse.

In entrambi i casi la curvatura nulla indica che è nullo il campo: questa condizione si verifica a distanza infinita da una massa attraente.

4. LE COSTANTI DI EINSTEIN E DI HUBBLE. — Essendo la sfera atomica gravitazionalmente definita una sfera normale formata con la massa dell'atomo elementare, le espressioni del raggio e della densità di essa, contenute nel quadro delle u. a. g. <sup>(1)</sup> valgono anche per il raggio  $r$  e la densità  $\delta$  di una sfera normale di massa  $m$  qualsiasi,

$$(17) \quad r = km/c^2, \quad \delta = 3c^6/4\pi k^3 m^2.$$

(1) Ved. lo scritto citato alla nota (1) di p. 123.

Portando nella seconda di queste due relazioni il valore di  $m$  ricavato dalla prima si ha

$$(18) \quad \delta = \frac{6 c^2}{8 \pi k r^2} = \frac{6}{\chi r^2}$$

avendo posto  $8 \pi k/c^2 = \chi$ ; e si scorge che  $\chi$ , costante gravitazionale di Einstein, naturalmente si presenta quando si voglia esprimere la densità di una sfera normale in funzione del suo raggio.

La densità  $\delta = m/V$  ora considerata è quella che corrisponde alla massa  $m$  di cui è formata la sfera di volume  $V$ ; ma in questa è contenuta anche una energia  $E$  che risulta da una parte concentrata  $mc^2$ , corrispondente alla massa  $m$ , e da una parte diffusa dall'energia potenziale  $-\frac{1}{2} mc^2$  esistente nell'interno della sfera. Per la densità  $\Delta$  dell'energia si ha perciò

$$(19) \quad \Delta = E/V = \frac{m}{V} c^2 - \frac{1}{2} \frac{m}{V} c^2 = \frac{1}{2} \delta c^2$$

$$(20) \quad \Delta = \rho c^2$$

avendo chiamato  $\rho$  la densità  $\delta/2$  della massa dell'energia. Ciò significa che per passare dalla densità  $\delta$  della materia a quella  $\Delta$  dell'energia bisogna moltiplicare per  $c^2/2$ ; dalla (19) insieme con la (18) si ha perciò

$$(21) \quad \Delta = \frac{1}{2} \delta c^2 = \frac{3}{\chi} \left( \frac{c}{r} \right)^2 = \rho c^2$$

$$(22) \quad \chi \rho c^2 = 3 (c/r)^2.$$

Confrontando questa equazione con quella di Einstein <sup>(1)</sup>

$$(23) \quad \chi \rho c^2 = 3 h^2$$

che è una relazione fra la costante  $h$  di Hubble e la densità media  $\rho$  della sfera dell'universo, risulta

$$(24) \quad h = c/r$$

ad  $r$  dovendosi dare il significato di raggio della sfera dell'universo, supposta equivalente ad una sfera normale, come si era già empiricamente trovato in un precedente scritto <sup>(2)</sup>.

(1) Ved. p. 109 di A. EINSTEIN, *Sur la structure cosmologique de l'espace*. Hermann & Cie. Ed., Paris, 1933.

(2) *Definizione assoluta e significato fisico della costante di Hubble*. Questi « Rendiconti », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XX, dicembre 1934, p. 429.



Se è  $N$  il numero di atomi elementari esistenti nell'universo si è visto che nel sistema di u. a. g. per la costante di Hubble si deve avere  $H = 1/N$ , dal che segue che questa costante è legata in modo semplicissimo alle altre costanti cosmiche fondamentali. Infatti dalle proprietà caratteristiche delle sfere normali si deduce che per la massa  $M$ , il raggio  $R$ , il tempo proprio  $T$  (giorno cosmico), la curvatura e la densità  $\Delta$  della sfera dell'universo, nel sistema di u. a. g. si deve avere <sup>(1)</sup>

$$(25) \quad \begin{cases} M = H^{-1} & , & R = H^{-1} & , & T = 2\pi H^{-1} \\ 1/R^2 = H^2 & , & \Delta = 3H^2/4\pi & . \end{cases}$$

Inoltre dalla relazione  $H = c/R = c/N\lambda$  si ricava

$$(26) \quad \lambda_1 = c/HN$$

il che significa che anche il raggio della sfera atomica, gravitazionalmente definita ponendo uguali all'unità la velocità della luce, la costante della gravitazione e la massa del neutrone, è legato in modo semplice alla costante di Hubble che si deduce dalla misura dello spostamento verso il rosso delle righe spettrali delle nebulose estragalattiche, e al numero degli atomi elementari dell'universo visibile al qual si giunge con stime di medie del numero di astri contenuti nell'unità di volume dello spazio <sup>(2)</sup>.

5. DATI NUMERICI. — Delle tre grandezze fisiche che trovansi al secondo membro della (26) e che dovrebbero dare il valore  $\lambda_1$  del raggio dell'atomo elementare

$$(27) \quad \lambda_1 = k\mu/c^2 = 1.222 \times 10^{-52} \text{ cm.}$$

è ben nota la velocità  $c$  della luce e discretamente bene è conosciuto il valore della costante  $H$  di Hubble. Assai incerto è invece il valore di  $N$ . Sembra quindi più ragionevole cercare quale sia il valore di  $N$  che fornisce la (26), scrivendola

$$(28) \quad N = \frac{c}{\lambda_1 H}$$

(1) Il fattore  $3/4\pi$  che apparisce nel valore della densità si potrebbe fare sparire assumendo come densità di riferimento la densità naturale, cioè quella della sfera atomica il cui volume è  $4\pi\lambda^3/3$  ed in tal caso fra la densità e la curvatura della sfera si avrebbe la semplice relazione  $\Delta R^2 = 1$ .

(2) In qual modo si proceda a questa stima è anche, sommariamente, indicato a p. 29 di G. GIANFRANCESCHI, *Capitoli di fisica contemporanea*. « Pontif. Univ. Gregoriana ». Roma 1932. Con viva gratitudine debbo ricordare qui la memoria del chiaro Autore che mi è stato largo d'incoraggiamento nelle mie prime ricerche sulle costanti gravitazionali.

quando si pongano in essa i valori noti per  $c$  e per  $H$ , cioè  $c = 2.998 \times 10^{10}$  e  $H = 1.801 \times 10^{-17}$ , ed il valore di  $\lambda_1$  sopra indicato e si ha

$$(29) \quad N = 1.36 \times 10^{79}.$$

Questo valore di  $N$  è precisamente compreso fra i due valori, dati entrambi da Eddington,

$$(30) \quad N_1 = 1.29 \times 10^{79} \quad , \quad N_2 = 1.57 \times 10^{79}$$

il primo, più incerto, ottenuto con i procedimenti di stima usuali<sup>(1)</sup> ed il secondo invece derivato invece dalle sue note ipotesi<sup>(2)</sup> che, se accettate, dovrebbero condurre ad un valore teoricamente esatto.

**Fisica.** — *Sulla luminosità delle immagini quali appaiono in un cannocchiale.* Nota di L. MARTINELLI, presentata dal Corrisp. U. BORDONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Ved. *The Expanding Universe*. Cambridge University Press, 1933, p. 68.

(2) Ved. *Relativity Theory of Protons and Electrons*. Cambridge University Press, 1936, p. 272.

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. - Azoturi di Lantanio, Cerio e Praseodimio*<sup>(1)</sup>. Nota II di A. IANDELLI e E. BOTTI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Gli azoturi delle terre rare, a differenza dei composti corrispondenti con P, As, Sb, e Bi sono abbastanza noti. Matignon<sup>(3)</sup> preparò gli azoturi di La, Ce, Pr, Nd e Sm per riscaldamento dell'ossido con polvere di Magnesio o di Alluminio in atmosfera di Azoto. Un metodo di preparazione simile è quello usato da Friedrich e Sittig<sup>(4)</sup> di riscaldare una miscela di ossido e carbone nell'Azoto. I prodotti ottenuti in questo modo contengono certamente un'alta percentuale di impurezze.

Muthmann<sup>(5)</sup> osservò che l'unione dell'Azoto con uno dei metalli La, Ce, Pr e Nd avviene facilmente col riscaldamento. Egli trovò che per il Cerio esiste un punto di accensione ben determinato (850°), mentre gli altri tre metalli assorbono il gas al rosso in modo più blando. I prodotti finali ottenuti corrispondono in tutti i casi alla formula MeN. Gli stessi azoturi possono formarsi anche usando ammoniaca al posto dell'Azoto.

Per la ricerca röntgenografica abbiamo preferito per gli azoturi di Lantanio, Cerio e Praseodimio il metodo di preparazione di Muthmann, che dà la garanzia di un composto assolutamente puro. Successivamente esamineremo i prodotti che si ottengono per riduzione in atmosfera di Azoto.

La formazione degli azoturi col metodo di Muthmann si effettua senza particolari difficoltà. L'unica avvertenza da seguire è quella di purificare bene l'Azoto dalle ultime tracce di Ossigeno. I composti da noi preparati si presentano come masse nere, spugnose, fragili, che si alterano rapidamente all'aria umida, specialmente se ridotti in polvere, con sviluppo di ammoniaca. Lo sviluppo di gas è molto vivace trattando la polvere con acqua. Riscaldando in un punto un campione di azoturo, tutta la massa diviene incandescente, passando ad ossido. Questo si forma anche lentamente lasciando all'aria l'azoturo; ed è interessante il fatto che si ottiene così, per il composto col Cerio, un ossido di colore giallo-verdastro dello

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(3) C. MATIGNON, «Compt. Rend.», 131, 837 (1900).

(4) E. FRIEDRICH u. L. SITTIG, «Zs. an. Ch.», 143, 293 (1925).

(5) W. MUTHMANN u. K. KRAFT, «Liebig's Ann.», 325, 274 (1902); W. MUTHMANN u. K. BECK, «Liebig's Ann.», 331, 58 (1904).

stesso aspetto di quello inferiore  $Ce_2O_3$ , preparato per riduzione di  $CeO_2$  con Idrogeno ad alta temperatura<sup>(1)</sup>; che passa successivamente a  $CeO_2$ . L'azoturo di Cerio è piroferico.

Sui tre composti sono stati eseguiti i fotogrammi delle polveri, usando la radiazione  $K\alpha_1, \alpha_2$  del Rame. I fotogrammi che si ottengono, di una notevole chiarezza, sono sempre sovrapponibili per campioni diversi di uno stesso composto, ciò che sta a indicare che questi ultimi non sembrano capaci di formare soluzioni solide con l'Azoto. La tabella I riporta i dati relativi.

TABELLA I.

*Fotogrammi delle polveri di LaN, CeN e PrN.*

*Anticatódo di Rame, radiazione K:  $\lambda_\alpha = 1.539 \text{ \AA}$  ;  $\lambda_\beta = 1.389 \text{ \AA}$ .*

Intensità	LaN		CeN		PrN		Indici
	$\theta$ corr.	$d/n$	$\theta$ corr.	$d/n$	$\theta$ corr.	$d/n$	
m	14° 42'	3.032	15° 24'	2.898	14° 54'	2.993	1 1 1
m	16° 54'	2.647	17° 54'	2.503	17° 21'	2.580	2 0 0
mf	24° 24'	1.863	25° 48'	1.768	24° 55'	1.826	2 2 0
f	28° 56'	1.590	30° 38'	1.510	29° 38'	1.556	3 1 1
md	30° 23'	1.521	32° 3'	1.450	31° 5'	1.490	2 2 2
d-dd	35° 32'	1.324	38° 3'	1.248	36° 32'	1.293	4 0 0
mf	39° 33'	1.208	42° 2'	1.149	40° 40'	1.181	3 3 1
f	40° 49'	1.177	43° 20'	1.121	41° 59'	1.150	4 2 0
mf-f	45° 39'	1.076	48° 53'	1.022	47° 4'	1.051	4 2 2
f	49° 17'	1.015	52° 57'	0.964	50° 56'	0.991	5 1 1
m	55° 35'	0.933	60° 6'	0.888	57° 33'	0.912	4 4 0
fff	59° 39'	0.892	65° 8'	0.848	62° 7'	0.871	5 3 1
ff	60° 58'	0.880	66° 57'	0.836	63° 38'	0.859	6 0 0
ffi	67° 15'	0.834	—	—	70° 40'	0.815	6 2 0
$a_0 = 5.275 \text{ \AA}$			$a_0 = 5.011 \text{ \AA}$			$a_0 = 5.155 \text{ \AA}$	

Tutte le righe si possono attribuire con sicurezza ad un reticolo cubico a facce centrate. Delle due disposizioni possibili degli atomi della Terra e dell'Azoto: tipo cloruro di Sodio e tipo blenda, soltanto la prima permette

(1) E. FRIEDRICH u. L. SITTIG, « Zs. an. Ch. », 143, 316 (1925).



di calcolare un andamento nell'intensità delle righe in buon accordo con i risultati osservati. La tabella II riporta i valori delle intensità calcolate<sup>(1)</sup> per PrN, nell'ipotesi di una struttura tipo NaCl e le intensità osservate. L'andamento delle intensità per LaN, CeN e PrN è identico; e il calcolo per i primi due fornirebbe risultati pochissimo diversi dal terzo, data la minima differenza fra i fattori atomici dei tre elementi.

TABELLA II.  
*Intensità nel fotogramma di PrN.*

Indici	Intensità osservata	Intensità calcolata
1 1 1	m	1.95
2 0 0	m	1.90
2 2 0	mf	2.61
3 1 1	f	3.15
2 2 2	md	1.34
4 0 0	d-dd	0.82
3 3 1	mf	2.32
4 2 0	f	3.02
4 2 2	mf-f	2.71
5 1 1	f	3.12
3 3 3		
4 4 0	m	2.05
5 3 1	fff	8.02
6 0 0	ff	6.90
4 4 2		
6 2 0	fff	8.54

Gli azoturi di Lantanio e Praseodimio hanno un valore di  $a_0$  che corrisponde ad un raggio atomico dell'elemento uguale, entro gli errori sperimentali, a quello che si ha nel reticolo del metallo. La costante reticolare di LaN è quindi anche molto vicina a quella della forma  $\beta$  cubica trovata da Zintl<sup>(2)</sup>. Esperienze non pubblicate eseguite da A. Rossi hanno portato alla conclusione che anche il Praseodimio, quando venga riscaldato a lungo

(1) Per la formula usata nel calcolo vedi Nota I, questi « Rendiconti », XXIV, 459 (1936).

(2) E. ZINTL u. S. NEUMAYR, « Zs. Elektr. ang. phys. Ch. », 39, 84 (1933).

in un vuoto spinto dà luogo, insieme alla forma  $\alpha$ , a una forma  $\beta$ ; ma che nei due casi il fenomeno è puramente superficiale<sup>(1)</sup>. Il fatto che gli azoturi abbiano la stessa costante reticolare della forma  $\beta$  porterebbe a pensare che piccole quantità di Azoto vengano adsorbite dal metallo a temperatura ordinaria e che col riscaldamento avvenga alla superficie la formazione dell'azoturo. Le righe osservate per la forma  $\beta$  sarebbero quindi dovute a quest'ultimo.

La costante reticolare dell'azoturo di Cerio presenta una strana anomalia. Come si vede dalla tabella I, essa è di molto inferiore a quella del composto col Praseodimio e quindi anche a quella del Cerio cubico ( $a_0 = 5.14_3$ ). Abbiamo eseguito per maggior sicurezza, vari fotogrammi su diversi campioni di CeN, cercando di variare quanto più possibile le condizioni di formazione, ma il risultato è stato sempre identico. Un fotogramma di un miscuglio di CeN e PrN, mostra le righe nettamente separate dei due composti, corrispondentemente alla differenza già osservata della costante reticolare.

Abbiamo esaminato anche se l'azoturo di Cerio fosse capace di dare soluzioni solide con un altro degli azoturi preparati, scegliendo per questo ultimo quello di Lantanio (che ha una costante reticolare maggiormente diversa). La soluzione solida si ottiene facilmente facendo reagire un miscuglio della limatura dei due metalli con l'Azoto. Alla composizione esaminata del 50% at. si ottiene un reticolo dello stesso tipo di quello dei due azoturi separati, con un valore di  $a_0$  di  $5.16_7 \text{ \AA}$ . Il valore che si calcola con la regola del miscuglio è di poco diverso ( $5.14_7 \text{ \AA}$ ).

Il comportamento anormale del Cerio si spiega difficilmente, perchè il composto CeN non presenta caratteristiche molto diverse dagli altri. Le uniche differenze finora accertate sono che il calore di formazione, pur non essendo noto con sicurezza, sembra superiore a quello di LaN<sup>(2)</sup>; e il fatto che esso si ottenga dagli elementi ad una temperatura ben determinata a differenza degli altri.

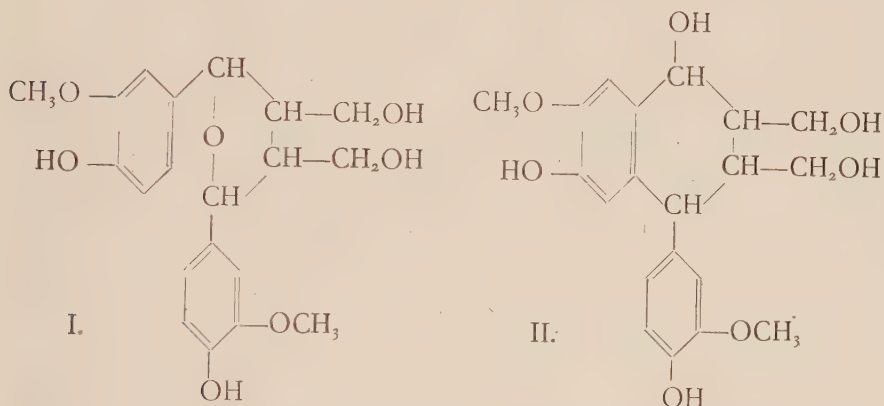
Se si ammette che nel reticolo siano presenti atomi neutri, si calcola per il raggio atomico dell'Azoto un valore di  $0.75-0.77 \text{ \AA}$ , che è superiore a quello generalmente ammesso di  $0.71 \text{ \AA}$ . Del resto, assumendo questo ultimo valore, la condizione geometrica di Goldschmidt non sarebbe verificata. Si ha quindi l'impressione che non siano presenti atomi neutri, anche per il fatto che, se il composto fosse nettamente metallico, si dovrebbe avere una contrazione notevole per l'atomo della Terra, come avviene nei composti intermetallici più tipici delle terre rare, specialmente quando abbiano un calore di formazione elevato.

(1) Per il Lantanio vedi A. ROSSI, «Nature», 133, 174 (1934).

(2) R. NEUMANN, C. KRÖGER u. H. HAEBLER, «Zs. an. Ch.», 207, 145 (1932).

**Chimica.** — *La configurazione dell'olivile e dell'isoolivile*<sup>(1)</sup>.  
Nota di B. L. VANZETTI e P. DREYFUSS, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio  
N. PARRAVANO.

Come abbiamo potuto dimostrare in altre pubblicazioni<sup>(3)</sup>, all'olivile, costituente principale della resina d'ulivo, spetta la formula I e al suo prodotto di isomerizzazione, isoolivile, la formula II:



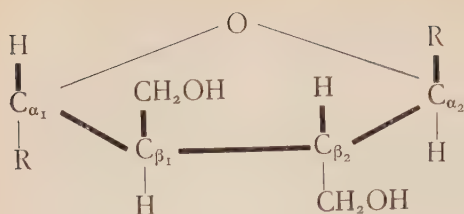
Dal fatto che l'olivile è otticamente attivo e che i due resti aromatici sono del tutto equivalenti fra loro, uno di noi (V.) poteva dedurre che la molecola non è simmetrica speculare, ma che essa è formata da due metà identiche fra loro, congruenti come le due metà della molecola dell'acido tartarico attivo.

L'equivalenza delle due metà richiede che l'atomo  $\alpha_1$  (formule III e IV) dev'essere congruente all'atomo  $\alpha_2$  e l'atomo  $\beta_1$  congruente all'atomo  $\beta_2$ . Quindi all'olivile, fra tutte le forme stericamente possibili, non possono spettare altre che le formule steriche III, o IV ( $R = 3$ -metossi-4-ossi-fenile), in cui i sostituenti corrispondenti si trovano in posizione *trans*, rispetto all'anello furanico.

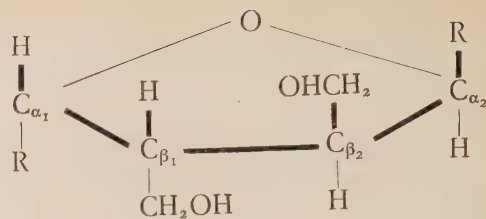
(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Chimica generale e farmaceutica della R. Università di Catania.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1937.

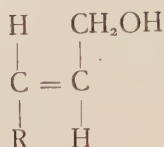
(3) G. KOERNER e B. L. VANZETTI, «Memorie Accademia Lincei», 1911; B. L. VANZETTI, «Gazz. chim. ital.», 59, 373 (1929) e questi «Rendiconti», vol. XIX, ser. 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 6, p. 421 (1934); B. L. VANZETTI e P. DREYFUSS, «Gazz. chim. ital.», 64, 381 (1934); P. DREYFUSS, «Gazz. chim. ital.», 66, 96 (1936).



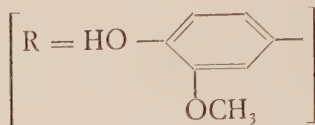
III.



IV.



V.



Per decidere fra le forme III e IV ricordiamo che, secondo uno di noi (V.), l'olivile si genera nella pianta, molto probabilmente, mediante condensazione ossidativa dell'alcool coniferilico; perciò sarebbe interessante chiarire la configurazione di quest'alcool. Purtroppo, l'instabilità di esso ne rende molto difficile la determinazione. Sembra che nella riduzione dell'alcool si formi l'isoeugenolo<sup>(1)</sup>, ma non si è mai riusciti a identificarlo con una delle due forme note dell'isoeugenolo. I rapporti noti fra l'alcool coniferilico, l'aldeide coniferilica e l'acido ferulico non possono servire per stabilire la forma geometrica dell'alcool, visto che questi rapporti in parte sono male chiariti e, con buona ragione, contestati<sup>(2)</sup>. Ciò nonostante, crediamo lecita l'ipotesi che all'alcool coniferilico spetti la configurazione trans (formula V), poichè tutte le sostanze propenilfeniliche naturali, in quanto la loro configurazione è nota, si trovano sotto la forma trans, eccetto solo i casi in cui l'esistenza di un anello richiede la forma cis (ad es. nelle cumarine). Per illustrare questa regola, riportiamo solo due esempi riguardanti sostanze affini all'alcool coniferilico.

Per l'alcool cinnamico naturale, il Bourguel<sup>(3)</sup> ha dimostrato che gli spetta la forma trans. Nel caso dell'isoeugenolo, le indicazioni di B. T. Brooks<sup>(4)</sup> che l'isoeugenolo isolato da *Michelia champaca* L. dà un benzoato col P. F. 103°, e le indicazioni di F. B. Power e A. H. Salway<sup>(5)</sup> che l'isoeugenolo dall'olio essenziale di noce moscata dà un benzoato col

(1) F. TIEMANN, «Ber.», 8, 1135 (1875); «Ber.», 9, 418 (1876); A. ZINKE e J. DZRMAL, «Monatsh.», 41, 425 (1920); A. ROLLETT, «Monatsh.», 55, 154 (1930).

(2) H. PAULY e K. FEUERSTEIN, «Ber.», 60, 1031 (1927); «Ber.», 62, 297 (1929); C. HOFFMEISTER, «Ber.», 60, 2067 (1927); A. HILLMER e E. HELLRIEGEL, «Ber.», 62, 725 (1929); P. KLASON, «Ber.», 63, 912 (1930).

(3) M. BOURGUEL, «Bull. Soc. Chim.» [4], 45, 1083 (1929).

(4) B. T. BROOKS, «J. Am. Chem. Soc.», 33, 1768 (1911).

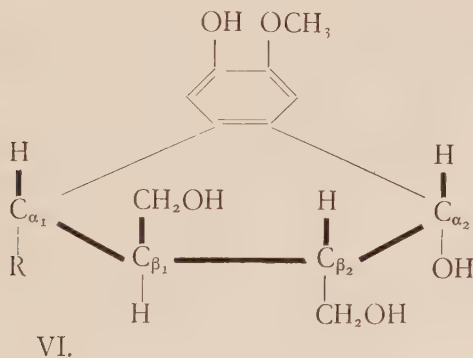
(5) F. B. POWER e A. H. SALWAY, «J. Chem. Soc.», 91, 2042 (1907).



P. F. 103–104°, permettono di concludere che anche l'isoeugenolo naturale è presente sotto la forma *trans*. (Il benzoilderivato del *trans*-isoeugenolo fonde a 103°<sup>(1)</sup>, quello del *cis*-isoeugenolo a 68°<sup>(2)</sup>). In questi esempi si manifesta una regola di indole generale, e non vi è alcuna ragione per ammettere che l'alcool coniferilico ne faccia eccezione.

Nel passaggio dall'alcool coniferilico all'olivile, il doppio legame  $\alpha$ - $\beta$  si trasforma in un semplice legame. In questa reazione, la forma *trans*, teoricamente, secondo i modelli tetraetrici classici, dovrebbe conservarsi, ma si conoscono molti casi che dimostrano l'alterabilità della configurazione in tali reazioni<sup>(3)</sup>. Peraltro, la regola che in natura si trovano sempre le forme *trans*, più stabili, almeno quando non si tratta di casi più complessi<sup>(4)</sup>, rende probabile che all'olivile spetti la stessa configurazione, che anche spetta all'alcool coniferilico, cioè quella indicata in III. Vedremo più avanti che c'è anche un'altra ragione, basata su dati sperimentali, in favore di questa formula.

Ammettendo che la formula III corrisponda all'olivile, dobbiamo inoltre dedurre che all'isoolivile deve corrispondere la formula VI.



In questa deduzione si deve considerare che nell'isomerizzazione è colpito l'atomo di carbonio  $\alpha_1$ , il quale per un istante – sia che si formi come intermedio un prodotto ionoide, o un radicale libero – non avrà che tre sostituenti coordinativi, e si sa che in tali reazioni si ha facilmente un cambiamento della configurazione; ma si sa pure che tali cambiamenti della configurazione, in genere, non hanno luogo che parzialmente, nel qual caso si formano mescolanze di due isomeri. L'isoolivile però è un'unica sostanza e si forma dall'olivile con rendimento quantitativo. Non vi è alcuna ragione

(1) F. BOEDECKER e H. VOLK, « Ber. », 64, 66 (1931).

(2) C. JUNGE, « Chem. Zentr. », 11, 2818 (1932).

(3) Ad es. E. FISCHER, « Ann. », 386, 381 (1912); F. BOEDECKER e H. VOLK, loco citato, p. 61.

(4) Ad es. R. KUHN e M. HOFFER, « Ber. », 65, 651 (1932).

per l'ipotesi che nell'isomerizzazione dell'olivile la configurazione di  $\alpha_1$  si alteri in un senso, che dovrebbe condurre ad una forma stericamente meno favorita. Anzi, riteniamo normale la reazione, cioè che la posizione trans di R in  $\alpha_1$  e di  $\text{CH}_2\text{OH}$  in  $\beta_1$  si conservi pure nell'isoolivile.

L'atomo di carbonio  $\alpha_2$  non è toccato direttamente dall'isomerizzazione e perciò la sua configurazione dev'essere quella indicata in VI, sempre naturalmente premettendo che la formula III corrisponda all'olivile. Se si ammettesse che all'olivile spetta la configurazione IV, allora seguirebbe necessariamente che i sostituenti H e OH in  $\alpha_2$  della formula VI scambierebbero le loro posizioni, cioè che nell'isoolivile il gruppo  $\text{CH}_2\text{OH}$  legato in  $\beta_1$  e il gruppo OH legato in  $\alpha_2$  starebbero nello stesso piano (cis). In questo caso dovrebbe essere possibile l'eliminazione di acqua fra questi due gruppi, con formazione di un anello furanico, simile a quello che probabilmente è presente nel pinosresinolo<sup>(1)</sup>. Il fatto, che non abbiamo mai riscontrato un anidro-isoolivile, ci fa ammettere che la posizione relativa del  $\text{CH}_2\text{OH}$  in  $\beta_1$  e dell'OH in  $\alpha_2$  è veramente quella indicata in VI. Questa ammissione d'altro canto ha come conseguenza che per l'olivile deve escludersi la formula IV.

Utilizzando lo schema tetraedrico del carbonio, si può facilmente vedere ed elegantemente dimostrare che le trasformazioni succitate seguono le esigenze delle direzioni nelle forze di valenza e che nelle molecole originatesi, conforme gli schemi da noi proposti per l'olivile e l'isoolivile, non si stabilisce, di conseguenza, alcuna tensione anomala tra gli atomi chiusi in catena e le molecole risultano perfettamente equilibrate e quindi stabili.

(1) H. ERDTMAN, « Ann. », 516, 167 (1935).

**Chimica biologica.** — *Attività amilasica del tessuto adiposo* <sup>(1)</sup>. Nota di F. CEDRANGOLO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio G. QUAGLIARIELLO.

Oltre il più antico e noto lavoro di Euler <sup>(3)</sup> sulla catalasi del tessuto sottocutaneo adiposo, i lavori esistenti in letteratura sugli enzimi di tale tessuto sono, a quanto mi consta, quelli di Quagliariello e Scoz <sup>(4)</sup> sulla lipasi e di Quagliariello <sup>(5)</sup> sulla deidrogenasi di acidi grassi superiori e quello di Scoz <sup>(6)</sup> sugli enzimi glicolitici. Recentemente <sup>(7)</sup> io mettevo in evidenza in tale tessuto una glicerofosfatasi di notevole attività, del tipo delle fosfo-monoesterasi di tipo alcalino attivabile dai  $Mg^{++}$ : successivamente <sup>(8)</sup> Saviano confermando le mie ricerche, notava una cospicua scissione dell'estere esodifosforico da parte di tale enzima. Le ricerche che riferisco in questa Nota, riguardano la presenza di una amilasi nel tessuto adiposo sottocutaneo di cane.

Il tessuto, prelevato da animali a normale alimentazione, uccisi per dissanguamento, è stato tagliato finemente e lavato più volte con acqua: si è aggiunto poi acetone nella quantità di cc. 500 per 100 gr. di tessuto e si è lasciato in riposo per 3 ore; si è decantato e si è aggiunto nuovamente acetone 2 volte, poi una miscela a parti eguali di acetone ed etere ed, infine, solamente etere 2 volte. Il tessuto si è lasciato una notte a temperatura ambiente e poi si è finemente polverizzato: in media da 100 gr. di tessuto adiposo fresco ho ottenuto gr. 4-5 di polvere. La polvere è stata estratta con glicerina 87%, aggiunta nella quantità di cc. 16 per gr. di polvere, prima per 48 ore a 37°, e poi per 8-10 ore in agitatore. Si è filtrato, con aspirazione, attraverso garza e si è ottenuto così un succo, di colorito lievemente giallastro, che è stato conservato in ghiacciaia. Al momento dell'uso, il succo è stato diluito con  $H_2O$  distillata nella proporzione di 1 a 5.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(3) H. v. EULER, «Hofm. Beitr.», 7 (1906), 1.

(4) G. QUAGLIARIELLO e G. SCOZ, «Arch. Sc. Biol.», 17 (1932), 513.

(5) G. QUAGLIARIELLO «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», 16 (1932), 552.

(6) G. SCOZ, «Arch. Sc. Biol.», 18 (1933), 385.

(7) F. CEDRANGOLO «Arch. Sc. Biol.», 22 (1936), 123.

(8) M. SAVIANO, «Enzymologica», 1 (1936).

Le esperienze, sono state condotte nel modo seguente: in palloncini da cc. 50 si immettevano cc. 5 di estratto, cc. 10 di puffer di fosfati mol/15 a pH 6.8, cc. 1 di NaCl 0.2 mol, cc. 25 di una soluzione al momento preparata di amido 1 % e H<sub>2</sub>O sino al segno. Contemporaneamente si allestivano 2 prove di controllo, rispettivamente con solo amido e con solo estratto. Si lasciava poi decorrere la reazione in termostato a 37° per un'ora.

Le esperienze si riferiscono a n. 8 estratti, ottenuti dal tessuto adiposo sottocutaneo di 8 cani.

Nelle esperienze con gli estratti I-V ho determinato col metodo iodometrico di Willstätter e Schudel<sup>(1)</sup> i gruppi aldeidici formati. Riferisco i cc. di soluzione n/10 di iodio consumati nelle prove, dopo sottrazione della somma dei cc. di iodio, consumati rispettivamente dall'estratto e dal substrato:

estratti N.	I	II	III	IV	V
cc. J n/10	1.1	0.4	0.7	0.95	1.2

I cc. di iodio consumati corrispondono a valori di maltoso compresi tra 6.84 e 20.5 mg., cioè a una scissione dell'amido del 3.7 %-11 %.

Nelle esperienze con gli estratti VI-VIII, ho determinato secondo la nota tecnica di Bertrand, l'azione riduttrice sul Cu<sup>++</sup> dello zucchero formato. I mg. di rame ridotti nelle singole esperienze furono:

estratto n. . . . .	VI	VII	VIII
dall'estratto enzimatico . . . . .	—	—	—
dal substrato . . . . .	6.88	6.91	6.70
dall'estratto + substrato . . . . .	22.05	18.31	22.32

Se dai valori di riduzione, dati dall'estratto + substrato si sottraggono quelli dati dal solo substrato, si ottengono valori di Cu in mg., corrispondenti a mg. 10-14 di maltoso. Questi risultati, quindi, sono concordi coi precedenti.

Servendomi dell'estratto V, che in queste esperienze si è mostrato il più attivo, ho voluto calcolare la costante di velocità della scissione dell'amido. A questo intento ho determinato di 10 in 10 minuti, col metodo iodometrico e con le modalità sopra descritte, la quantità di maltoso formato.

Come risulta dalla tabella che segue si tratta di una reazione monomolecolare perchè ad essa si applica la formula  $k = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a-x}$  dove  $t$  è il tempo in minuti;  $a$  la quantità massima di maltoso che si può formare

(1) R. WILLSTÄTTER e G. SCHUDEL, « Ber. Chem. Ges. », 51 (1918), 780.



dall'amido: questa quantità si pone eguale al 75 % dell'amido impiegato, quindi nel caso presente  $a = 0.1875$ ;  $x$  è la quantità di maltoso in mg. formata al tempo  $t$ .

$l$	$x$	$k$
10	3.6	0.00084
20	7.5	0.00088
40	14	0.00085
50	17	0.00083
60	20.5	0.00084
media		0.00085

Assumendo, con le idee di Willstätter e collaboratori<sup>(1)</sup>, il valore di  $k$  come il numero delle unità amilasiche nella quantità impiegata di preparato secco (mg. 62.5) si ricava il valore amilasico (Am.-Wert. degli AA. cit.), cioè il numero di unità amilasiche in gr. 0.01 di preparato:

$$\text{val. am.} = \frac{0.00085 \times 0.01}{0.0625} = 0.000136.$$

Questo valore se si paragona a quello di un preparato di amilasi pancreatica (val. am. = 0.476) dato da Willstätter e coll. (l. c., 1), risulta piccolissimo, cioè esattamente 3500 volte più piccolo; ma risulta più o meno eguale a quello di un preparato amilasico di fegato (val. am. = 0.00009 — 0.0003) ottenuto colla tecnica di Holmbergh<sup>(2)</sup>.

(1) R. WILLSTÄTTER, E. WALDSCHMIDT-LEITZ ed A. R. F. HESSE, «Zeit. f. Physiol. Chem.», 126 (1923), 143.

(2) O. HOLMBERGH, «Zeit. f. Physiol. Chem.», 134 (1924) 68.

**Mineralogia.** — *Valentinite della miniera di Ballao*<sup>(1)</sup>.  
Nota di A. CAVINATO, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. BOERIS.

La miniera di Ballao è coltivata per l'estrazione dell'antimonite. Comprende i due cantieri di Corti Rosas e Sa Mina. In questi due cantieri il fenomeno della mineralizzazione è assolutamente identico: e non vi è ragione per una distinzione tra essi.

La mineralizzazione ad antimonite interessa una vasta zona del Gerrei. Infatti nel territorio dei Comuni del Gerrei: Villasalto, S. Niccolò Gerrei, Armungia, Ballao, Goni ecc. si trovano di frequente delle piccole vene, delle stelline, delle boccette, dei noduli di minerale, che, alla superficie, se esposta all'azione diretta degli agenti atmosferici, è alterato in polvere bianchiccia o leggermente giallognola di senarmontite.

Anche fuori del Gerrei si trovano tracce di mineralizzazione ad antimonio. Un piccolo pozzo, e qualche galleria, tutt'ora in coltivazione, trovasi nel territorio del comune di Escalaplano, in vicinanza del paese. Pure nella Nurra, lontana dai luoghi qui elencati, vi sono piccole miniere d'antimonio, che nel 1927-28 erano ancora in coltivazione. Tralasciamo di proposito l'elenco di altre località.

Il « tipo » di mineralizzazione è dovunque fondamentalmente lo stesso. Esso sarà descritto in una Nota a parte, in un successivo lavoro, in cui saranno trattati anche i problemi relativi alle età, genesi, forme di giacitura, modi e fasi di riempimento, processi di estrazione dal magma e deposito entro le spaccature, alterazioni per ascesa, per discesa, metamorfismi ecc.

Qui anticipiamo solo la notizia che il giacimento di Ballao (Corti Rosas e Sa Mina) ed il giacimento di Su Suergiu (Villasalto, dove ha sede la direzione della miniera) differiscono tra di loro per la temperatura alla quale si è prodotta almeno una parte della mineralizzazione. Questa temperatura doveva essere notevolmente più alta nelle miniere di Ballao. Qui infatti l'azione metamorfica sulla roccia incassante (scisti argillosi e arenacei, calcari e calcescisti ecc.) è più intensa e più diffusa; ha causato chiari accenni di ricristallizzazione nei calcari, ed ha portato a neoformazioni di biotite, di wollastonite, di diopside. Gli stessi minerali di antimonio, e le ganghe che li accompagnano, sono, a Ballao, nella media, molto meglio cristallizzati che non a Su Suergiu. Così a Su Suergiu non è stata mai

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 17 gennaio 1937.

trovata della scheelite ben cristallizzata, mentre è facile trovarne a Ballao. E ciò vale anche per la valentinite, il quarzo, la calcite ecc.

In conclusione si può affermare che a Ballao la mineralizzazione ha avuto carattere pneumatolitico, almeno in qualche fase del processo di riempimento, mentre invece a Su Suergiu un tale carattere è sempre mancato; e la mineralizzazione ripete la sua genesi da processi a solo carattere idro-termale.

In questa prima Nota descrivo i cristalli di valentinite <sup>(1)</sup>.

In una Nota successiva saranno pure descritti altri minerali ben cristallizzati, che ho raccolti nelle numerose visite alla miniera: visite che mi furono possibili grazie alla gentile ospitalità del Direttore della Miniera, sig. Bernardini, cui porgo vive grazie.

La valentinite si trova in piccole geodi, in piccole screpolature, piccole cavità ecc. entro al minerale di antimonio.

Alle volte i cristalli hanno abito tabulare e sono riuniti in associazione parallela, a pacchetti, come è dato vedere nei cristalli di biotite; oppure sono placati sulle pareti delle geodi a mo' di bassorilievo e vi sono distribuiti con continuità e disposti a mo' di squame di pesce.

Altre volte sono di forma aciculare uniti in fascetti paralleli od in fasci fibroso raggiati ecc.

Il colore è vario dal bianco-grigio, al giallo chiaro paglierino, al giallo, al giallo miele ecc.

Di frequente però la valentinite si trova in cristalli ben finiti, e con faccie speculari e piane, talchè è possibile determinarne le forme. Questi bei cristalli hanno dimensioni limitate a due o tre millimetri al massimo.

L'abito loro più frequente è rappresentato dalle fig. 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>. Nelle fig. 3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> sono rappresentati altri due abiti comuni quantunque meno frequenti.

Le forme che ho individuate in questi cristalli sono le seguenti:

$$m\{110\}, \mu\{210\}, b\{010\}, r\{041\}, a\{051\}, v\{5 \cdot 10 \cdot 8\}.$$

Le faccie della  $\{110\}$  sono generalmente le più sviluppate, le più speculari e piane. Esse danno al goniometro delle ottime immagini. Le faccie della  $\{5 \cdot 10 \cdot 8\}$  sono pure ben sviluppate ma sono sempre più o meno incurvate pur mantenendosi ben speculari. La loro curvatura è solo nella direzione dello spigolo  $[(5 \cdot 10 \cdot 8) (\bar{5} \cdot 10 \cdot 8)]$  mentre invece nella direzione  $[(5 \cdot 10 \cdot 8) (5 \cdot \bar{10} \cdot 8)]$  non presentano curvatura, o ne presentano una leggera.

L'angolo che esse formano è variabile in conseguenza della loro curvatura. Ho misurato infatti, in un cristallo, tra  $(5 \cdot 10 \cdot 8)$  e  $(\bar{5} \cdot 10 \cdot 8)$  un

(1) Per la bibliografia si veda la Nota di F. MILLOSEVICH in «Rendiconti» della R. Acc. Naz. dei Lincei, IX, ser. 5<sup>a</sup>, fasc. 11, p. 340.

angolo variabile tra  $51^{\circ} 1/2$  e  $53^{\circ} 1/2$ : il valore calcolato è  $52^{\circ} 44'$ ; e tra  $(5 \cdot 10 \cdot 8)$  e  $(5 \cdot \overline{10} \cdot 8)$  ho misurato un angolo variabile, in conseguenza della stessa curvatura, tra  $39^{\circ} 50'$  e  $41^{\circ} 10'$ : il valore da me calcolato è  $40^{\circ} 39'$ .

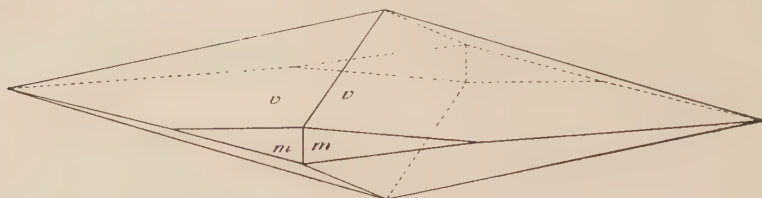


Fig. 1.

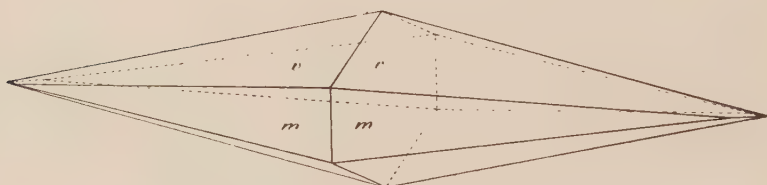


Fig. 2.

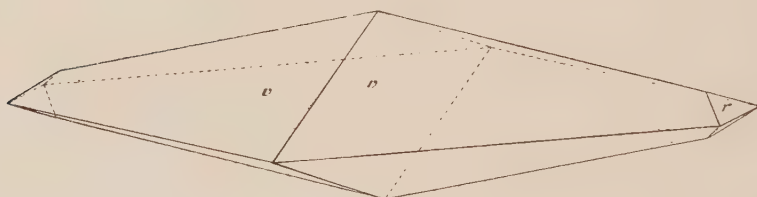


Fig. 3.

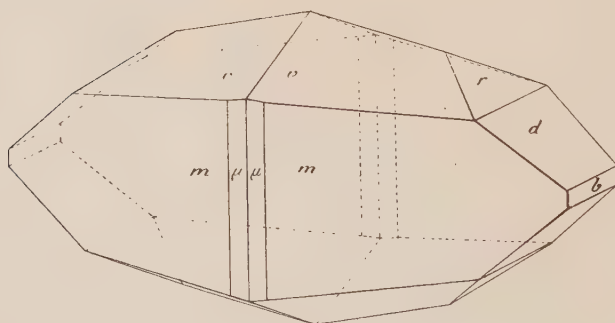


Fig. 4.

Allo scopo di assicurarmi che non vi hanno altre facce a simbolo semplice che meglio rispondano a siffatti valori angolari, ho calcolato gli angoli tra facce vicinali alla  $(5 \cdot 10 \cdot 8)$  ottenendo valori che si scostano notevol-



mente da quelli misurati: Ad esempio per  $(3 \cdot 5 \cdot 4) : (\bar{3} \cdot 5 \cdot 4) = (6 \cdot 10 \cdot 8) : (\bar{6} \cdot 10 \cdot 8)$  ho avuto  $61^\circ 28'$ .

Anche le faccie della  $\{051\}$  hanno sviluppo notevole. Esse pure sono ben speculari, ma leggermente incurvate. Nonostante una tale curvatura la loro posizione è stata definita con buona approssimazione. Il valore da me calcolato per l'angolo  $051 : 010$  è  $30^\circ 44'$ : le misure eseguite sui cristalli hanno dato valori compresi tra  $29^\circ 45'$  e  $31^\circ 30'$ , che, per le ora accennate condizioni delle faccie, può ritenersi in buon accordo con le misure. La  $(051)$  è vicina alla faccia ben nota  $(0 \cdot 16 \cdot 3)$ , ma è da questa ben distinta. Infatti è:

$$0 \cdot 16 \cdot 3 : 010 = 29^\circ 14'.$$

Un più limitato sviluppo hanno le faccie della forma  $\{041\}$ ; e specie quella della  $\{010\}$ .

Le combinazioni frequenti, comuni a tutti i cristalli, sono le  $\{110\}$ ,  $\{5 \cdot 10 \cdot 8\}$ ,  $\{051\}$ . Limitate ad alcuni cristalli sono le combinazioni  $\{110\}$ ,  $\{5 \cdot 10 \cdot 8\}$ ,  $\{041\}$  e  $\{051\}$ . L'associazione di forme  $\{110\}$ ,  $\{5 \cdot 10 \cdot 8\}$ ,  $\{041\}$ ,  $\{051\}$ ,  $\{010\}$  è stata trovata solo due volte.

*Tavola delle misure angolari eseguite.*

Angoli misurati	Numero delle misure	Limiti	Medie	Valori calcolati
$110 : \bar{1}10$	8	$137^\circ 3' - 137^\circ 12'$	$137^\circ 8'$	$137^\circ 19'$
$110 : \bar{1}\bar{1}0$	6	$42^\circ 32' - 43^\circ 4'$	$42^\circ 50'$	$42^\circ 41'$
$5 \cdot 10 \cdot 8 : \bar{5} \cdot 10 \cdot 8$	8	$51^\circ - 54^\circ$	—	$52^\circ 44'$
$5 \cdot 10 \cdot 8 : 5 \cdot \bar{1}0 \cdot 8$	9	$38^\circ 1/2 - 42^\circ$	—	$40^\circ 39'$
$110 : 210$	3	$10^\circ 1' - 10^\circ 42'$	$10^\circ 20'$	$10^\circ 16' 45''$
$210 : \bar{2}10$	2	$21^\circ 50' - 22^\circ 1'$	—	$22^\circ 8' 1/2$
$041 : 04\bar{1}$	4	$72^\circ - 74^\circ$	—	$73^\circ 14'$
$051 : 05\bar{1}$	4	$60^\circ 15' - 62^\circ 30'$	—	$61^\circ 28'$
$051 : 010$	3	$29^\circ 45' - 31^\circ 30'$	—	$30^\circ 44'$

Le misure tra le faccie della  $\{110\}$  sono delle buone misure: l'abbiamo già detto. Pertanto ha valore il calcolo del rapporto  $a/b$  fatto in base ad esse.

Dall'angolo  $110 : \bar{1}\bar{1}0 = 42^\circ 50'$  si deduce  $\frac{a}{b} = 0.3922$ ; e dall'angolo  $110 : \bar{1}10 = 237^\circ 8'$  si deduce  $\frac{a}{b} = 0.3925$ .

I valori sono alti, ma non i più alti. Laspeyres ha trovato per la valentinite di Costantina  $\frac{a}{b} = 0.3927$ : che è notevolmente più alto. Il Millo-

sevich ha calcolato per la valentinite di Su Suergiu  $\frac{a}{b} = 0.3912$ . Il valore da me dato è entro gli usuali valori calcolati, e non merita perciò particolari commenti.

Merita invece che si faccia osservare la notevole ricchezza di forme che alcuni cristalli presentano: specie se raffrontati a quelli della vicina miniera di Su Suergiu.

Non ho osservato dei geminati. I caratteri della sfaldatura sono i soliti.

#### PROPRIETÀ OTTICHE.

I caratteri ottici di questo minerale sono poco noti. Le poche frammentarie notizie date intorno ad essi non sono neppure tra loro in accordo.

I cristalli da me studiati hanno il piano degli assi ottici parallelo a (001): e ciò per ogni colore. Il valore di  $2E$  è di  $16-17^\circ$  per il rosso,  $14-15^\circ$  per il giallo,  $10-11^\circ$  per il violetto. La bisettrice acuta negativa è parallela all'asse cristallografico  $y$ .

Facendo uso del prisma naturale 110:  $\bar{1}10$ , il cui angolo di rifrangenza era di  $42^\circ 54'$ , ho potuto determinare gli indici di rifrazione  $N_m$   $N_p$ .

Ho avuto i valori:

	$N_m$	$N_p$
rosso . . . . .	2.334	2.330
giallo . . . . .	2.358	2.352
verde . . . . .	2.372	2.360
violetto.. . . .	2.445	2.430

La differenza tra gli indici di rifrazione  $N_m$  ed  $N_p$  è piccolissima.

Nei cristalli di valentinite non vi sono prismi naturali che consentano la determinazione di  $N_g$ . A giudicare però dagli alti colori di interferenza che si osservano in lamine secondo 010 si può affermare che la differenza  $N_g-N_m$  è molto più alta che non  $N_m-N_p$ .

A conclusione faccio osservare che si sono qui definite per la prima volta in modo sicuro le orientazioni ottiche, il carattere ottico, il valore di  $2E$ , l'entità della dispersione ottica, ed i valori per  $N_m$  ed  $N_p$  corrispondenti a quattro colori: e ciò per un minerale punto frequente, specie in bei cristallini quali quelli che mi hanno servito per il presente lavoro.

Il quale pertanto è un contributo per una migliore conoscenza delle proprietà generali di questo minerale: specie le ottiche.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il PRESIDENTE dà ai Colleghi la dolorosa notizia della morte dei Soci ORSO MARIO CORBINO e FEDERICO RAFFAELE e rievoca con commossa parola l'alta figura dei due Scomparsi, inviando alla loro memoria il saluto affettuoso e reverente dell'Accademia. Annunzia pure che, da notizie pervenute solo ora all'Accademia, risulta essere morto nel luglio scorso il Socio Straniero ALESSANDRO KARPINSKI che era il decano dei nostri Soci Stranieri e il nestore degli studi di geologia in Europa.

## RELAZIONI SU TEMI DATI

Si procede quindi alla discussione della relazione del Socio HERLITZKA sul tema « I fattori fisiologici e psicologici dell'acclimatazione nei paesi tropicali e subtropicali ». Il Presidente MILLOSEVICH dà la parola al Socio HERLITZKA il quale con brillante esposizione riassume il contenuto della sua relazione. L'oratore, dopo aver analizzato i caratteri del clima dell'Africa Orientale italiana e le modificazioni che l'organismo umano vi subisce, conclude la sua esposizione esprimendo la convinzione che mentre nel clima equatoriale delle bassure la colonizzazione italiana debba essere unicamente per funzioni direttive e di impero, la massa lavorativa troverà invece modo di fondare colonie sull'altipiano. Ma per favorire questa acclimatazione occorrono urgentemente studi sperimentali, per i quali sarebbe indispensabile la fondazione di due Istituti, uno a Mogadiscio e l'altro ad Addis Abeba.

Sulla relazione del Socio HERLITZKA prendono la parola i Soci MORGURGO e GHIGI rilevando, l'uno la differenza fondamentale che esiste, di fronte ai fenomeni dell'acclimatazione tra gli indigeni e gli immigrati, differenza che è dovuta a speciali caratteri ereditari e costituzionali degli indigeni; l'altro parlando della acclimatazione degli animali.

Il Socio DE BLASI comunica che nella mattina il Comitato Biologico e il Comitato Medico del Consiglio Nazionale delle Ricerche hanno fatto il voto che per lo studio dei fenomeni dell'acclimatazione sorgano due Istituti uno ad Addis Abeba e l'altro a Mogadiscio e propone che l'Accademia appoggi col suo voto l'iniziativa presa dal Consiglio Nazionale delle Ricerche.

Il Socio HERLITZKA risponde brevemente ai Soci MORPURGO e GHIGI e si associa pienamente alla proposta fatta dal Socio DE BLASI.

La proposta, messa ai voti dal Presidente, è approvata dalla Classe all'unanimità.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario aggiunto, AMALDI, presenta le opere pervenute in dono all'Accademia segnalando in particolar modo « I nuovi elementi d'analisi » del Prof. Buhl di Tolosa ; il volume ventiduesimo delle « Opera omnia » di Leonardo Eulero ; « Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche » del Prof. Gino Loria ; il tomo II delle « Opere » di G. Humbert.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio LEVI CIVITA presenta, a nome dei Soci assenti ALESSIO e ARMELLINI, per l'inserzione nelle « Memorie », lo studio di M. Vanni. « Sistemi di coordinate locali. Considerazioni sulla determinazione del punto nave astronomico mediante osservazioni simultanee o quasi simultanee del medesimo astro. Luoghi geometrici e linee di posizione ». Chiede quindi che, per guadagnare tempo nelle pratiche per la pubblicazione di detta Memoria, la Presidenza voglia nominare senz'altro la Commissione che dovrà riferire sulla Memoria stessa.

Il Presidente MILLOSEVICH aderisce alla richiesta del Socio LEVI-CIVITA e nomina i Soci ARMELLINI e ALESSIO a far parte della Commissione per l'esame della Memoria in parola.

Presentano note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci: BOMPIANI, BORDONI, CROCCO e LEVI CIVITA.



## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 7 febbraio 1937*

- BUHL M. A. — Nouveau éléments d'analyse, calcul infinitésimal, géométrie, physique théorique. Tome I. Variables réelles. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VII, I-204.
- COVELLO MARIO. — Indagini chimiche su campioni italiani di *Pyrethrum cinerariaefolium*. (Estr. dalla « Rivista Italiana delle essenze, dei profumi e delle piante officinali ». Anno XVIII). Milano, 1936. 4°, pp. 1-8.
- EULERUS LEONHARDUS. — Opera omnia. Serie I, vol. XXII. Lipsiae, 1936. 4°, pp. I-XV, I-420.
- FROIN G. — Pression solaire. Le faisceau énergétique terrestre. Paris, Librairie Louis Arnette, 1936. 8°, pp. 1-278.
- HONDA K. — Anniversary volume October 1936. (The Science Reports of the Tôhoku Imperial University). Sendai, Japan, 1936. 8°, pp. 1-1126.
- HUMBERT G. — Oeuvres. Publiées par Pierre Humbert et Gaston Julia. Tome II, Paris. Editeur Gauthier-Villars, 1936. 8°, pp. 1-575.
- LORIA GINO. — Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche. Padova, Casa Editrice Dott. Antonio Milano, 1937. 8°, pp. I-XV, I-589.
- MENOZZI C. — Nuovi contributi alla conoscenza della Fauna delle Isole italiane dell'Egeo. VII. Darmatteri di Rodi e Scarpanto. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ».
- Vol. XXX, pp. 24-31). Spoleto, 1936. 8°.
- NILSSON GERHARD. — Kometen erster und höherer Klasse. Stockholm, 1936. 8°, pp. 1-23.
- PERUCCA ELIGIO. — Fisica generale e sperimentale. Vol. I. Meccanica-calore. Torino, 1937. 8°, pp. I-XVI, I-719.
- SILVESTRI FILIPPO. — Contribuzione alla conoscenza dei Projapygidae (Insecta, Diplura). (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ».
- Vol. XXX, pp. 41-74). Spoleto, 1936, 8°.
- SILVESTRI FILIPPO. — Ridescrizione del genere *Termitococcus* Silv. con una specie nuova del Brasile e descrizione di un nuovo genere affine. (Estr. dal « Bollettino del Laboratorio di Zoologia generale ed agraria del R. Istituto superiore agrario di Portici ».
- Vol. XXX. pp. 32-40). Spoleto, 1936. 8°.
- USAI GIUSEPPE. — Inviluppi di cerchi che rappresentano podarie. (Estr. dagli « Atti della Società di scienze e lettere di Genova ».
- Vol. I, pp. 314-322) Pavia, 1936. 8°.
- USAI GIUSEPPE. — Inviluppi di cerchi in relazione con altre curve. (In « Esercitazioni matematiche ». Vol. IX, fasc. 1). Catania, 1936. 8°, pp. 1-9.
- USAI GIUSEPPE. — Inviluppi di cerchi soggetti a determinate condizioni. (Estr. di « Acta Societatis Gioeniae. Catinensis Naturalium Scientiarum ».

Serie VI, vol. I). Catania, 1936. 4°,  
pp. 1-9.

WINANTS MARCEL. — Équation semi-parabolique du troisième ordre résolution d'un problème à trois courbes

au moyen d'une équation intégrale mixte de Volterra-Fredholm. (Extr. du « Bulletin des Sciences mathématiques. Tome LX). Paris, 1936. 8°, pp. 1-4.

N. P.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 21 febbraio 1937 — Anno XV

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei.* Nota <sup>(1)</sup> del CORRISP. E. BOMPIANI.

Lo studio delle proprietà proiettive degli intornoi dei vari ordini di un punto di una superficie è stato compiuto fin dagli inizi della geometria proiettivo-differenziale <sup>(2)</sup>. Ma da una parte esso non si è ancora giovato delle semplificazioni più recentemente raggiunte in questo indirizzo (anzi in qualche lavoro recente si trovano inesattezze e inutili complicazioni al riguardo); e d'altra parte non mi risulta che sia stato posto il problema nella forma che direi più naturale (e che può avere anche interesse pratico) di costruire un elemento superficiale (che dirò brevemente: calotta) a partire da suoi elementi curvilinei. A questa posizione, nel campo metrico e per una calotta del 2° ordine, rispondono i teoremi di Meusnier e di Eulero: essi infatti permettono, e qui sta il loro interesse, di costruire la calotta a partire da due elementi curvilinei del 2° ordine delle sue linee di curvatura. Mi occupo appunto degli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero per calotte d'ordine  $\leq 4$ . Chiedo venia al lettore di dovere, inevitabilmente, ripassare su cose note <sup>(3)</sup>.

(1) Presentata nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) È pressochè impossibile (senza fare una lunga lista) citare i vari lavori concernenti questo studio. Una buona bibliografia è data in FUBINI-ČECH: *Introduction à la géométrie projective différentielle des surfaces* (Paris, Gauthier-Villars, 1931).

(3) Qui non dò che risultati: gli sviluppi necessari compariranno in un lavoro dal titolo: *Gli analoghi proiettivi dei teoremi di Meusnier e di Eulero* nei « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma ».

## 2. CALOTTA DEL 2° ORDINE.

Una calotta del 2° ordine  $\sigma_2$ , è definita da

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots$$

ed è geometricamente individuata sia da tre elementi curvilinei del 2° ordine  $E_2, E'_2, E''_2$  uscenti da un punto O con tangenti complanari distinte, sia da un  $E_2$  e da due rette (complanari alla tangente di  $E_2$ ) le quali ne siano tangenti asintotiche. Si tratta di costruire gli altri  $E_2$  di  $\sigma_2$ . Cominciamo da quelli tangenti ad un  $E_2$  dato.

Un  $E_2$  e un  $E'_2$  di  $\sigma_2$  fra loro tangenti hanno per piano principale, secondo Halphen, il piano tangente in O a  $\sigma_2$ ; cioè  $E'_2$  si ottiene proiettando sul piano assegnato per esso l' $E_2$  da un punto qualunque del piano tangente.

Questo fatto, sostanzialmente noto, è l'*analogo proiettivo del teorema di Meusnier* (per  $\sigma_2$ ), che è contenuto in esso.

Infatti, si consideri la sfera determinata dai cerchi osculatori ad  $E_2$  e ad  $E'_2$  e il cerchio sezione con un piano per la tangente comune: questo si ottiene come proiezione di uno (qualsiasi) dei due cerchi osculatori da un punto (conveniente) del piano tangente; tanto basta, per il fatto ricordato, per concludere che il terzo cerchio è osculatore alla sezione prodotta dal suo piano su  $\sigma_2$ : questo è il teorema di Meusnier.

Allo stesso modo si vede che:

*Le  $\infty^3$  coniche aventi contatto di 2° ordine con gli  $\infty^1 E_2$  aventi in un punto di  $\sigma_2$  la stessa tangente si possono distribuire su  $\infty^5$  quadriche (che rappresentano l'intorno di 2° ordine del punto O su  $\sigma_2$  nella direzione della tangente); se ne può determinare una (cono) con la condizione di toccare un piano lungo una retta.*

Se il piano è quello improprio e la retta quella impropria del piano per O normale alla tangente si ha un'altra forma metrica, pure nota, del teorema Meusnier.

Passiamo alla determinazione di  $E_2$  non tangenti a quelli dati  $E_2, E'_2, E''_2$ . Essa si fa col teorema:

*Le coniche aventi contatto del 2° ordine con gli  $E_2$  determinati su  $\sigma_2$  dai piani di un fascio (di asse non tangente a  $\sigma_2$ ) e che passino per un altro punto del suo asse e che tocchino ivi un piano stanno sopra una quadrica.*

*Vi sono  $\infty^3$  di queste quadriche aventi a comune  $\sigma_2$ .*

Presa come asse del fascio la normale in O a  $\sigma$  e come piano quello improprio si ha il teorema di Eulero di cui il precedente è l'analogo proiettivo.

Se  $\sigma_2$  è individuata da un  $E_2$  e dalle tangenti asintotiche la costruzione precedente non è applicabile. Si raggiunge lo scopo col teorema:



Date le tangenti asintotiche  $t_1, t_2$  in  $O$  di  $\sigma$ , ed un  $E_2$  di tangente  $t$ , per costruire l' $E'_2$  di tangente  $t' \neq t$ , e piano  $\pi'$  si proietti  $E_2$  da un punto qualsiasi di  $t_2$  su  $\pi'$  in  $\bar{E}_2$  e si costruisca poi (in  $\pi'$ ) l' $E'_2$  il cui invariante di contatto con  $\bar{E}_2$  è uguale al birapporto  $(t, t', t_1, t_2)$ .

Questo teorema permette anche (costruendo la coppia comune a due certe proiettività) di trovare le tangenti asintotiche di  $\sigma_2$  data con tre elementi generici  $E_2, E'_2, E''_2$  e in particolare di riconoscere se  $O$  è ellittico, parabolico o iperbolico per  $\sigma_2$ . Con ciò l'esame di  $\sigma_2$  è esaurito.

### 3. CALOTTA DEL 3° ORDINE.

Supponiamo  $O$  iperbolico per la calotta  $\sigma_3$  che rappresentiamo con

$$z = axy + \frac{1}{6}(px^3 + 3qx^2y + 3rxy^2 + sy^3) + \dots$$

Essa è individuata in generale da quattro elementi curvilinei del 3° ordine  $E_3$  (e si tratta di costruire gli altri); si noti ch'essi non possono essere arbitrari (non lo sono, per quanto precede, i loro  $E_2$ ). Ci si può sempre limitare ad  $E_3$  piani (cioè ad elementi a piano osculatore stazionario): ogni  $\bar{E}_3$  sghebbato di  $\sigma_3$  sta con l' $E_3$  piano avente lo stesso piano osculatore su un cono avente il vertice sul piano tangente.

Un primo elemento geometrico relativo a  $\sigma_3$  sono le tangenti di Darboux: ho già mostrato <sup>(1)</sup> ch'esse dipendono soltanto dagli  $E_2$  della sezione piana tangente in  $O$ , quindi solo parzialmente da  $\sigma_2$  e da  $\sigma_3$ . Invece la polarità di Darboux (fra la stella di rette per  $O$  e il piano rigato tangente rispetto alle quadriche di Darboux secanti  $\sigma_3$  secondo curve aventi per tangenti in  $O$  quelle di Darboux) dipende da tutta  $\sigma_2$  ma solo parzialmente da  $\sigma_3$ . Gli elementi  $E_2$  della sezione piana tangente e la polarità di Darboux determinano tutta  $\sigma_3$ .

Costruiamo ora gli  $E_3$  di  $\sigma_3$ . Serve per gli  $E_3$  piani tangenti ad uno dato il teorema:

Le  $\infty^2$  coniche aventi contatto 4-punto con gli  $E_3$  (piani) aventi una stessa tangente si lasciano distribuire in  $\infty^3$  quadriche di cui una è determinata da una retta. Fra esse vi sono  $\infty^2$  coni, aventi i vertici nei punti della tangente coniugata.

Ciascuna di queste quadriche contiene anche  $E_3$  sghebbi con la tangente assegnata. Questo è l'analogo proiettivo del teorema di Meusnier per  $\sigma_3$ .

(1) E. BOMPIANI: Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale (Conferenza tenuta nelle Università di Firenze e di Milano nei giorni 30 e 31 gennaio 1936; nei « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Milano »; Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie, Nota I: Ricostruzione rapida della teoria delle applicabilità proiettive. (« Rend. R. Acc. dei Lincei », 15 novembre 1936, n. 5).

Segue di qua che le  $\infty^1$  coniche fra le  $\infty^2$  precedenti tangenti ad un piano hanno i loro punti di contatto sopra una retta (incidente la tangente coniugata a quella degli  $E_3$  considerati); quindi, al variare della tangente per  $O$ , la  $\sigma_3$  determina su un piano  $\infty^1$  rette corrispondenti alle tangenti.

Queste  $\infty^1$  rette inviluppano sul piano una quartica con tre punti doppi, che preso il piano come  $t = 0$  nella rappresentazione adottata di  $\sigma_3$  hanno per coordinate

$$x = \frac{\varepsilon_i}{2a^2} p^{\frac{1}{3}} s^{\frac{2}{3}}, y = \frac{\varepsilon_i^2}{2a^2} p^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{3}}, z = 1; \varepsilon_i^3 = 1.$$

Scelto quello reale  $\varepsilon_i = 1$  (nel caso di  $O$  iperbolico; altrimenti uno di quelli reali), su  $t = 0$ , come punto unità ( $p = s = 2a$ ), l'asse  $z$  come polare di Darboux della retta  $z = t = 0$  e il punto unità dello spazio sulla quadrica di Darboux che tocca  $t = 0$  ( $a = 1$ ) si ha

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \dots$$

*Vi sono  $\infty^3$  riferimenti che danno a  $\sigma_3$  la forma ora scritta. Uno di essi è completamente fissato (se  $O$  è iperbolico) appena si dia un piano da considerarsi come  $t = 0$ . La polare di Darboux della sua intersezione col piano tangente è l'asse  $z$ , la retta unitaria per  $O$  proietta il punto doppio reale della quartica determinata da  $\sigma_3$  su  $t = 0$ , e il punto unità sta sulla quadrica di Darboux tangente a  $t = 0$ .*

Ritorniamo alla costruzione degli  $E_3$  (piani) di  $\sigma_3$ . Anzitutto un  $E_3$  (piano) uscente da  $O$  equivale ad una polarità fra il fascio di centro  $O$  (nel piano di  $E_3$ ) e la punteggiata sulla tangente.

Allora:

*La polarità di Darboux fa corrispondere ad ogni retta  $r$  per  $O$  (fuori del piano tangente) la retta dei flessi della cubica contenente i poli di  $r$  rispetto agli  $E_3$  delle sezioni piane (di  $\sigma_3$ ) per  $r$ . Questa cubica ha contatto armonico con ciascuno dei rami della sezione piana tangente; sicchè due di quegli  $E_3$  bastano (come appunto dev'essere) per costruirla.*

Questo è l'analogo proiettivo del teorema di Eulero per  $\sigma_3$ . Esso permette, data  $\sigma_3$  mediante gli  $E_2$  della sezione piana tangente e due  $E_3$ , di costruire tutti gli  $E_3$  (piani) i cui piani formano fascio con quelli dei due  $E_3$  dati (mediante la costruzione della cubica); avuti questi  $E_3$  (uno per ogni tangente) si passa agli  $E_3$  ad essi tangenti (e non in piani del fascio) mediante l'analogo proiettivo del teorema di Meusnier già dato: così son costruiti tutti gli  $E_3$ . E permette inoltre, individuata  $\sigma_3$  allo stesso modo, la costruzione della polarità di Darboux. E anche viceversa, dati gli  $E_2$  della sezione piana tangente e questa polarità, la costruzione di qualsiasi  $E_3$  di  $\sigma_3$ .

Non rimane, per completezza, che dare la costruzione degli  $E_3$  segati da un piano per una tangente asintotica, sia  $t_1$  (e  $t_2$  l'altra). Serve il teorema:

Dato l' $E_2$  di sezione piana tangente in  $O$  a  $t_1$  si costruisca (nel piano tangente) l' $E'_2$  avente con esso contatto armonico e si proietti questo  $E'_2$ , da un punto generico dello spazio, sopra una qualsiasi quadrica  $Q$  contenente  $\sigma_2$ : il nuovo elemento  $\bar{E}_3$  è proiettato, da un qualsiasi punto di  $t_2$  su un piano per  $t_1$ , nell'elemento  $E_3$  che questo piano sega su  $\sigma_3$ .

Si sarebbe potuta ripetere la stessa costruzione servendosi di  $E_2$  (in luogo di  $E'_2$ ) e di una quadrica  $Q'$  (invece di  $Q$ ) avente con  $\sigma_2$  contatto armonico.

#### 4. - CALOTTA DEL 4° ORDINE.

Essa dipende da 17 parametri di cui 12 sono determinati da  $\sigma_3$ . Siccome nel riferimento stabilito al n. 3 non rimaneva arbitrario che un piano (3 parametri) si devono avere per  $\sigma_4$  due invarianti: e ciò è noto. Un elemento pure noto relativo a  $\sigma_4$  è la quadrica di Moutard (contenente le coniche a contatto 5-punto con gli  $E_4$  piani per una tangente di  $\sigma_4$ ). Essa non è però sufficiente a caratterizzare  $\sigma_4$ . Per trovare una caratterizzazione geometrica di  $\sigma_4$ , cioè un riferimento proiettivo invariante e i due invarianti residui consideriamo le coniche osculatrici (a contatto 5-punto) con le sezioni piane di un fascio di asse  $r$  per  $O$  non tangente a  $\sigma_4$ ; e in particolare quelle contenute nei piani di Darboux per  $r$  (e per le tangenti di Darboux). Esse tagliano  $r$  in tre punti ( $\neq O$ ) e le tangenti in essi alle tre coniche hanno per traccie sul piano tangente punti della polare di Darboux di  $r$ . La quadrica contenente quelle tre tangenti è, in generale (cioè per  $r$  generica), ben determinata, e così il piano tangente in  $O$ . Se si approfondisce la ricerca si trova che:

Ad una retta generica  $r$  per  $O$  (non tangente; per una tangente si ha il teorema di Moutard) la calotta  $\sigma_4$  associa, nel modo precedente, una ben determinata quadrica (cui appartengono  $r$ , la sua polare di Darboux e le tangenti alle tre coniche osculatrici, nei piani di Darboux, nei punti ove segano  $r$ ). La corrispondenza fra le rette per  $O$  e i piani tangenti in  $O$  a quelle quadriche è quadratica (e ciascuna retta, com'è evidente, appartiene al piano corrispondente).

Vi è un'unica retta per cui la quadrica corrispondente è indeterminata; per essa le tre coniche nei piani di Darboux s'incontrano in un suo punto e le tangenti ad esse in questo punto stanno in un piano.

Presa questa retta come asse  $z$  e questo punto come suo punto improprio (il piano delle tangenti come  $t = 0$ ) e fissato il punto unità come al n. 3 si ha per  $\sigma_4$  la rappresentazione

$$z = xy + \frac{1}{3}(x^3 + y^3) + \frac{1}{4!}(Px + Ty)(x^3 + y^3) + \dots$$

ove tutto ha significato proiettivo; quindi  $P$  e  $T$  sono invarianti e riescono pienamente determinati dagli  $E_3$  della sezione piana tangente.

La quadrica associata dalle considerazioni precedenti alla retta

$$x/l = y/m = z$$

ha l'equazione, nel riferimento precedente,

$$(mx + ly)^2 + (l - 3m^2)lxz + (m - 3l^2)myz + \\ + \{2m^2l^2 - (l^3 + m^3)\}z^2 - (mx + ly - 2lmz) = 0$$

e non dipende affatto dagli invarianti  $P$  e  $T$ .

Abbiamo trovata una retta invariante con la condizione di coincidenza dei suoi punti d'intersezione ( $\neq O$ ) con le coniche osculatrici situate nei piani di Darboux per essa.

Per quali rette coincidono due di quei tre punti?

Le rette per le quali coincidono due delle tre intersezioni ( $\neq O$ ) con le coniche osculatrici situate nei piani di Darboux per esse si distribuiscono in tre fasci, i cui piani sostegni passano per la retta invariante già trovata e per le tre tangenti di  $C$ . Segre; in ciascuno di questi piani sia i punti di coincidenza sia l'ulteriore intersezione (su ciascuna retta del fascio) descrivono una conica.

Nel riferimento adottato i tre piani hanno le equazioni  $y = \varepsilon_i x$  ( $\varepsilon_i^3 = 1$ ) e le coniche dette sono inoltre rispettivamente rappresentate da  $tz - xy = \varepsilon_i yz$  e da  $tz - xy = -2\varepsilon_i yz$ .

Si potrebbe aggiungere che c'è una proiettività fra la stella di rette per  $O$  e le cubiche (del piano tangente) che hanno contatto armonico con ciascuno dei due rami della sezione piana tangente; una di queste cubiche è luogo delle traccie delle tangenti alle coniche osculatrici nei piani per la retta corrispondente e nei punti di questa. Lo studio della rigata di queste tangenti (o della corrispondenza fra i punti della retta  $r$  i punti della cubica corrispondente) finirebbe di determinare la costruzione degli  $E_4$  di  $\sigma_4$  a partire, p. es. da tre di essi e dagli  $E_3$  della sezione piana tangente.

Termino dando un'altra configurazione pure determinata da  $\sigma_4$ .

La calotta  $\sigma_4$  determina un fascio di quadriche, polari di  $O$  rispetto a tutte le superficie cubiche possedenti  $\sigma_4$ .

Queste quadriche tagliano le superficie cubiche in sestiche aventi in  $O$  un punto doppio e ivi per piano osculatore ai due rami il piano tangente a  $\sigma_4$ ; gli  $E_3$  di questi due rami (comuni a tutte quelle sestiche) finiscono di determinare, col riferimento già adottato,  $\sigma_4$ .

Una quadrica di Darboux e una quadrica del nuovo fascio si tagliano ulteriormente in una conica il cui piano sega il piano tangente, indipendentemente dalle quadriche scelte, in una retta invariante che, essendo già fissato il riferimento, è l'equivalente geometrico dei due invarianti  $P$  e  $T$ .

Questa ulteriore retta invariante è l'unica che abbia la stessa polare rispetto alle quadriche di Darboux e a quelle ora introdotte (oltre, s'intende, le tangenti asintotiche).

Con ciò  $\sigma_4$  è pienamente determinata con elementi geometrici finiti.



**Fisica** (Elettrotecnica). — *Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. GIORGI.

È ben noto che la predeterminazione degli effetti di distorsione negli impianti telegrafici e telefonici, è problema di difficoltà estrema; nonostante gli sforzi dei ricercatori e l'applicazione delle risorse più elevate della matematica si sa risolverlo solo in casi semplici. Interesserebbe invece sommamente avere un metodo da applicare precisamente nei casi più complessi, per poter conoscere *a priori* quali strutture possono valere come antidistorcenti nelle trasmissioni.

Indicherò qui un procedimento col quale, applicando le risorse del calcolo operatorio funzionale si arriva rapidamente a una determinazione globale che in molti casi può essere sufficiente per lo scopo.

Sia un sistema trasmettente, p. es. una linea comunque costituita, e preceduta e seguita da « apparecchiature di estremità » destinate allo scopo di ridurre le distorsione. La linea e le apparecchiature dette siano insieme di resistenze, induttanze e capacità, supposte invariabili, e non semplicemente collegate in serie o in parallelo, ma a guisa di reti qualunque. A monte di tutto agisca un voltaggio arbitrariamente variabile  $V_0(t)$ , e a valle di tutto sia un dispositivo ricevente; si indichi con  $V_1(t)$  la differenza di potenziale che per effetto di tutto quanto precede va ad agire su detto dispositivo.

La  $V_1(t)$  dipende funzionalmente dalla  $V_0(t)$ , ma non ha la stessa forma: in ciò consiste la distorsione.

Avendo indicato con  $\Delta$  l'operatore di derivazione  $\frac{d}{dt}$ , il metodo degli operatori insegna a ricavare, attraverso calcoli relativamente elementari, in base alla struttura del sistema, un'espressione analitica  $F(\Delta)$ , la quale definisce la relazione funzionale tra le due  $V_0(t)$ ,  $V_1(t)$ , cioè permette di rappresentarla sotto una forma simbolica così

$$V_1(t) = F(\Delta) V_0(t).$$

Ora, senza cercare di « valutare » in pieno l'operazione compresa nel simbolo  $F(\Delta)$ , ci si può proporre di cercare una cifra unica la quale misuri nel suo insieme l'entità della distorsione. Per indicare come vi si arrivi,

(1) Presentata nella seduta del 5 giugno 1936.



mi riferirò ai teoremi e alle notazioni contenuti nei miei lavori precedenti sul calcolo operatorio e sulle sue applicazioni <sup>(1)</sup>.

Gli effetti di  $F(\Delta)$  dipendono dal comportamento che avrebbe  $F(\Delta)$  come funzione analitica, qualora  $\Delta$  anzichè un simbolo d'operazione rappresentasse una variabile complessa. Se nell'intorno del punto  $\Delta = \infty$ , o per lo meno asintoticamente nelle direzioni  $\Delta \rightarrow \pm i\infty$ , la  $F(\Delta)$  si comporta come un esponenziale  $e^{-\theta\Delta}$ , tutti i segnali arrivano con un ritardo di tempo  $\theta$ . Per mettere da parte questo effetto, scomponiamo l'operatore in due fattori così

$$F(\Delta) = e^{-\theta\Delta} \Phi(\Delta).$$

Abbiamo da occuparci solamente del secondo. L'effetto di deformazione su qualunque segnale è conoscibile in base a quello che verrebbe prodotto su un segnale elementare di forma tipica, p. es. sopra uno che si identifichi con la funzione impulsiva unitaria  $Fu(t)$ . Ora, poichè  $\theta$  è il ritardo di tempo nell'arrivo del segnale, l'impulso  $Fu(t)$  che agisce all'origine all'epoca  $t = 0$ , produce sull'apparecchio ricevente, nel caso generale, un impulso, non più unitario, all'epoca  $t = \theta$ , e poi una « coda d'onda » diffusa, che segue all'impulso. La distorsione consiste nella presenza di questa ultima; e nei casi, molto frequenti, in cui si sappia che le ordinate di essa coda d'onda sono tutte positive, e positivo sia anche l'impulso che arriva, la comparazione fra l'area dell'impulso in arrivo e l'area della coda d'onda, fa conoscere l'entità totale della distorsione.

Ora, l'area dell'impulso in arrivo coincide col valore iniziale che avrebbe un segnale prodotto da quella « funzione telegrafica » che sono uso a indicare con  $1(t)$ . L'area complessiva è invece uguale al valore asintotico che avrebbe questo segnale ultimo. In virtù di teoremi dimostrati altrove, il primo valore è dato da  $\Phi(\infty)$ , il secondo da  $\Phi(0)$ . Quindi l'area della coda d'onda richiesta è

$$\Phi(0) - \Phi(\infty).$$

Considerando questo valore, e comparandolo con  $\Phi(\infty)$ , si acquista la conoscenza dell'entità complessiva della distorsione.

(1) Ved. soprattutto: *Sugli integrali dell'equazione di propagazione in una dimensione*. « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. 52 (anno 1928), pp. 265-312, e *Metodi moderni di calcolo operatorio funzionale*. « Rendiconti del Seminario Matematico e fisico di Milano », vol. VIII (1934), pp. 189-214. In quest'ultimo scritto sono contenute le altre indicazioni bibliografiche.

# MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Invarianti di complessi.* Nota di W. BLASCHKE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Consideremo il caso più semplice dello  $S_2$  Euclideo. Nella geometria degli insiemi si usano due operazioni: 1) l'addizione  $J = J' + J''$ , l'insieme  $J$  contiene tutti i punti contenuti o in  $J'$  o in  $J''$ ; 2) moltiplicazione o intersezione  $J = J' \cdot J''$ , l'insieme  $J$  contiene tutti i punti contenuti in  $J'$  e in  $J''$ .

Come complessi elementari introduciamo i triangoli nello  $S_2$ , ognuno contenente i punti interni ed i punti del contorno. Un insieme di punti nello  $S_2$ , che si può ottenere partendo da un numero finito di triangoli ed usando le nostre due operazioni un numero finito di volte, sarà chiamato un complesso. Anche nel « corpo » dei complessi le due operazioni  $C' + C''$  e  $C' \cdot C''$  sono eseguibili.

Per i complessi si hanno tre invarianti principali per il gruppo  $G_3$  dei movimenti dello  $S_2$ :

1) l'area  $A$ , 2) il perimetro  $P$ , 3) la curvatura integra  $C$ .

Questi hanno per i complessi semplici i seguenti valori:

		A	P	C
(1)	punto	0	0	$2\pi$
	segmento	0	$2L$	$2\pi$
	triangolo	$A$	$P$	$2\pi$

$L > 0$  è la lunghezza del segmento,  $A > 0$  e  $P > 0$  l'area ed il perimetro del triangolo nel senso elementare.

Si vede facilmente: Le definizioni di  $A, P, C$  s'estendono in modo unico a complessi arbitrari, se  $A, P, C$  soddisfano la legge d'addizione

$$(2) \quad F(C') + F(C'') = F(C' + C'') + F(C' \cdot C'').$$

Sembra importante rilevare che la legge (2) è caratteristica per i nostri invarianti nel modo seguente.

Sia  $F(C)$  una funzione reale dei complessi  $C$  colla proprietà:

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

I (*Invarianza*): Se esiste un movimento del gruppo  $G_3$  trasportando  $C'$  in  $C''$ , abbiamo  $F(C') = F(C'')$ ;

II (*Limitazione*): Per tutti i complessi semplici (I) e contenuti in un triangolo dato, abbiamo  $|F| < M$ ;

III (*Additività*):  $F$  soddisfa la legge (2).

Allora si trova

$$(3) \quad F = c_0 A + c_1 P + c_2 C$$

colle  $c_i$  costanti.

Tutti questi ragionamenti sono abbastanza generali per poter estenderli ad altri gruppi. Per esempio si troverà trattato il caso dello  $S_3$  nel mio libro *Vorlesungen über Integralgeometrie*, 2. Heft, Leipzig und Berlin 1937, § 43.

Il nostro teorema si può usare per facilitare le dimostrazioni nella « geometria integrale ».

**Matematica.** — *Quadriche di Moutard e fascio canonico.*  
Nota di ENEA BORTOLOTTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. In una ricerca di E. Bompiani dedicata alla costruzione delle calotte superficiali dei vari ordini, a partire da elementi curvilinei — dei cui risultati, esposti ora in una Nota <sup>(2)</sup> contenuta in questo fascicolo dei « Rendiconti », l'A. già da tempo mi ha messo gentilmente a conoscenza — l'A., fra l'altro associa a una calotta del 4° ordine  $\sigma_4$  uscente da un punto  $O$  (e utilizza quale asse  $\tilde{x}$  di un riferimento locale) una retta invariante (canonica) da lui trovata. Tale retta  $b$  è caratterizzata dalla coincidenza delle sue ulteriori intersezioni (fuori di  $O$ ) con le coniche osculatrici (a contatto 5-punto) in  $O$  alle sezioni di  $\sigma_4$  coi piani che da essa proiettano le tre tangenti di Darboux. Il punto in cui coincidono le tre intersezioni è ovviamente il punto comune (fuori di  $O$ ) alle tre quadriche di Moutard corrispondenti alle tre tangenti di Darboux. Questa osservazione è stata il punto di partenza del presente lavoro.

Già in una Nota del 1924 <sup>(3)</sup> il Bompiani aveva considerato, più in generale, le terne di quadriche di Moutard corrispondenti alle terne di tangenti apolari alle asintotiche, e aveva trovato che ogni tale terna di quadriche

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) E. BOMPIANI, *Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei*, p. 149 di questo fascicolo.

(3) *Contributi alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie*. « Bollettino Un. Matem. Italiana », III, 1924, 49-56, 97-100, ved. p. 98.

determina un punto  $Q(t)$  (ulteriore intersezione delle tre quadriche fuori di  $O$ ), e che questi punti  $Q(t)$  congiunti con  $O$  danno le *generatrici di un cono quadrico*  $C^2$ , proiettivamente invariante. Ecco quanto era già noto. Ma parecchi altri elementi proiettivamente invarianti sono collegati a quelle terne di quadriche: l'elemento essenziale è una *quartica di prima specie*  $\Gamma^4$  con punto doppio in  $O$ , luogo dei punti  $Q(t)$  medesimi. Ad essa fa capo tutta una configurazione di enti geometrici invarianti, che per la semplicità della sua costruzione, non meno che della rappresentazione analitica, mi sembra interessante. Insieme a svariate *rette canoniche*, che sebbene ottenute in modo particolarmente semplice non coincidono con alcuna delle rette canoniche più note, si ottengono anche in modo diretto il *piano canonico* e il *centro del 2° fascio canonico*: quest'ultimo è l'ulteriore punto  $P_c$  (oltre  $O$ ) del piano tangente  $\pi$  da cui  $\Gamma^4$  è proiettata secondo un cono quadrico,  $K^2$ ; il piano canonico può ricavarsi con procedimento duale, ma è anche il piano polare  $\pi_c$  di  $P_c$  rispetto al cono  $C^2$ . Si hanno poi: *rette non canoniche* (le tangenti a  $\Gamma^4$  in  $O$ ); piani, punti, coniche, quadriche, ecc. Ma mi limito a indicare, tralasciando per brevità tutti gli sviluppi, gli elementi che appaiono più notevoli.

2. Siano, sulla superficie  $\sigma$ , le  $x^i$  coordinate normali di Fubini, e nell'intorno del punto  $O(x^i)$  generico di  $\sigma$  le  $x, y, z$  siano *coordinate proiettive locali* di un punto  $y^i$  nel sistema che ha  $x^i, x_u^i, x_v^i, x_{uv}^i$  quali punti fondamentali ( $y^i = x^i + x x_u^i + y x_v^i + z x_{uv}^i$ ). Adottando l'usuale convenzione chiamerò *prima e seconda retta canonica*  $\lambda$ , o di *parametro*  $\lambda$ , la retta  $x = \lambda \psi_2 \tilde{z}$ ,  $y = \lambda \psi_1 \tilde{z}$  del 1° fascio canonico (congiungente  $x^i$  al punto  $\lambda(\psi_2 x_u^i + \psi_1 x_v^i) + x_{uv}^i$ ) e, rispettivamente, la retta  $\lambda(\psi_1 x + \psi_2 y) = 1$ ,  $z = 0$  (congiungente i punti  $x_u^i + \lambda \psi_1 x^i, x_v^i + \lambda \psi_2 x^i$ ). Rammento che la superficie  $\sigma$  in coordinate locali  $x, y, z$  è rappresentata, nell'intorno del 4° ordine del suo punto  $O$ , dallo sviluppo

$$z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \frac{1}{12}(\beta \psi_1 x^4 - 4\beta \psi_2 x^3 y - 6\theta_{uv} x^2 y^2 - 4\gamma \psi_1 x y^3 + \gamma \psi_2 y^4) + \dots$$

ove

$$(2) \quad \theta = \log(\beta \gamma) \quad , \quad \psi_1 = 2\theta_u - \frac{\beta_u}{\beta} = \frac{\partial \log \beta \gamma^2}{\partial u} \quad , \quad \psi_2 = 2\theta_v - \frac{\gamma_v}{\gamma} = \frac{\partial \log \beta^2 \gamma}{\partial v}.$$

La *quadrica di Moutard* relativa alla tangente  $y = nx$  è <sup>(1)</sup>

$$(3) \quad [4(\beta + n^3 \gamma)^2 - 3n(\beta \psi_1 - 4\beta \psi_2 n - 6\theta_{uv} n^2 - 4\gamma \psi_1 n^3 + \gamma \psi_2 n^4)] \chi^2 + \\ + 36n^3(\chi - xy) - 12n^2(\gamma n^3 - 2\beta)x\chi + 12n(2\gamma n^3 - \beta)y\chi = 0.$$

(1) Ved. G. DARBOUX, *Sur le contact des courbes et des surfaces*. « Bulletin des Sc. Math. et Astr. » (2), IV, 1880, 348-384, form. (32), p. 363 (ove nel prodotto  $\chi(y - nx) \cdot (\varphi_2 \varphi'_3 - \varphi_3 \varphi'_2)$  va aggiunto il fattore  $\varphi_2$ ); e anche E. ČECH, *Moutardovy Kvadriky*, « Publ.



Le tre quadriche di Moutard relative a tre tangenti  $y = nx$ ,  $y = \varepsilon nx$ ,  $y = \varepsilon^2 nx$  che formino una terna apolare alle asintotiche ( $\varepsilon^3 = 1$ ,  $\varepsilon \neq 1$ ) hanno a comune, fuori di P, il punto Q di coordinate

$$(4) \quad x = \frac{1}{4} \frac{4\beta - \gamma n^3}{-2\beta + \gamma n^3} \psi_2 \tau, \quad y = \frac{1}{4} \frac{\beta - 4\gamma n^3}{-\beta + 2\gamma n^3} \psi_1 \tau,$$

$$\tau = - \frac{144 n^3 (2\beta - \gamma n^3) (\beta - 2\gamma n^3)}{8[2(\beta + \gamma n^3)^2 + 9\theta_{uv} n^3] (2\beta - \gamma n^3) (\beta - 2\gamma n^3) - 9\psi_1 \psi_2 n^3 (4\beta - \gamma n^3) (\beta - 4\gamma n^3)}.$$

Al variare di  $t = n^3$  questo punto Q(t) descrive una quartica di prima specie  $\Gamma^4$ , con punto doppio in O, e quindi proiettata da O secondo un cono quadrico,  $C^2$ :

$$(5) \quad \left(x + \frac{7}{12} \psi_2 \tau\right) \left(y + \frac{7}{12} \psi_1 \tau\right) = \frac{\psi_1 \psi_2}{36} \tau^2 (1).$$

Tale cono  $C^2$  taglia il piano tangente  $\pi$  a  $\sigma$  in O lungo le tangenti asintotiche: su queste stanno i due punti H, K  $\left(t = \frac{2\beta}{\gamma}, \quad t = \frac{\beta}{2\gamma}\right)$  ulteriori intersezioni (fuori di O) di  $\Gamma^4$  con  $\pi$ , di coordinate locali  $\left(\frac{-12}{7\psi_1}, 0, 0\right)$  e  $\left(0, \frac{-12}{7\psi_2}, 0\right)$ . La congiungente HK è la 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$ ; la 1<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$  è la polare di  $\pi$  rispetto al cono  $C^2$  (2).

de la Fac. des Sc. Univ. Masaryk», Brno, 1921, n. 3, form. (7), p. 6. Nel lavoro di E. ČECH: *L'intorno d'un punto d'una superficie considerato dal punto di vista proiettivo*. «Annali di Matem.» (3) XXXI, 1922, 191-206, nell'equazione (7) data a p. 195 i due coefficienti 24 vanno mutati in 12; la stessa correzione va fatta (di questa avvertenza m'incarica l'A.) nella (14) p. 97 dell'ultima Nota cit. del BOMPIANI: ove, negli ultimi due termini,  $N_1$  ed  $N_2$  vanno anche mutati in  $-N_1$  e  $-N_2$ .

(1) Per facilitare il raffronto indico qui le equazioni, nel riferimento adottato, di altri due coni quadrici invarianti ottenuti da BUCHIN SU e da R. CALAPSO (ved. BUCHIN SU: *On certain quadratic cones projectively connected with a space curve and a surface*. «The Tôhoku Mathem. Journal», 38, 1933, 233-244; R. CALAPSO, *Sugli enti proiettivi legati al generico punto di una superficie*. «Atti Accad. Gioenia», Catania, 1932, (5), XIX, Mem. XIV). Tali coni sono

$$\left(x + \frac{1}{4} \psi_2 \tau\right) \left(y + \frac{1}{4} \psi_1 \tau\right) = 4\beta\gamma \tau^2 \quad ; \quad \left(x + \frac{1}{4} \psi_2 \tau\right) \left(y + \frac{1}{4} \psi_1 \tau\right) = \frac{9}{16} \beta\gamma \tau^2,$$

rispettivamente. Essi dunque appartengono a uno stesso fascio di cui fanno parte il piano tangente contato due volte e la coppia di piani proiettanti dal (1°) spigolo di Green le tangenti asintotiche.

(2) La 1<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$  è stata ottenuta, in modo assai diverso e meno semplice, in relazione al cono  $\Gamma_6$  di Segre e alla tangente canonica, da G. SANNIA (ved. *Nuovi enti proiettivi nella stella che ha per centro un punto di una superficie*. «Rendiconti Lincei», (6), IX, 1929, 1081-1085).

I punti di  $\Gamma^4$ , o anche le generatrici di  $C^2$  per essi, risultano proiettivamente riferiti (per eguaglianza dei valori del parametro  $t$ ) alle terne di tangenti  $y^3 - tx^3 = 0$ : in particolare in questa proiettività alle terne coincidenti nelle due tangenti asintotiche ( $t = 0$ ,  $t = \infty$ ) corrisponde il punto  $O$  medesimo, sui due rami di  $\Gamma^4$  che ne escono; alle terne di Darboux e di C. Segre  $\left(t = \mp \frac{\beta}{\gamma}\right)$  corrispondono sul cono le 1<sup>e</sup> rette canoniche  $\lambda = -\frac{5}{12}$ ,

$\lambda = -\frac{3}{4}$ . Esse dunque sono le intersezioni del cono  $C^2$  col piano canonico  $\pi_c$ . La prima di esse è proprio la retta invariante  $b$  (accennata sopra) trovata dal Bompiani, e assunta come asse  $z$  del suo riferimento locale <sup>(1)</sup>.

L'involuzione, nella totalità delle terne  $y^3 - tx^3 = 0$ , in cui si corrispondono due terne coniugate (ad es. le due terne di Darboux e di Segre) induce anche sul cono  $C^2$  un' involuzione, avente per asse la 1<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{9}{20}$ . Il piano canonico è l'unico piano coniugato del piano tangente  $\pi$  rispetto al cono  $C^2$ , il quale segni su  $C^2$  una coppia dell' involuzione.

3. Le tangenti alla quartica  $\Gamma^4$  nel punto doppio  $O$  sono

$$(6) \quad x = -\frac{\psi_2}{2}z, \quad y = -\frac{\psi_1}{4}z; \quad \lambda = -\frac{\psi_2}{4}z, \quad y = -\frac{\psi_1}{2}z.$$

Ecco dunque due rette invarianti di particolare semplicità, non situate sul piano canonico (e legate, come tutti gli elementi di cui parliamo, all'intorno del 4° ordine di  $O$  su  $\sigma$ ). Il loro piano è

$$(7) \quad 4\psi_1 x + 4\psi_2 y + 3\psi_1 \psi_2 z = 0;$$

questo piano invariante incontra il piano tangente secondo la coniugata  $q$  della tangente canonica  $p$  (di equazioni  $z = 0$ ,  $\psi_1 x + \psi_2 y = 0$ ); taglia il piano canonico nella 1<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{3}{8}$  <sup>(2)</sup>. Esso è anche il piano di collineazione della involuzione detta sopra.

La quarta armonica, dopo la tangente canonica ( $\lambda = \infty$ ) e le rette canoniche  $\lambda = -\frac{3}{8}$ ,  $\lambda = -\frac{3}{4}$ , di cui s'è indicata la costruzione a partire dalla quartica  $\Gamma^4$ , è la normale proiettiva di Fubini: questo modo di

(1) La 1<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{5}{12}$  è stata ricavata dal cono  $\Gamma_6$  nella Nota (già cit.) del SANNIA: quale intersezione col piano canonico  $\pi_c$  del piano delle generatrici inflessionali di un cono cubico collegato a  $\Gamma_6$ .

(2) Anche questa retta già si trova nella Nota (più volte cit.) del SANNIA: quale retta comune ai tre piani del cono  $\Gamma_6$  (diversi da  $\pi$ ) uscenti dalle tre tangenti di Segre.

ottennerla non rappresenta però un progresso rispetto ad altri (anche del tutto analoghi) già noti.

4. Gli ulteriori vertici di coniche quadriche contenenti la quartica  $\Gamma^4$  stanno naturalmente nel piano (7); per trovarli potremmo valerci della rappresentazione analitica del fascio di quadriche di cui  $\Gamma^4$  è curva base: che si ottiene combinando linearmente l'equazione del cono (5) con quella di un'altra quadrica passante per  $\Gamma^4$ , ad es. della seguente:

$$(8) \{ 28(\psi_1 x + \psi_2 y) + (15\psi_1\psi_2 + 24\theta_{uv})z + 48 \} \{ 4(\psi_1 x + \psi_2 y) + 3\psi_1\psi_2 z \} + \\ + 16\beta\gamma z \{ 6(\psi_1 x + \psi_2 y) + 5\psi_1\psi_2 z \} = 0,$$

caratterizzata dal passaggio pel centro  $P_c$  del 2° fascio canonico. È immediata l'osservazione che la quadrica (8) è appunto uno dei due coni che cerchiamo: il suo vertice è  $P_c$ .

Ma è più semplice valerci dell'osservazione che i due vertici cercati sono i punti principali del Bompiani<sup>(1)</sup> relativi all'intersezione dei due rami di  $\Gamma^4$  in  $O$ . Per questo possono riuscire utili le formule da me indicate in una precedente Nota<sup>(2)</sup>. Troviamo che le rette principali (secondo Bompiani), congiungenti i punti cercati ad  $O$ , sono la coniugata  $q$  della tangente canonica e la 1ª retta canonica  $\lambda = -\frac{3}{8}$ , già osservata poco sopra; indi che i punti principali sono il centro  $P_c$  del 2° fascio canonico (punto  $\psi_2 x_u^i - \psi_1 x_v^i$ ) e il punto di coordinate locali

$$(9) \quad x = -\frac{27\psi_2}{4\beta\gamma - 36\theta_{uv} + 9\psi_1\psi_2}, \quad y = -\frac{27\psi_1}{4\beta\gamma - 36\theta_{uv} + 9\psi_1\psi_2}, \\ \tilde{z} = \frac{72}{4\beta\gamma - 36\theta_{uv} + 9\psi_1\psi_2}.$$

Ottenuto il centro  $P_c$  del 2° fascio canonico si può ricavarne (indipendentemente dalle rette canoniche che vi giacciono) anche il piano canonico, quale piano polare di  $P_c$  rispetto al cono  $C^2$ .

Proiettando dal punto (9) la quartica  $\Gamma^4$  sul piano tangente  $\pi$  si ha la conica invariante di equazione

$$(10) \quad 7(\psi_1^2 x^2 + \psi_2^2 y^2) + (7\psi_1\psi_2 - 16\beta\gamma)2xy + 12(\psi_1 x + \psi_2 y) = 0,$$

tangente in  $O$  alla coniugata  $q$  della tangente canonica; e tangente nel punto in cui essa interseca (fuori di  $O$ ) la tangente canonica  $p$  alla retta del 2°

(1) Ved. E. BOMPIANI: *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe*. «Rendiconti Lincei», (6), XIV, 1931, 456-461.

(2) Ved.: *Gli invarianti d'intersezione nella geometria proiettiva differenziale delle superficie*. «Rendiconti Semin. Fac. Sc. Cagliari», II, 1932, 97-108.

fascio canonico corrispondente al valore non costante  $\lambda = -\frac{7\psi_1\psi_2 - 8\beta\gamma}{12\psi_1\psi_2}$  del parametro.

Proiettando invece la quartica  $\Gamma^4$  dal centro  $P_c$  del 2° fascio canonico ad es. sul piano canonico si ha anche su questo una conica invariante, ecc. È chiaro ormai come possano ottenersi anche altri elementi invarianti tutti legati alla calotta del 4° ordine  $\sigma_4$ : la ricerca relativa si riduce a una semplice esercitazione, non la condurremo oltre. Accenniamo soltanto a una *proiettività* non involutoria che si ottiene entro il 1° fascio canonico: essa a una (1ª) retta canonica ( $\lambda$ ) fa corrispondere la polare ( $\lambda'$ ) del piano tangente rispetto al triedro formato dalla supposta retta canonica ( $\lambda$ ) e dalle rette invarianti non canoniche (6). L'equazione della proiettività è  $\lambda' = \frac{\lambda}{3} - \frac{1}{4}$ : rette unite sono (come *a priori* è ovvio)  $\lambda = \infty$  e  $\lambda = -\frac{3}{8}$ ; alla  $\lambda = -\frac{7}{12}$  corrisponde la  $\lambda = -\frac{4}{9}$ ; alla  $\lambda = -\frac{3}{4}$  la direttrice ( $\lambda = -\frac{1}{2}$ ) e a questa la  $\lambda = -\frac{5}{12}$ ; alla normale proiettiva ( $\lambda = 0$ ) lo spigolo ( $\lambda = -\frac{1}{4}$ ) a questo l'asse di Čech ( $\lambda = -\frac{1}{3}$ ), ecc. (1).

Così dunque si ricostruiscono anche le altre rette canoniche più note, ma per una via che non è certo la più consigliabile, e le pone in un ruolo affatto secondario: mentre appaiono in primo piano altre rette canoniche. Del resto quello che occorre e basta perchè l'intero fascio canonico sia noto (cioè: siano note tutte le rette canoniche  $\lambda = \text{cost.}$ ) è naturalmente *conoscere due rette canoniche* (diverse dalla tangente canonica): quali esse siano è cosa secondaria. La cosa, analiticamente ovvia, ha un chiaro risalto geometrico nell'ultima Nota (già cit.) del Bompiani (2).

(1) Un'altra proiettività nel fascio canonico si è presentato a G PALOZZI (*Alcuni risultati di geometria proiettivo-differenziale*. «Rendiconti Lincei» (6), XV, 1932, 543-548). La proiettività è  $\lambda' = \frac{\lambda}{2} - \frac{1}{8}$ .

(2) Le due rette canoniche di cui dà costruzione diretta il Bompiani sono:  $\lambda = -\frac{5}{12}$  (come già s'è accennato) e  $\lambda = \frac{1}{6}$ . A quanto indica il Bompiani circa la rappresentazione di  $\sigma_4$  in relazione alla prima retta (presa come asse  $\chi$  del riferimento locale), raccogliendo anche altre cose note, possiamo aggiungere questa osservazione riassuntiva circa i tipi di rappresentazione di  $\sigma_4$  che si presentano con speciali caratteri di semplicità: inteso che l'asse  $\chi$  e la «retta impropria» sul piano tangente  $\chi = 0$  siano polari rispetto alle quadriche di Darboux, indicato con  $\Phi_4 = Px^4 + 4Qx^3y + 6Rx^2y^2 + 4Sxy^3 + Ty^4$  il complesso dei termini di 4° grado nella rappresentazione locale della superficie (cioè, con  $\Phi_4 = 0$  la quaterna di tangenti alla curva intersezione di  $\sigma$  con la superficie cubica che è rappresentata dallo sviluppo relativo alla superficie  $\sigma$ , arrestato al 3° grado), possiamo supporre

5. Il Bompiani ha osservato che se si mandano le tangenti alle coniche osculatrici delle sezioni proiettanti dalla 1<sup>a</sup> retta canonica  $b \left( \lambda = -\frac{5}{12} \right)$  le tangenti di Darboux nel punto in cui tale retta le interseca ulteriormente (fuori di O) *si hanno tre rette complanari*; il loro piano  $\alpha$  dal Bompiani è assunto a piano  $t = 0$  (« piano improprio ») del riferimento locale. Aggiungo questa osservazione: la proprietà è, per la terna di Darboux, *caratteristica*. Se al luogo di questa terna si prende la  $y^3 - tx^3 = 0$  generica, le tre tangenti corrispondenti *formano un triedro*. Il piano polare della corrispondente generatrice (OQ) del cono (5) rispetto a questo triedro taglia il piano tangente  $\pi$  secondo una retta, la quale al variare di  $t$  *involuppa una conica del piano*  $\pi$ :

$$(11) \quad \{ 7 (\psi_1 x + \psi_2 y) + 12 \}^2 - 16 \psi_1 \psi_2 xy = 0.$$

Questa è tangente alle tangenti asintotiche nei punti H, K in cui esse incontrano  $\Gamma^4$  (e la 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$ ). La tangente alla conica (11) segnata su  $\pi$  dal piano  $\alpha$  detto poco sopra è la 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{5}{12}$ : come implicitamente già risulta da quanto ottiene il Bompiani.

6. Indicherò ancora alcune semplici relazioni fra la quartica  $\Gamma^4$ , o il cono  $C^4$ , e le quadriche di Lie e di Darboux.

Il cono  $C^2$  interseca la quadrica di Lie secondo le tangenti asintotiche e, inoltre, secondo una conica contenuta nel piano

$$(12) \quad 28 (\psi_1 x + \psi_2 y) + \{ 15 \psi_1 \psi_2 + 24 (\beta\gamma + \theta_{uv}) \} \chi + 48 = 0,$$

di aver reso ad es.  $R = 0$  prendendo il « punto improprio » dell'asse  $\chi$  sulla *quadrica canonica*, di Wilczynski e Bompiani: ora ecco quali sono le rette canoniche da assumere ad asse  $\chi$  per ottenere per  $\Phi_4$  le forme più semplici:

1.  $\Phi_4 = 0$  *apolare alle asintotiche*:  $\lambda = -\frac{1}{2}$  (direttrice) (Wilczynski);
2.  $\Phi_4 = 0$  *apolare alle tangenti di Darboux*:  $\lambda = -\frac{1}{3}$  (asse) (Terracini);
3.  $\Phi_4 = 0$  *apolare alle tangenti di Segre*:  $\lambda = 0$  (normale proiettiva) (Fubini);
4.  $\Phi_4 = 0$  *contenente le tangenti asintotiche* (e una coppia apolare ad esse):  $\lambda = -\frac{1}{4}$  (spigolo) (Darboux);
5.  $\Phi_4 = 0$  *contenente le tangenti di Darboux* (e la coniugata della tangente canonica):  $\lambda = -\frac{5}{12}$  (Bompiani);
6.  $\Phi_4 = 0$  *contenente le tangenti di Segre* (e la tangente canonica):  $\lambda = -\frac{3}{4}$ .



piano invariante non passante per  $O$ , e secante il piano tangente lungo la 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$ .

La quartica  $\Gamma^4$  tocca ciascuna quadrica del fascio di Darboux ed oscula la quadrica di Lie in ciascuno dei due punti  $H, K$  comuni ad essa e a  $\pi$  (fuori di  $O$ ). La condizione di toccare in  $H, K$  la  $\Gamma^4$  (il che equivale a imporre la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{7}{12}$  quali rette polari), aggiunta alla condizione di avere una seconda coppia di rette canoniche (1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>) d'egual parametro quali rette polari determina entro la totalità delle quadriche passanti per le tangenti asintotiche il fascio di Darboux: questo è noto e ovvio; se di più imponiamo il contatto del 2° ordine in  $H, K$  con  $\Gamma^4$  caratterizziamo entro il fascio di Darboux la quadrica di Lie.

Se rammentiamo <sup>(1)</sup> che l'intorno del 4° ordine di un punto  $O$  su una superficie è determinato dagli elementi  $E_2$  delle asintotiche in  $O$ , dalla quadrica di Lie e da due rette canoniche, vediamo che a questi elementi si possono anche sostituire i seguenti: gli elementi  $E_2$  delle asintotiche; la quartica sezione di un cono quadrico di vertice  $O$  contenente le due tangenti asintotiche con un cono quadrico avente pure il vertice  $P_c$  sul piano tangente ma non su una tangente asintotica, e passante per  $O$ ; e infine (ad es. quale 2<sup>a</sup> retta canonica  $\lambda = -\frac{5}{12}$ ) una retta del fascio  $P_c$ .

(1) Ved. E. ČECH, *L'intorno di un punto . . .* (già cit.), p. 200.

**Matematica.** — *Alcune superficie di terzo e quarto ordine.*  
Nota di R. CALAPSO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. La superficie gobba di terzo grado del tipo di Cayley (che brevemente chiamiamo « rigata di Cayley ») si è presentata varie volte negli studi di Geometria proiettiva differenziale, sia come ente *legato* al generico punto di una superficie <sup>(2)</sup>, sia come *modello* di superficie soddisfacenti a determinate condizioni <sup>(3)</sup>.

Lo studio della citata Memoria del Bompiani, insieme con quanto mi era noto dalle mie ricerche, mi ha invogliato a ripigliare l'argomento per segnalare alcune proprietà della detta superficie e di altre che di essa si presentano come la naturale estensione.

2. È noto <sup>(4)</sup> che il luogo dei vertici dei coni quadrici che passano per sei punti  $P_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) assegnati genericamente nello spazio, è una superficie  $F_4$  del quarto ordine che ammette i punti  $P_i$  come punti doppi. Però quando i punti  $P_i$  non sono tutti distinti, la superficie presenta singolarità più elevate e talora si spezza.

Un teorema che sembra non sia stato enunciato finora è che *in ogni caso la cubica gobba individuata dai sei punti è linea asintotica per la detta superficie*.

Qui interessano i casi singolari, e signaleremo per esempio quelli che concorrono a caratterizzare i moduli a cui appartiene  $F_4$ ; per esempio *quando i sei punti sono distribuibili in due terne che definiscano (sulla cubica dei detti punti) una serie lineare con due coincidenze triple, la superficie  $F_4$  appartiene al modulo definito da due rigate di terzo grado (del tipo di Cayley) aventi un'asintotica comune* <sup>(5)</sup>. Queste due rigate ammettono rispettivamente i punti delle coincidenze triple come punti unipiani e la loro asintotica comune è la cubica dei sei punti dati.

3. Sia  $\gamma$  la cubica dei sei punti ed  $M$  un punto qualunque assegnato su di essa. Se i punti  $P_i$  sono tutti riuniti in  $M$ , il piano osculatore alla

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) CALAPSO, *Sulle superficie gobbe di terzo grado legate al punto di una superficie*. « Rendiconti Lincei », 1931.

(3) BOMPIANI, *Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie*. « Annali di Matematica », 1925-26.

(4) SALMON, *Traité de géométrie analytique à trois dimensions*. Parigi, Gauthier-Villars, 1892, parte 3<sup>a</sup>, pp. 112.

(5) Quando diciamo asintotica di una superficie rigata, intendiamo asintotica curva.

cubica in  $M$ , contato due volte, è uno dei coni in questione, ed un punto qualunque di questo piano appartiene ad  $F_4$ , la quale perciò si spezza nel suddetto piano e in una rimanente parte, di terzo ordine, che indichiamo con  $U_3$ . Questa è una rigata di Cayley; le sue direttrici coincidono con la tangente in  $M$  alla cubica  $\gamma$  ed  $M$  è il punto uniplanare. Il piano relativo ad esso è il piano osculatore a  $\gamma$  in  $M$ .

Ma ci sembra utile osservare che: *una qualunque rigata di terzo grado (del tipo di Cayley) è sempre deducibile come luogo dei vertici dei coni quadrici che hanno nel punto uniplanare contatto 6-punto con una qualunque asintotica di essa.*

Infatti partendo da una cubica gobba  $\gamma$  e da un suo punto  $M$ , il procedimento indicato conduce ad una rigata di Cayley  $U_3$ , avente in  $M$  il punto uniplanare, che è generale, perchè due tali rigate sono sempre proiettivamente equivalenti. Di più la curva  $\gamma$  è da considerare una qualunque asintotica di  $U_3$ , perchè esiste sempre una proiettività che trasforma  $U_3$  in se stessa e porta la sua asintotica  $\gamma$  in qualsiasi altra asintotica, assegnata *a priori* <sup>(1)</sup>.

Si deduce da queste considerazioni, d'accordo con quanto ha osservato il Bompiani nelle ultime righe della citata Memoria, che una cubica gobba  $\gamma$  e un suo punto qualunque  $M$  individuano una rigata di Cayley per la quale  $M$  sia il punto uniplanare e la cubica sia asintotica della superficie. Questa a noi risulta come luogo dei vertici dei coni quadrici che hanno con  $\gamma$  contatto 6-punto in  $M$ , ed è utile fare un raffronto, dal punto di vista *sintetico*, fra questa costruzione e quella segnalata dal Bompiani.

Indichiamo perciò con  $t$  la tangente a  $\gamma$  in  $M$  e con  $g$  una qualunque generatrice della rigata, ottenuta (secondo la costruzione del Bompiani) congiungendo un qualunque punto  $P$  di  $\gamma$  col punto in cui il piano osculatore  $\pi$  a  $\gamma$  nel detto punto incontra la retta  $t$ . Sia poi  $O$  un punto generico della retta  $g$ . Si tratta di far vedere che il punto  $O$  è vertice di un cono quadrico avente con la cubica  $\gamma$  contatto 6-punto in  $M$ . A tale scopo è utile introdurre un generico piano  $\alpha$  e considerare le proiezioni  $\gamma'$ ,  $M'$ ,  $t'$  di  $\gamma$ ,  $M$  e  $t$  da  $O$  su  $\alpha$ , e le tracce  $S$  ed  $r$  della retta  $g$  e del piano  $\pi$  su  $\alpha$ .

Evidentemente,  $S$  è l'immagine di  $P$ , e poichè il centro di proiezione  $O$  appartiene al piano osculatore  $\pi$  alla cubica  $\gamma$  in  $P$ , si deduce che  $S$  è un flesso di  $\gamma'$  ed  $r$  (traccia di  $\pi$ ) ne è la relativa tangente.

Introduciamo ancora sul piano  $\alpha$  la conica  $k$  avente con la cubica  $\gamma'$  contatto 5-punto (almeno) in  $M'$  e consideriamo, sempre sul piano  $\alpha$ , le tre seguenti cubiche:

(1) Notiamo di passaggio come semplici ragionamenti sintetici provano che ogni quadrica, avente con la cubica  $\gamma$  sei intersezioni riunite in  $M$  ed avente una generatrice comune con  $U_3$ , passa per la cubica  $\gamma$  e che le quadriche, aventi con la cubica sei intersezioni riunite in  $M$  e passanti per la direttrice di  $U_3$ , formano un sistema lineare  $\infty^2$ .

1<sup>a</sup>) La cubica  $\gamma'$ .

2<sup>a</sup>) La cubica costituita dalla conica  $k$  e della retta  $r$ .

3<sup>a</sup>) La cubica costituita dalla retta  $t'$  contata tre volte.

Si vede subito che la 1<sup>a</sup> e la 2<sup>a</sup> cubica si tagliano in 5 punti (almeno) coincidenti con  $M'$  e 3 punti coincidenti con  $S$ ; mentre la 1<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup> cubica, come pure la 2<sup>a</sup> e la 3<sup>a</sup>, si tagliano in 6 punti coincidenti con  $M'$  e 3 punti coincidenti con  $S$ . Per il teorema fondamentale sui fasci di cubiche deduciamo allora che l'ulteriore punto comune alla 1<sup>a</sup> e alla 2<sup>a</sup> cubica coincide con  $M'$ , sicchè la conica  $k$  viene ad avere le 6 intersezioni con  $\gamma'$  tutte riunite in  $M$ . Proiettandola da  $O$  si forma il cono quadrico, di vertice  $O$ , avente con  $\gamma$  contatto 6-punto in  $M$ .

4. Fissato sulla cubica  $\gamma$  un altro punto  $N$  (diverso da  $M$ ) e facendo coincidere i sei punti  $P_i$  nel punto  $N$ , rimane individuata (oltre alla  $U_3$ ) un'altra rigata di Cayley  $V_3$ . Le due superficie  $U_3$  e  $V_3$  danno, nel modo più generale due rigate di Cayley aventi un'asintotica comune (la cubica  $\gamma$ ). I loro punti unipolarari sono rispettivamente  $M$  ed  $N$ .

Le due superficie  $U_3$  e  $V_3$ , che non possono avere, oltre a  $\gamma$ , alcun'altra asintotica comune<sup>(1)</sup>, si tagliano ulteriormente secondo una nuova cubica  $\gamma'$ , la quale passa pei punti unipolarari di  $U_3$  e  $V_3$  ed ammette ivi lo stesso piano osculatore che  $\gamma$ .

5. Siano  $t_m$  e  $t_n$  le tangenti alla curva  $\gamma$  nei punti  $M$  ed  $N$ . Un piano per  $t_m$  taglia le curve  $\gamma$  e  $\gamma'$  rispettivamente in due determinati punti  $H$  ed  $H'$  e la retta  $HH'$  incontra  $t_n$ . Perciò la superficie  $U_3$  è generata da una retta che appoggia simultaneamente alle curve  $\gamma$  e  $\gamma'$  ed alla retta  $t_m$ . Similmente la superficie  $V_3$  è generata da una retta che appoggia alle stesse due cubiche ed alla retta  $t_n$ .

6. Finora ci siamo occupati del caso in cui tutti i punti  $P_i$  coincidono in un solo<sup>(2)</sup>; ora vogliamo trattare il caso in cui quattro dei punti  $P_i$  coincidono in  $M$  e due in  $N$ . In tal caso il piano per la tangente alla cubica in  $M$  e per il punto  $N$  (contato due volte) è uno dei coni in questione e un punto qualunque di questo piano appartiene ad  $F_4$ , che perciò si spezza nel detto piano e in una rimanente parte che indichiamo con  $U'_3$ .

La superficie  $U'_3$  ha nel punto  $N$  un punto doppio ordinario e nel punto  $M$  un punto biplanare; lo spigolo appartiene alla superficie e il piano tangente lungo lo spigolo coincide con uno dei biplani.

(1) Perchè se ne avessero un'altra  $\gamma_1$ , entrambe le cubiche  $\gamma$  e  $\gamma_1$  conterebbero due volte nell'intersezione completa delle due superficie.

(2) È manifesto il significato di questa frase e di altre analoghe adoperate nel testo che si riferiscono alla presenza di elementi *infinitamente vicini*.

È da notare che lo spigolo dei biplani è la tangente in M alla cubica e si presenta semplicemente *torsale*; il piano tangente alla superficie lungo lo spigolo è il piano osculatore in M alla cubica.

Frattanto la superficie presenta la singolarità  $B_3 + C_2$  che ne riduce la classe di 7 unità.

Se  $V'_3$  indica la superficie che si ottiene facendo coincidere due dei punti  $P_i$  in M e quattro in N, si hanno proprietà analoghe; le due superficie  $U'_3$  e  $V'_3$  ammettono la curva  $\gamma$  come intersezione doppia; la ulteriore intersezione si riduce ai due spigoli e alla congiungente i punti biplanari.

7. Dopo ciò passiamo a caratterizzare il modulo a cui appartiene una superficie  $F_4$ , nel caso generale.

Assumendo una cubica gobba  $\gamma$ , siano M ed N due suoi punti. Al piano  $U = 0$ , osculatore in M, facciamo corrispondere la rigata  $U_3 = 0$ , luogo dei vertici dei coni che hanno con  $\gamma$  contatto 6-punto in M; al piano  $V = 0$  facciamo corrispondere la rigata analoga  $V_3 = 0$ ; al piano  $U' = 0$  passante per la tangente in M e per il punto N facciamo corrispondere la superficie  $U'_3 = 0$  luogo dei vertici dei coni quadrici che hanno colla cubica quattro intersezioni riunite in M e due in N. Al piano  $V' = 0$ , passante per la tangente in N e per il punto M, facciamo corrispondere la superficie analoga  $V'_3 = 0$ .

In generale ad un piano generico

$$(1) \quad U_1 = \lambda_1 U + \lambda_2 U' + \lambda_3 V' + \lambda_4 V$$

facciamo corrispondere la superficie  $\Phi_3 = 0$  del terzo ordine, luogo dei vertici dei coni quadrici che toccano la cubica  $\gamma$  nei punti d'intersezione di essa col piano.

I piani  $U_1 = 0$  e le superficie  $\Phi_3 = 0$  si corrispondono proiettivamente e disponendo in  $U_3, U'_3, V'_3, V_3$  di costanti moltiplicative, si potrà ritenere

$$(2) \quad \Phi_3 = \lambda_1 U_3 + \lambda_2 U'_3 + \lambda_3 V'_3 + \lambda_4 V_3.$$

Se in (1) e (2) poniamo due sistemi di valori  $(\lambda_i)$  e  $(\lambda'_i)$ , in guisa da ottenere due coppie distinte

$$U_1, \Phi_3 \quad ; \quad U'_1, \Phi'_3;$$

ponendo

$$F_4 = U_1 \Phi'_3 + U'_1 \Phi_3$$

otteniamo, nel modo più generale, una superficie del quarto ordine  $F_4 = 0$ , del tipo richiesto.



8. È notevole il caso in cui i punti  $P_i$  sono distribuibili in due terne che definiscono sulla cubica  $\gamma$  da essi individuata una serie lineare  $g_3^1$  con due coincidenze triple. Si ha allora:

$$\begin{aligned} U_1 &= \lambda U + \mu V & , & & \Phi_3 &= \lambda U_3 + \mu V_3 \\ U'_1 &= \lambda' U + \mu' V & , & & \Phi'_3 &= \lambda' U_3 + \mu' V_3 \\ & & & & (\lambda\mu' - \lambda'\mu &= 0) \end{aligned}$$

epperò

$$F_4 = [2\lambda\lambda' U + (\lambda\mu' + \lambda'\mu) V] U_3 + [2\mu\mu' V + (\lambda\mu' + \lambda'\mu) U] V_3$$

e la  $F_4$  appartiene al modulo definito da due rigate di Cayley, aventi una asintotica comune.

9. Se poi tre punti  $P_i$  si fanno coincidere in  $M$  e gli altri tre in un altro punto  $N$  della cubica  $\gamma$ , allora la superficie  $F_4$  ammette una retta tripla (la  $MN$ ) e in essa si hanno due punti ( $M$  ed  $N$ ) in cui i tre piani tangenti coincidono. La superficie è perciò una rigata, di più ammette una retta fissa che non incontra la retta tripla.

**Matematica** (Calcolo delle probabilità). — *Sur le cas continu des probabilités en chaîne*. Nota di W. DOEBLIN, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Dans une Note aux « Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris » <sup>(2)</sup> et dans un Mémoire <sup>(3)</sup> qui paraîtra bientôt dans les « Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk » (à Brno), nous avons donné un certain nombre de résultats concernant les chaînes de Markoff à un nombre fini d'états. Nous allons résumer dans ce qui suit nos résultats concernant les chaînes de Markoff dans le cas où l'ensemble des états possibles a la puissance du continu.

§ 1. Soit  $W$  un ensemble appartenant à un espace euclidien à un nombre fini de dimensions, mesurable Lebesgue, de mesure positive (on peut remplacer dans tout ce qui suit mesurable (L) par mesurable (B)). Considérons un point mobile se déplaçant arbitrairement dans  $W$ . On observe sa position dans une suite dénombrée d'épreuves  $1, \dots, n, \dots$ , et l'on suppose qu'il y a une probabilité  $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$ , pour que le point mobile passe dans une

(1) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(2) W. DOEBLIN, *Sur les chaînes discrètes de Markoff*, to. 203, pp. 24-26 et 592.

(3) W. DOEBLIN, *Sur le cas discontinu des probabilités en chaîne*.

épreuve du point  $E$  dans l'ensemble  $\mathcal{E}$ , ne dépendant que de  $E, \mathcal{E}$ , bien définie pour tout point  $E$  et pour tout ensemble  $\mathcal{E}$  mesurable ( $L$ ). Il s'agit d'étudier le mouvement du point mobile.

Désignons par  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$  la probabilité de passer de  $E$  dans  $\mathcal{E}$  en  $n$  épreuves

$$P^{(n+m)}(E, \mathcal{E}) = \int_W P^{(m)}(F, \mathcal{E}) P^{(n)}(E, dA_F)$$

$$P^{(n)}(E, W) = 1.$$

La probabilité  $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$  est évidemment complètement additive en  $\mathcal{E}$  et non négative, nous la supposons mesurable en  $E$  pour tout  $\mathcal{E}$  mesurable. Nous supposons de plus que la dérivée  $p^{(n)}(E, F)$  de la fonction d'ensemble  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$  existe sauf pour des couples  $E, F$  de mesure nulle et soit mesurable en fonction du couple  $E$  et  $F$ . En dehors de ces conditions de mesurabilité guère restrictives, nous ferons, suivant la mesure de  $W$ , l'une ou l'autre des 2 hypothèses:

I. Si  $\text{mes } W < \infty$ , il existe un entier  $N$  et deux nombres  $\varepsilon$  et  $\eta$  positifs tels que quelque soit  $E$

$$P^{(N)}(E, \mathcal{E}) < 1 - \varepsilon \quad \text{si } \text{mes } (\mathcal{E}) < \eta.$$

II. Si  $\text{mes } W = \infty$ , il existe un entier  $N$  et deux nombres  $\varepsilon$  et  $\eta > 0$ , un point  $F$  et une sphère  $S$  autour de  $F$  de rayon  $R$  fini, tels que, quelque soit  $E$

$$P^{(N)}(E, \mathcal{E}) < 1 - \varepsilon \quad \text{si } \text{mes } (\mathcal{E}) < \eta.$$

Dans le cas où il existe partout une densité  $p^{(N)}(E, F)$ , la condition I s'écrit  $\int_{\mathcal{E}} p^{(N)}(E, F) dF < 1 - \varepsilon$ , si  $\text{mes } (\mathcal{E}) < \eta$ , elle sera satisfaite par

exemple si  $p^{(N)}(E, F)$  est bornée  $< M$ . Les conditions I et II seront toujours satisfaites si  $p^{(N)}(E, F)$  est majorée par une fonction  $\psi(F)$  sommable sur  $W$ .

L'hypothèse I exprime qu'après un nombre suffisamment grand d'épreuves (ne dépendant pas de la position initiale  $E$ ) on ne peut pas avoir une probabilité aussi voisine de 1 qu'on veut répartie dans un ensemble de mesure arbitrairement petite. L'hypothèse II exprime de même que après un nombre  $N$  d'épreuves indépendant de  $E$ , une probabilité arbitrairement voisine de 1 ne peut pas être répartie dans la somme d'un ensemble à distance finie mais de mesure arbitrairement petite et d'un ensemble quelconque extérieur à toute sphère entourant un point  $F$  de rayon aussi grand qu'on veut.

[Remarquons que si l'on veut p. e. que  $P^{(N)}(E, \mathcal{E})$  tend uniformément par rapport à  $E$  vers une limite  $P(\mathcal{E})$  complètement additive à dérivée non

presque partout nulle on est obligé nécessairement de faire les hypothèses I ou II].

Alors on peut prouver ceci: il existe un nombre fini ( $\varepsilon \geq 1$ ) d'ensembles disjoints  $G, \dots, G_r$  (de mesure  $> \eta$ ) dits ensembles finaux jouissant des propriétés suivantes:

a) la probabilité pour que le point mobile (parti de  $E$  à l'instant  $O$ ) se trouve à la  $n^{\text{e}}$  épreuve à l'extérieur de  $\Sigma G_\alpha$  tend (exponentiellement et uniformément par rapport à  $E$ ) vers  $O$  si  $n$  augmente indéfiniment. b) le point mobile ne peut pas quitter l'ensemble final dans lequel il est amené. c) il passera avec probabilité 1 une infinité de fois par chaque sous-ensemble de mesure positive de cet ensemble final. d) Chaque ensemble final  $G_\alpha$  se décompose en un nombre fini de sous-ensembles disjoints de mesure  $> \eta$  dits sous-ensembles cycliques  $1(\alpha) \dots d(\alpha)$ , tels que le point mobile se trouvant dans  $G_\alpha$  passe avec probabilité 1 en chaque épreuve circulairement d'un ensemble cyclique au suivant. e) A l'intérieur d'un ensemble final le principe presque-ergodique<sup>(1)</sup> est applicable (le principe ergodique s'il n'y a qu'un seul sous-ensemble cyclique) f) Les  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$  sont de la forme  $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E}) + \varepsilon^{(n)}(E, \mathcal{E})$ , où  $Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})$  est une fonction périodique de  $n$ ,  $|\varepsilon^{(n)}(E, \mathcal{E})| < K e^{-\lambda n}$ ,  $K$  et  $\lambda$  indépendants de  $\mathcal{E}$  et  $E$ .

Précisons un peu plus l'allure des  $P^{(n)}(E, \mathcal{E})$ ; si  $n \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} P^{(n)}(E, \mathcal{E}) &\rightarrow 0 & \text{si } \mathcal{E} \subset W - \Sigma G_\alpha \\ P^{(n)}(E, \mathcal{E}) &= 0 & \text{si } E \in G_\alpha, \mathcal{E} G_\alpha = 0 \\ P^{(n)}(E, \mathcal{E}) &\rightarrow P_{l(\alpha)}(\mathcal{E}) & \text{» } E \in l'(\alpha), \mathcal{E} \subset l(\alpha) \text{ et } n \equiv (l - l') \bmod (d(\alpha)) \\ &= 0 & \text{» } \text{» } \text{» } n \not\equiv (l - l') \bmod [d(\alpha)]. \end{aligned}$$

$P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})$  étant complètement additive, positive pour chaque  $\mathcal{E} \subset l(\alpha)$  de mesure  $> 0$ , nulle si  $\mathcal{E} l(\alpha) = 0$ . On a  $P_{l(\alpha)}[l(\alpha)] = 1$ .

Soit  $Pr[E, j(\alpha)]$  la limite ( $m \rightarrow \infty$ ) de la probabilité de se trouver  $m$  d'( $\alpha$ ) épreuves après la réalisation de  $E$  dans  $j(\alpha)$ . Soit  $l_n(\alpha)$  le sous-ensemble cyclique de  $G_\alpha$  déterminé par  $n \equiv (l - l_n) \bmod d(\alpha)$

$$P^{(n)}(E, \mathcal{E}) = Pr[E, l_n(\alpha)] P_{l(\alpha)}(\mathcal{E}) \quad \text{si } \mathcal{E} \subset l(\alpha).$$

Désignons par  $\Pi^{(n)}(E, \mathcal{E})$  la quantité  $\frac{1}{n} [P^{(1)}(E, \mathcal{E}) + \dots + P^{(n)}(E, \mathcal{E})]$

$$\begin{aligned} \Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) &\rightarrow \Pi(E, \mathcal{E}) = 0 & \text{si } \mathcal{E} \subset W - \Sigma G_\alpha \\ \Pi^{(n)}(E, \mathcal{E}) &\rightarrow \Pi(E, \mathcal{E}) = Pr[E, G_\alpha] \frac{P_{l(\alpha)}(\mathcal{E})}{d(\alpha)} & \text{si } \mathcal{E} \subset l(\alpha). \end{aligned}$$

(1) Voir notre Mémoire de Brno.

La série  $S(E, \mathcal{E}) = \sum_{n=1}^{\infty} [P^{(n)}(E, \mathcal{E}) - Pr^{(n)}(E, \mathcal{E})]$  converge normalement. Toutes les quantités  $P_{I(\alpha)}(\mathcal{E})$ ,  $Pr[E, j(\alpha)]$ ,  $\Pi(E, \mathcal{E})$ ,  $S(E, \mathcal{E})$  peuvent être calculées par des systèmes d'équations intégrales que nous ne pouvons pas écrire ici.

Dans le cas « du battage des cartes » généralisé, c'est à dire quand  $\int_W P^{(1)}(E, \mathcal{E}) dE = \text{mes}(\mathcal{E})$ , l'ensemble  $W - \sum G_\alpha$  est de mesure nulle, les sous-ensembles cycliques d'un même ensemble final  $G_\alpha$  ont la même mesure, et si  $\mathcal{E} \subset I(\alpha)$ ,  $P_{I(\alpha)}(\mathcal{E}) = \frac{\text{mes}(\mathcal{E}) d(\alpha)}{\text{mes } G_\alpha}$ .

Nous disons que  $\lambda$  est une valeur fondamentale du noyau d'ensemble stochastique  $P^{(1)}(E, \mathcal{E})$  si l'une ou l'autre des équations

$$(1) \quad \begin{cases} \varphi(E) = \lambda \int_W \varphi(F) P^{(1)}(E, dA_F) \\ \psi(\mathcal{E}) = \lambda \int_W P^{(1)}(F, \mathcal{E}) \psi(dA_F) \end{cases}$$

a une solution bornée non presque partout nulle. Alors les valeurs fondamentales sont de module  $\geq 1$ . Les constantes fondamentales de module 1 sont toutes les racines de l'équation

$$\prod_{\alpha=1}^e (\lambda^{d(\alpha)} - 1) = 0.$$

[Elles sont donc racines d'une équation binôme  $\lambda^N - 1 = 0$ , ce qui est dans un cas particulier un résultat de M. Fréchet]. Les solutions  $\varphi(E)$  de (1) correspondant à une constante  $\lambda$  racine de  $\lambda^{d(\alpha)} = 1$  sont des combinaisons linéaires des fonctions

$$\lambda^{d(\alpha)} Pr[E, 1(\alpha)] + \lambda^{d(\alpha)-1} Pr[E, 2(\alpha)] + \dots + \lambda Pr[E, d(\alpha)].$$

Les résultats de M. Hadamard (précisés et étendus par M. Fréchet) résultent immédiatement de la forme donnée des fonctions  $\varphi(E)$ .

Nous avons donc montré que sous les hypothèses I et II, l'allure asymptotique des probabilités et du mouvement présente des analogies très complètes avec le cas fini. Ce seront d'ailleurs les hypothèses les plus larges où il en est ainsi, si l'on excepte le cas où le point mobile pourra, avec probabilité 1, rester indéfiniment dans un ensemble de mesure nulle (ou passer avec une période finie périodiquement dans un tel ensemble).

§ 2. Comme dans le cas discontinu le schéma traité ci dessus [et que nous appellerons (C c)] fait partie du schéma plus général qu'on obtient en supposant que les probabilités de passage du point E à la  $(n-1)^e$  épreuve dans l'ensemble  $\mathcal{E}$  à la  $n^e$  épreuve — soient  $P^{n-1,n}(E, \mathcal{E})$  — dépendent du temps c'est à dire de  $n$ . Si l'on suppose de nouveau [voir notre Mémoire de Brno], que les conditions des épreuves ne se modifient pas d'une façon essentielle dans le courant du temps, on est conduit à faire l'hypothèse que le rapport  $P^{n-1,n}(E, \mathcal{E})/P^{m-1,m}(E, \mathcal{E})$  est soit de la forme  $\circ/\circ$  soit borné  $< k$ , quelque soient E,  $\mathcal{E}$   $n$  et  $m$ . Si nous supposons de plus que l'une quelconque des  $P^{n-1,n}(E, \mathcal{E})$  satisfait suivant la mesure de W à une des conditions I et II (si p. e. il existe une densité  $p^{n-1,n}(E, F)$  majorée par une fonction  $\psi(F)$  sommable sur W), l'allure asymptotique des probabilités et du mouvement présente une analogie presque complète avec celle démontré dans le cas fini sous l'hypothèse (A). Désignons le schéma décrit ci-dessus par (A c).

En supposant l'existence de densités  $p^{n-1,n}(E, F)$  bornées et en supposant que  $\text{mes}(W) < \infty$  on peut de même envisager un cas (B c), généralisant le schéma (B), pour lequel le mouvement ressemble à celui décrit pour le cas B: on devra supposer que pour certains E et F

$$p^{n-1,n}(E, F)/p^{0,1}(E, F) \rightarrow 0,$$

pour les autres

$$\frac{1}{k} < p^{n-1,n}(E, F)/p^{0,1}(E, F) < k.$$

On ramène comme dans le cas fini l'étude des schémas périodiques on a régularité périodique à l'étude des schémas correspondant (A c), (B c) et (C c).

§ 3. Définions sur W une fonction mesurable bornée de point X(E). Soit  $X^{(n)}$  la variable aléatoire égale à X(E) si à la  $n^e$  épreuve le point mobile se trouve en E. Envisageons d'abord les chaînes constantes satisfaisant à I ou II. Supposons que l'état initial se trouve dans  $G_\alpha$ , alors  $\mathfrak{M}[X^{(1)} + \dots + X^{(n)}]/n$  tend vers  $M_\alpha$ ,  $\mathfrak{M}[\sum X^{(i)} - n M_\alpha]^2/n$  tend vers  $\sigma_\alpha^2$ ,  $M_\alpha$  et  $\sigma_\alpha$  ayant des formes analogues que dans le cas fini. Si  $\sigma_\alpha = 0$ ,  $\mathfrak{M}[\sum X^{(i)} - n M]^2$  reste bornée et  $[\sum X^{(i)} - n M]$  reste borné et dans le sens Bernouillien que dans le sens de la loi uniforme des grands nombres. L'établissement de l'analyse plus précise du cas  $\sigma_\alpha^2 = 0$  donnée par nous dans le cas fini dans notre note aux C. R. et dans notre résumé de Brno demande des hypothèses un peu plus précises sur les probabilités de passage. Les autres théorèmes sur les  $X^{(1)} + \dots + X^{(n)}$  donnés dans le cas fini restent valables sans changement.



De même dans le cas (Ac) les résultats énoncés dans le résumé de Brno relatifs aux  $X^{(1)} + \dots + X^{(n)}$  sous l'hypothèse (A) s'appliquent en dehors de l'analyse du cas exceptionnel où  $\sigma_{j,\alpha}^2$  n'est pas borné inférieurement.

§ 4. Revenons aux chaînes constantes, mais abandonnons les hypothèses I et II. La définition d'ensembles finaux  $G_\alpha$  desquels on ne peut sortir qu'en des cas de probabilité nulle et tels qu'on puisse passer avec probabilité non nulle de chaque point  $E \in G_\alpha$  dans chaque sous-ensemble de mesure positive de  $G_\alpha$  sera en général possible, mais il peut y en avoir une infinité dénombrable et même non dénombrable [p. e. si  $P^{(1)}(E, E) = 1$  quelque soit  $E$ ] et la probabilité de passer dans la somme de ces ensembles finaux ne sera pas toujours 1.

Dans les hypothèses suivantes il n'existe qu'un nombre fini d'ensembles finaux de mesure positive et satisfaisant aux trois premières propriétés dénotées plus haut  $a^{(1)}, b, c$ .

I' Si  $\text{mes } W < \infty$ , il existe un entier  $N(E)$ , deux nombres  $\varepsilon$  et  $\eta$  positifs tels que

$$P^{N(E)}(E, \mathcal{G}) < 1 - \varepsilon \quad \text{si } \text{mes } (\mathcal{G}) < \eta.$$

II' Si  $\text{mes } W = \infty$ , il existe un entier  $N(E)$ , deux nombres  $\varepsilon$  et  $\eta$  positifs un point  $F$  et une sphère  $S$  autour de  $F$  de rayon  $R$  fini tels que

$$P^{N(E)}(E, \mathcal{G}) < 1 - \varepsilon \quad \text{si } \text{mes } (\mathcal{G}) < \eta.$$

Si l'on considère les hypothèses beaucoup plus restrictives que I' et II' mais contenant I et II.

I'' Si  $\text{mes } W < \infty$ , il existe un entier  $N(E)$ , deux nombres  $\varepsilon$  et  $\eta$  positifs tels que

$$P^n(E, \mathcal{G}) < 1 - \varepsilon \quad \text{si } \text{mes } (\mathcal{G}) < \eta \quad \text{et si } n > N(E),$$

et l'hypothèse respective II'', on pourra encore démontrer les propriétés  $a^{(1)}, b, c, d, e$ ; mais pour démontrer que  $P^{(n)}(E, \mathcal{G})$  est de la forme  $Pr^{(n)}(E, \mathcal{G}) + \varepsilon^{(n)}(E, \mathcal{G})$ ,  $Pr^{(n)}(E, \mathcal{G})$  étant périodique en  $n$  et  $\varepsilon^{(n)}(E, \mathcal{G})$  tendant vers zéro (non uniformément par rapport à  $E$ ), nous avons été obligés de faire l'hypothèse supplémentaire III. Pour tout  $E$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(E, \mathcal{G}_m) = 0,$$

pour toute suite d'ensembles  $\mathcal{G}_m$  tendant vers zéro. Nous avons beaucoup de raisons de penser que l'hypothèse III est une conséquence des hypo-

(1) Mais  $P^n(F, W - \Sigma G_\alpha)$  ne tend pas exponentiellement et uniformément par rapport à  $E$  vers 0.

thèses I'' et II'', mais nous avons pas encore pu le démontrer rigoureusement. D'ailleurs si l'on veut que la fonction d'ensemble  $P r^{(n)}(E, \mathcal{E})$  soit complètement additive et à dérivée non presque partout nulle, il faut faire les hypothèses I'' (respectivement II'') et l'hypothèse III. La fonction  $P r^{(n)}(E, \mathcal{E})$  est alors nécessairement de la même forme que dans les hypothèses I et II.

Envisageons le cas particulier suivant: mes  $W = \infty$ , et il existe une densité  $p(E, F)$  uniformément continue par rapport à  $E$  et  $F$ . Si les hypothèses II ou II'' et III sont applicables, les  $p^{(n)}(E, F)$  seront de la forme  $\bar{p}^n(E, F) + \varepsilon^{(n)}(E, F)$ ;  $\bar{p}^{(n)}(E, F)$  étant périodique en  $n$  et  $\varepsilon^{(n)}(E, F)$  tendant vers zéro. Même dans les cas où ces hypothèses ne sont pas réalisées, l'on peut mettre en évidence dans  $W$  les ensembles finaux et sous-ensembles cycliques.  $p^{(n)}(E, F)$  tendra vers zéro avec  $n^{-1}$  pour tout  $F$  n'appartenant pas aux ensembles finaux et les propriétés *b*) et *d*) sont vérifiées. Il se peut qu'à l'intérieur de l'ensemble final  $G_\alpha$  les hypothèses II ou II' et III sont réalisées sans être réalisées partout dans  $W$ , dans ce cas nous connaissons la forme des  $p^{(n)}(E, F)$  pour  $E$  et  $F \in G_\alpha$ , on en déduit sans difficulté la forme des  $p^{(n)}(E, F)$  si  $E$  ou  $F$  appartiennent à  $G_\alpha$ . Dans le cas où les dites hypothèses ne sont pas vérifiées dans  $G_\alpha$ , nous considérons comme très vraisemblable que les  $p^{(n)}(E, F)$  tendent vers zéro quelque soient les points  $E$  et  $F$  de  $G_\alpha$ .

Nous n'avons pu l'établir que dans le cas où la propriété *c*) (stabilité à la Poisson) n'est pas vérifiée dans  $G_\alpha$ . De toute façon, à l'intérieur de  $G_\alpha$ , si  $p^{(n)}(E, F)$  tend vers zéro pour un couple  $E, F$  déterminé,  $p^{(n)}(E', F) \rightarrow 0$  pour tout  $E' \in G_\alpha$ , et si  $p^{(n)}(E, F) \rightarrow 0$  pour tout  $F$  d'un ensemble de mesure  $\neq 0$ ,  $p^{(n)}(E, F) \rightarrow 0$  quelque soient  $E$  et  $F \in G_\alpha$ . Remarquons encore que si  $p(E, F)\xi$  est majorée par une fonction  $\psi(|E - F|)$  tendant vers zéro si la distance  $|E - F|$  augmente indéfiniment, l'hypothèse II ne peut pas être vérifiée et l'hypothèse II'' entraîne III.

**Meccanica.** — *Osservazioni sul moto newtoniano di due masse qualsiasi.* Nota di G. ARRIGHI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. ABETTI.

§ 1. — Il problema del moto newtoniano di due masse entrambe non riducibili a punti-massa (dimensioni estremamente piccole rispetto alla loro mutua distanza) oppure del moto relativo dei baricentri quando la distribuzione delle masse non sia tale da poterle considerare concentrate nei relativi baricentri, è un problema ben noto della meccanica celeste dove, coi classici metodi, si tiene conto di queste *disuguaglianze* sino ad un certo ordine, considerando sviluppi della funzione potenziale arrestati ad un conveniente ordine ed all'uopo rimando all'opera fondamentale di P. S. Laplace che nel suo *Traité de Mécanique céleste* tratta, in più luoghi, il problema considerato. In questa Nota, invece, mi propongo di porre in evidenza, con lo studio del suo moto relativo, un particolare punto associato ad ogni corpo non puntiforme: e ciò resulterà dalle equazioni del moto nella forma da me desunta. Incominciando dal problema dei due corpi, dei quali uno puntiforme, sia  $\tau$  lo spazio racchiudente il corpo rigido S e P il punto cui può ridursi l'altro corpo il vettore della forza che un elemento di S esercita sopra P è dato da

$$km \frac{\mu}{r^3} (Q - P) d\tau,$$

dove  $k$  è la costante di gravitazione universale,  $m$  la massa di P,  $\mu$  è la densità nel punto Q centro dell'elemento di volume  $d\tau$  racchiudente il considerato elemento di S e  $r = |Q - P|$ , onde, in complesso, il corpo S agisce su P con una forza di vettore

$$km \int \frac{\mu}{r^3} (Q - P) d\tau,$$

dove l'integrale è esteso a tutto il volume  $\tau$  racchiudente S.

Quando si dica O il centro della formazione di prima specie secondo Peano <sup>(2)</sup>

$$\int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} Q d\tau$$

(1) Nella seduta del 21 febbraio 1937.

(2) P. PEANO, *Calcolo geometrico* (F.lli Bocca, Torino, 1888), p. 36. All'uopo si noti che è diversa da zero la massa della formazione in parola.

quest'ultima espressione può scriversi

$$km \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau (O - P),$$

e il moto assoluto di P sarà allora espresso dalla equazione

$$(1) \quad P'' = k \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau (O - P),$$

mentre la prima equazione cardinale del moto di S sarà espressa mediante la

$$(2) \quad \mathfrak{M} \cdot G'' = km \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau (P - O),$$

dove

$$\mathfrak{M} = \int_{\tau} \mu d\tau$$

è la massa totale di S e G il suo baricentro.

La seconda equazione cardinale della dinamica, quando il momento  $\mathbf{k}$  delle quantità di moto e il momento risultante delle forze esterne siano riferiti al baricentro, ci dà per S

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = km \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} (Q - G) \wedge (P - Q) d\tau,$$

ovvero

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = km \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} (P - G) \wedge (P - Q) d\tau$$

e, in definitiva,

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = km \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot (P - G) \wedge (P - O)$$

ciò che, per il teorema di Varignon, discende pure dal secondo membro della (2).

La (1) mostra che l'accelerazione di P non è, in generale, diretta verso G e la (3) ci dice che la variazione del momento impulso si mantiene perpendicolare al piano dei punti O, G, P.

§ 2. — Supponiamo adesso che entrambi i corpi rigidi S ed S<sub>1</sub>, abbiano dimensioni non trascurabili con la loro distanza; detti  $\tau$  e  $\tau_1$  i vo-

lumi da essi occupati, il vettore della forza che il corpo  $S$  esercita sopra un elemento di  $S_i$  è dato da

$$k \mu_i d\tau_i \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} (Q - Q_i) d\tau,$$

dove  $\mu$  e  $\mu_i$  sono le densità nei punti  $Q$  e  $Q_i$  centri degli elementi  $d\tau$  e  $d\tau_i$  ed  $r = |Q - Q_i|$ , onde, il risultante delle forze agenti su  $S_i$  è dato da

$$k \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} (Q - Q_i) d\tau d\tau_i.$$

L'espressione così trovata può anche spezzarsi al modo seguente

$$k \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} Q d\tau d\tau_i - k \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} Q_i d\tau d\tau_i,$$

cosicchè, detti  $O$  ed  $O_i$  i centri delle formazioni di prima specie che ivi figurano, cioè posto

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} Q d\tau d\tau_i &= \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} d\tau d\tau_i \cdot O, \\ \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} Q_i d\tau d\tau_i &= \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} d\tau d\tau_i \cdot O_i, \end{aligned}$$

discende la prima equazione cardinale del moto di  $S_i$  sotto la forma

$$(4) \quad \mathfrak{M}_i \cdot G_i'' = k \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} d\tau d\tau_i \cdot (O - O_i),$$

dove

$$\mathfrak{M}_i = \int_{\tau_i} \mu_i d\tau_i$$

è la massa totale di  $S_i$  e  $G_i$  è il relativo baricentro.

Circa il momento risultante delle forze esterne agenti su  $S_i$ , riferito al baricentro, si ha l'espressione

$$k \int_{\tau} \int_{\tau_i} \frac{\mu \mu_i}{r^3} (Q_i - G_i) \wedge (Q - Q_i) d\tau d\tau_i$$

che, in virtù dell'identità

$$Q_i - G_i = (Q_i - O_i) + (O_i - G_i)$$



può pure scriversi

$$\begin{aligned}
 & k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (Q_1 - O_1) \wedge (Q - Q_1) d\tau d\tau_1 + \\
 & + k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (O_1 - G_1) \wedge (Q - Q_1) d\tau d\tau_1 = \\
 & = k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (Q_1 - O_1) \wedge (Q - Q_1) d\tau d\tau_1 + \\
 & + k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot (O_1 - G_1) \wedge (O - O_1)
 \end{aligned}$$

e la seconda equazione cardinale del moto di  $S_1$  può scriversi

$$\begin{aligned}
 (5) \quad \frac{d\mathbf{k}_1}{dt} &= k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (Q_1 - O_1) \wedge (Q - Q_1) d\tau d\tau_1 + \\
 &+ k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot (O_1 - G_1) \wedge (O - O_1).
 \end{aligned}$$

Circa l'azione di  $S_1$  sopra  $S$  è da considerarsi la risultante di vettore

$$k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 (O_1 - O)$$

ed il momento risultante, rispetto al suo baricentro  $G$ , espresso da

$$\begin{aligned}
 & k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (Q - O) \wedge (Q_1 - Q) d\tau d\tau_1 + \\
 & + k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot (O - G) \wedge (O_1 - O);
 \end{aligned}$$

onde le equazioni cardinali del moto di  $S$  si scriveranno

$$(6) \quad \mathfrak{M} \cdot G'' = k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 (O_1 - O),$$

$$\begin{aligned}
 (7) \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} &= k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} (Q - O) \wedge (Q_1 - Q) d\tau d\tau_1 + \\
 &+ k \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot (O - G) \wedge (O_1 - O),
 \end{aligned}$$

ove

$$\mathfrak{M} = \int_{\tau} \mu d\tau$$

è la massa totale di S.

Dalle (4), (5), (6), (7) ora trovate discendono, in particolare, le formule del precedente paragrafo.

§ 3. Nei paragrafi precedenti si è visto che ad ogni corpo non puntiforme è associato un particolare punto O, in esso variabile, ed ora ci proponiamo di studiarne il moto relativo rispetto al corpo cui è associato.

Riferendoci al primo problema, derivando rispetto a  $t$  la relazione

$$(8) \quad \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} Q d\tau = \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O$$

si ottiene

$$-3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^4} \frac{dr}{dt} Q d\tau + \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} Q' \cdot d\tau = -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^4} \frac{dr}{dt} d\tau \cdot O + \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O',$$

dove  $O'$  è la velocità assoluta di O composta con la velocità di trascinamento  $O'_t$  e la velocità relativa  $O'_r$  che a noi qui interessa di determinare.

Ma dalla relazione fondamentale della cinematica segue

$$Q' = O'_t + \Omega \wedge (Q - O),$$

dove  $\Omega$  è il vettore della rotazione del corpo esteso, pertanto, sostituendo nel 2° integrale della precedente, segue

$$\begin{aligned} & -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^4} \frac{dr}{dt} Q d\tau + \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'_t + \Omega \wedge \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} (Q - O) d\tau = - \\ & -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^4} \frac{dr}{dt} d\tau O + \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'; \end{aligned}$$

osservando che il 3° integrale, in virtù della (8), è nullo e per essere

$$O'_r = O' - O'_t$$

discende

$$(9) \quad \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'_r = -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^4} \frac{dr}{dt} (Q - O) d\tau.$$

Derivando, ora la identità

$$r^2 = (P - Q)^2$$

si ottiene

$$r \frac{dr}{dt} = P' \times (P - Q) - Q' \times (P - Q),$$

ovvero

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} [P' \times (P - Q) - Q' \times (P - Q)]$$

e sostituendo con questa al secondo membro della (9), segue la

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'_r = & -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} H(P - Q, Q - O) d\tau \cdot P' + \\ & + 3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} Q' \times (P - Q) \cdot (Q - O) d\tau, \end{aligned}$$

dove figurano separatamente i termini dipendenti dal moto di ogni singolo corpo; ma quando ancora, mediante la

$$Q' = G' + \Omega \wedge (Q - G),$$

si sostituisca al suo secondo membro nell'integrale, si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'_r = & -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} H(P - Q, Q - O) d\tau \cdot [P' - G'] + \\ & + 3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} \Omega \wedge (Q - G) \times (P - Q) \cdot (Q - O) d\tau \end{aligned}$$

ed osservando che

$$\begin{aligned} \Omega \wedge (Q - G) \times (P - Q) &= \Omega \wedge [(Q - P) + (P - G)] \times \\ &\times (P - Q) = \Omega \wedge (P - G) \times (P - Q) \end{aligned}$$

si ha ancora

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \frac{\mu}{r^3} d\tau \cdot O'_r &= -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} H(P - Q, Q - O) d\tau \cdot [P' - G'] + \\ &+ 3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} H(P - Q, Q - O) d\tau \cdot \Omega \wedge (P - G) = \\ &= -3 \int_{\tau} \frac{\mu}{r^5} H(P - Q, Q - O) d\tau \cdot [P' - G' - \Omega \wedge (P - G)], \end{aligned}$$

dove sono infine posti in evidenza anche i termini provenienti dalla traslazione baricentrale e dalla rotazione del corpo esteso.

Il termine

$$G' + \Omega \wedge (P - G)$$

rappresenta il moto di trascinamento di P pensato rigidamente connesso col corpo, onde il termine in parentesi quadre può interpretarsi come il moto relativo di P rispetto al corpo esteso.

Ed era da prevedersi che da questo moto di P avesse a dipendere il moto relativo di O; in effetti derivando in questo senso la (8) si può pervenire direttamente alla formula scritta di sopra.

§ 4. — Riferendoci al problema trattato nel § 2, si derivi, rispetto a  $t$ , la relazione

$$(10) \quad \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} Q d\tau d\tau_1 = \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot O;$$

si avrà

$$\begin{aligned} & -3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^4} \frac{dr}{dt} Q d\tau d\tau_1 + \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} Q' d\tau = \\ & = -3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^4} \frac{dr}{dt} d\tau d\tau_1 \cdot O + \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau \cdot O'; \end{aligned}$$

dove, ancora,  $O'$  è la velocità assoluta di O composta con la velocità di trascinamento con S:  $O'_i$  e la velocità relativa  $O'_r$ ; per essere

$$Q' = O'_i + \Omega \wedge (Q - O),$$

dove  $\Omega$  è il vettore della rotazione di S, e tenendo presente la (10), segue ancora

$$(11) \quad \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot O'_r = -3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^4} \frac{dr}{dt} (Q - O) d\tau d\tau_1.$$

Derivando, ora la identità

$$r^2 = (Q - Q_1)^2$$

si ottiene

$$r \frac{dr}{dt} = Q' \times (Q - Q_1) - Q'_1 \times (Q - Q_1),$$

ovvero

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{r} [Q' \times (Q - Q_1) - Q'_1 \times (Q - Q_1)]$$

e sostituendo con questa al secondo membro della (11), segue la

$$\int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot O'_r = -3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^5} Q' \times (Q - Q_1) (Q - O) d\tau d\tau_1 +$$

$$+ 3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^5} Q'_1 \times (Q - Q_1) (Q - O) d\tau d\tau_1$$

dove figurano separatamente i termini dipendenti dal moto di ogni singolo corpo; ma quando mediante le

$$Q' = G' + \Omega \wedge (Q - G) \quad , \quad Q'_1 = G'_1 + \Omega_1 \wedge (Q_1 - G_1) ,$$

dove  $\Omega_1$  è il vettore della rotazione di  $S_1$ , si sostituisca negli integrali del suo secondo membro, si ottiene

$$\int_{\tau} \int_{\tau} \frac{\mu \mu_1}{r^3} d\tau d\tau_1 \cdot O'_r = -3 \int_{\tau} \int_{\tau} H(Q - Q_1, Q - O) d\tau d\tau_1 \cdot [G' - G'_1]' -$$

$$- 3 \int_{\tau} \int_{\tau_1} \frac{\mu \mu_1}{r^5} [\Omega \wedge (Q - G) \times (Q - Q_1) - \Omega_1 \wedge$$

$$\wedge (Q_1 - G_1) \times (Q - Q_1)] (Q - O) d\tau d\tau_1 .$$

dove sono infine posti in evidenza anche i termini provenienti dalle traslazioni baricentrali e dalle rotazioni dei corpi.

Mediante una sostituzione d'indici è facile scrivere le formule corrispondenti per  $O_1$ .



**Fisica.** — *Sulla luminosità delle immagini, quali appaiono in un cannocchiale*<sup>(1)</sup>. Nota di L. MARTINELLI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. U. BORDONI.

La presente Nota<sup>(3)</sup> si collega a ricerche già pubblicate sullo stesso argomento dal prof. V. Ronchi, dall'ing. R. Brusaglioni e dalla dottoressa G. Bocchino<sup>(4)</sup>, e tende a completarle, escludendo sempre più, data l'importanza del comportamento dell'occhio dell'osservatore in quelle ricerche, che i risultati ottenuti abbiano un carattere « personale » troppo accentuato.

Mediante il Diafanometro Ronchi<sup>(4)</sup>, adoperando come mira un reticolo circolare di 50 tr/cm. di cui avevamo preso un settore per evitare i fenomeni di astigmatismo che avrebbero potuto falsare le letture, abbiamo ripetuto le misure di luminosità dell'immagine fornita da un cannocchiale al variare della pupilla di uscita e dell'ingrandimento, prendendo come base un diaframma di entrata di 45.30 m/m. di diametro.

Le misure sono state eseguite per gli ingrandimenti di 7.4 x; 8.2 x; 9.2 x; 10.8 x; 12.4 x; 16.7 x; 18.8 x; e con una approssimazione probabile del 2 %. Esse hanno pienamente confermato che al crescere del diaframma di apertura, cioè della pupilla di entrata dello strumento e in conseguenza della pupilla di uscita, la luminosità dell'immagine non risulta crescere come vorrebbe la legge classica di fotometria, ove siano verificate le ipotesi che ne formano la base (ipotesi fin qui ritenute sufficientemente approssimate), ma cresce assai meno.

Abbiamo creduto opportuno di rappresentare le luminosità misurate sperimentalmente, per ogni ingrandimento, in funzione della pupilla di uscita, perchè se la causa del fenomeno è da ricercare nei difetti normali dell'occhio, è importante che sia messo in evidenza quanta parte della pupilla è stata impegnata in ogni misura. Il campo delle ascisse risulta così delimitato dalle dimensioni della pupilla all'oscuro (circa 6 m/m. di diametro).

Le curve ottenute sono riportate in fig. 1 in un unico diagramma dove per ascisse figurano i quadrati dei diametri delle pupille di uscita; le ordinate (luminosità) sono in unità convenzionali.

Per forti ingrandimenti, le curve riguardano un campo di pupille di uscita più ristretto che per i piccoli ingrandimenti. Ora, se si osserva che

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Nazionale di Ottica a Firenze.

(2) Nella seduta del 7 febbraio 1937.

(3) Riviste « Ricerca Scientifica », « Ottica » ecc.

(4) R. BRUSAGLIONI, *Il Diafanometro INDO ed il suo impiego*. « Boll. della Ass. Ottica Ital. », VII, 5, ottobre 1933.

tutti i diagrammi mostrano che per pupille di uscita assai piccole la legge classica è verificata entro i limiti sperimentali ammessi, ne segue, forzatamente, che, tenendo fissa la massima pupilla di entrata, le curve per ingran-

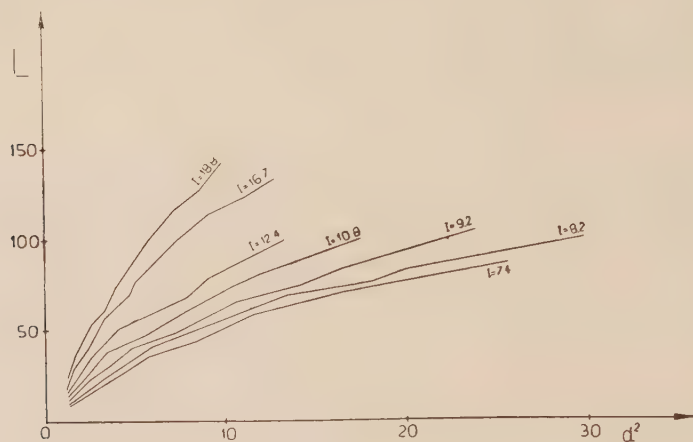


Fig. 1.

dimenti maggiori, meno estese, debbono sembrare più vicine all'andamento rettilineo che quelle per ingrandimenti minori.

Abbiamo allora voluto vedere che cosa accadeva per forti ingrandimenti quando si cercava di aumentare il campo delle pupille di uscita.



Fig. 2.

Per far questo, in difetto di un cannocchiale di grande apertura, siamo ricorsi al dispositivo della fig. 2. In esso, l'obiettivo del cannocchiale è stato sostituito con uno specchio sferico concavo  $S$  di 165 m/m. di diametro. La mira  $M$  è stata posta nel centro dello specchio per avere un'immagine priva di aberrazione sferica.

Il prisma  $P$  serve a rendere piccola, e quindi praticamente trascurabile, l'inclinazione dei fasci luminosi sullo specchio sì da evitare un astigmatismo apprezzabile.

In queste condizioni abbiamo eseguito le misure di luminosità per ingrandimenti di 27.4 x e 47 x, ponendo l'occhio nel piano PU della pupilla di uscita, dietro l'oculare O. Dalle curve ottenute (Fig. 3), risulterebbe che l'abbassamento di luminosità, rispetto al valore classico, è fors'anche maggiore per ingrandimenti maggiori che per i minori, a parità di pupilla di uscita.

Abbiamo poi cercato una formula che rappresentasse con sufficiente approssimazione le curve, per tutti gli ingrandimenti. Sviluppando in serie

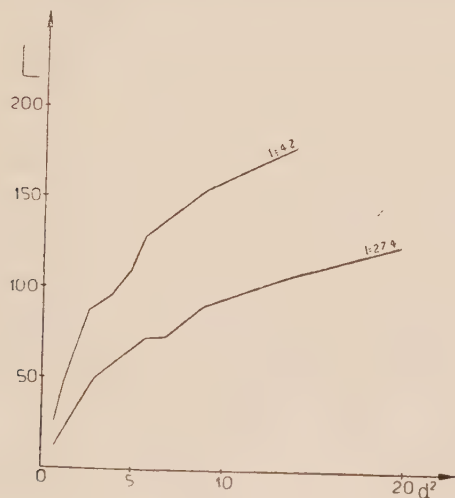


Fig. 3.

le curve, la formula è risultata assai vicina ad una progressione geometrica di infiniti termini a segni alterni, di modo che la legge cercata sarebbe data dalla loro somma e, cioè, da:

$$L = \frac{KI\sqrt{I}d^2}{10 + 0.1p\sqrt{I}d^2}$$

dove  $d$  è il diametro della pupilla di uscita in mm.,  $I$  l'ingrandimento,  $L$  la luminosità riferita a quella corrispondente del diaframma di entrata di 45.30 m/m.,  $p$  un coefficiente caratteristico bensì dello sperimentatore, ma che varia però solo leggermente da persona a persona (almeno in base ai dati sperimentali fin ora trovati),  $K$  un altro coefficiente, probabilmente costante per tutti gli osservatori. Nel nostro caso  $p$  è risultato assai vicino a 2 e  $K = 3.14$ .

La stessa formula, in funzione dell'area della pupilla di entrata  $A$ , diventa:

$$L = \frac{1.27 KAI}{10 I\sqrt{I} + 0.127 pA}$$

Detta formula tende ad un limite finito quando l'area  $A$  cresce, in accordo con l'intuizione.

Data la complessità del meccanismo dell'occhio e del numero limitato di cognizioni che abbiamo sul suo funzionamento fisiologico e sui suoi difetti, i risultati surriferiti pur dicendo molto, non permettono ancora di avanzare alcuna ipotesi sulle cause intrinseche del fenomeno o sul meccanismo della visione in genere. Altre esperienze sono attualmente in corso.

Però l'aumento delle conferme sperimentali della non validità della classica legge fotometrica quando la si voglia applicare al sistema strumento + occhio, e nel caso della visione di per oggetti *estesi*, porterà sempre più i calcoli fotometrici degli strumenti ottici verso un nuovo orientamento <sup>(1)</sup>.

**Fisica.** — *La radiazione gamma del Polonio-Berillio.* Nota di G. OCCHIALINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio L. TIERI.

1. Dal 1930, anno in cui Bothe e Becker <sup>(3)</sup> scoprirono l'esistenza di una radiazione assai dura emessa dal Berillio bombardato dalle particelle alfa del Polonio, molte ricerche sono state compiute per determinare il valore esatto dell'energia di questa radiazione. Come è noto, la prima misura era complicata dalla difficoltà di separare gli effetti dei raggi gamma da quelli dei neutroni che sono loro associati e perciò il valore trovato risultò troppo alto.

Le ricerche fatte successivamente diminuirono questo valore, ma, come appare dalla tabella I, l'accordo fra le varie misure non è completamente soddisfacente. Infatti, anche se non si tiene conto delle prime quattro righe, che contengono i risultati dei primi esperimenti di carattere semplicemente informativo, si vede che negli ultimi due anni il valore dell'energia di questa radiazione è andato diminuendo dai 5 ai 4 milioni di volt. Bothe <sup>(4)</sup> ha recentemente rimisurata con uno spettrografo magnetico direttamente l'energia dei raggi gamma e ha trovato che la radiazione è complessa e che consiste almeno di tre gruppi, le cui energie sono rispettivamente di 2,7 — 4,2 — — 6,7 m. e. v. Però questo risultato non spiega la ragione delle discordanze constatate tra i vari sperimentatori e può giustificare qualche dubbio sulla attendibilità sia del metodo delle coincidenze sia della camera del Wilson quando vengano applicati alla misura dell'energia di raggi gamma di piccola intensità e non omogenei.

(1) Ringrazio il prof. V. Ronchi per i consigli e gli aiuti avuti durante le esperienze.

(2) Nella seduta del 21 febbraio 1937.

(3) W. BOTHE u. H. BECKER, «Z. f. Phys.», 66, 289 (1930).

(4) W. BOTHE, «Z. f. Phys.», 100, 5-6, 273, (1936).

TABELLA I.

Sperimentatore	Resultati	Metodo
Bothe e Becker (1) . . .	20 m. e. v.	Assorbimento contatore 1930
Webster (2) . . . . .	7 m. e. v.	Assorbimento contatore cam. ion. 1932
Rasetti (3) . . . . .	$\approx$ 10 m. e. v.	Contatori in coincidenza 1932
Occhialini (4) . . . . .	$<$ 7 m. e. v.	» » » »
Becker e Bothe (5) . . .	5,1 m. e. v.	» » » »
Curie e Joliot (6) . . .	5 m. e. v.	Camera Wilson cam. magn. 1932-33
Auger (7) . . . . .	5 m. e. v.	Contatori in coincidenza 1934
Bernardini ed Emo (8) .	3,7 m. e. v.	» » » 1935

D'altra parte, poichè questa radiazione è divenuta la radiazione *standard* per la misura delle energie dei raggi gamma emessi nei fenomeni di eccitazione nucleare <sup>(9)</sup>, ho ritenuto utile di eseguire un'altra valutazione delle energie di questi raggi usando il metodo meno rappresentato nel gruppo di misure della tabella I. Per tale valutazione ho potuto disporre delle fotografie prese nel primo semestre del 1933 in collaborazione con i professori Blackett e Chadwick, ai quali desidero esprimere la mia gratitudine.

2. Per potere avere la massima fiducia di una misura eseguita con camera ad espansione accoppiata con campo magnetico, sarebbe necessario di scegliere solo quelle tracce elettroniche che hanno la loro origine nel gas o in una lamina tanto sottile da non frenare sensibilmente gli elettroni generati nel suo interno. Una misura effettuata in questo modo permette di individuare con sicurezza i gruppi energetici che costituiscono la radiazione esaminata.

Data la scarsa intensità della sorgente adoperata non è stato possibile eseguire le fotografie in queste condizioni; tuttavia, come vedremo, la camera

(1) W. BOTHE u. H. BECKER, «Z. f. Phys.», 66, 289 (1930).

(2) H. WEBSTER, «Proc. Roy. Soc.», 136 A, 428.

(3) F. RASETTI, «Naturwiss.», 20, 252 (1932).

(4) J. CHADWICK, «Proc. Roy. Soc.», 136, A 707 (1932).

(5) H. BECKER u. W. BOTHE, «Z. f. Phys.», 769, 421 (1932).

(6) CURIE et JOLIOT, «Journ. de Phys.», IV, 8, 496, (1933).

(7) P. AUGER, «Comptes Rendus», 199, 414 (1934).

(8) G. BERNARDINI e L. EMO, VI, II, 1-2, (1935).

(9) F. RASETTI, «Z. f. Phys.», 97, 74 (1935); FLEISCHMANN, «Z. f. Phys.», 103, 113 (1936).



del Wilson, anche quando non si prendano le precauzioni suaccennate, permette di ottenere delle indicazioni abbastanza esatte.

Nell'esperimento di cui vengono riportati i risultati la sorgente consisteva in una piastrina ricoperta elettroliticamente di Polonio e affacciata ad una pastiglia di Berillio. Il tutto, rinchiuso in un astuccio di piombo, era applicato contro il vetro esterno della camera e in modo che lo spessore minimo di piombo fosse di 8 mm. Nell'interno, affacciata alla sorgente, era attaccata una lastrina di piombo quadrata di 2,5 cm. di lato e dello spessore di 2 mm. La camera era quella costruita da Blackett e dall'Autore <sup>(1)</sup> per lo studio della radiazione penetrante. Il campo, prodotto da due bobine di Helmholtz disposte in modo che le linee di forza fossero parallele all'asse del pistone, era nella maggior parte delle fotografie di circa 900 gauss, in qualcheuna di circa 2000. Una parte delle fotografie fu eseguita con una lastra di rame interposta nel cammino dei raggi. Fra le tracce presenti sono state scelte solo quelle prodotte da elettroni che avevano attraversato il gas al momento dell'espansione, che erano visibili in tutte e due le fotografie e la cui lunghezza superava i 6 cm. Come metodo di misura è stato scelto quello di sovrapporre a ogni traccia una scala trasparente con cerchi di raggi diversi segnati sopra. Il metodo non è molto accurato, ma permette di evitare degli errori dovuti a difetto di circolarità della traccia causato da deflessioni nucleari.

Con questo metodo l'energia della particella veniva determinata con un errore probabile del 6 % fino a 3 m. e. v. e dell'8 % fino a 5 m. e. v. circa. Anche in questa misura non ho cercato di correggere la curvatura dalla conoscenza della posizione della traccia nella camera. Come si vede è stata seguita abbastanza da vicino la routine che ha condotto all'attribuzione di 2,62 m. e. v. per il raggio gamma del Th. C'' e alla determinazione della massa dell'elettrone positivo <sup>(2)</sup>; perciò è giustificato ritenere che il grado di precisione della misura attuale sia uguale a quello della precedente.

Per ridurre il più possibile gli errori di natura psicologica, il complesso delle tracce, circa 450, è stato misurato quattro volte con quattro scale di cui al momento della misura era ignota la calibrazione. Le quattro diverse serie hanno dato risultati non assolutamente uguali, ma tuttavia strettamente consistenti fra di loro, almeno da 500.000 volt in su. Come è risaputo, la scelta dell'intervallo di energia conveniente per raggruppare le tracce è piuttosto delicata, perchè qualche volta la grandezza come pure il punto di origine di questi intervalli influenzano le conclusioni. È stato scelto come intervallo di raggruppamento 1000 Hp dopo aver trovato che altri modi di divisione portavano al disopra di 3000 Hp a conclusioni comparabili.

(1) P. M. S. BLACKETT, G. P. S. OCCHIALINI, «Proc. Roy.», Soc. 139, 700 (1933).

(2) CHADWICK, BLACKETT, OCCHIALINI, «Proc. Roy. Soc.», 144, 230, 1934.

Nella tabella II viene riprodotto il risultato di una delle quattro serie definitive. Nella prima colonna è indicato il numero delle tracce trovate e nella seconda l'intervallo di energia in cui esse giacciono.

TABELLA II.

Numero delle tracce	Intervallo di rigidità magnetica in Gauss $\times$ cm.	Numero delle tracce	Intervallo di rigidità magnetica in Gauss $\times$ cm.
55	2500	14	12500
56	3500	6	13500
54	4500	3	14500
53	5500	4	15500
58	6500	4	16500
39	7500	2	17500
32	8500	1	18500
16	9500	2	19500
27	10500	2	20500
24	11500		

Altre cinque particelle di energia superiore ai 20000 Hp non sono state misurate.

I risultati raccolti nella tabella sono rappresentati nel grafico della pagina seguente in cui è stato portato in ordinate il numero delle particelle e in ascisse l'energia di queste misurata in m. e. v. L'ascissa O corrisponde a circa 300.000 volt.

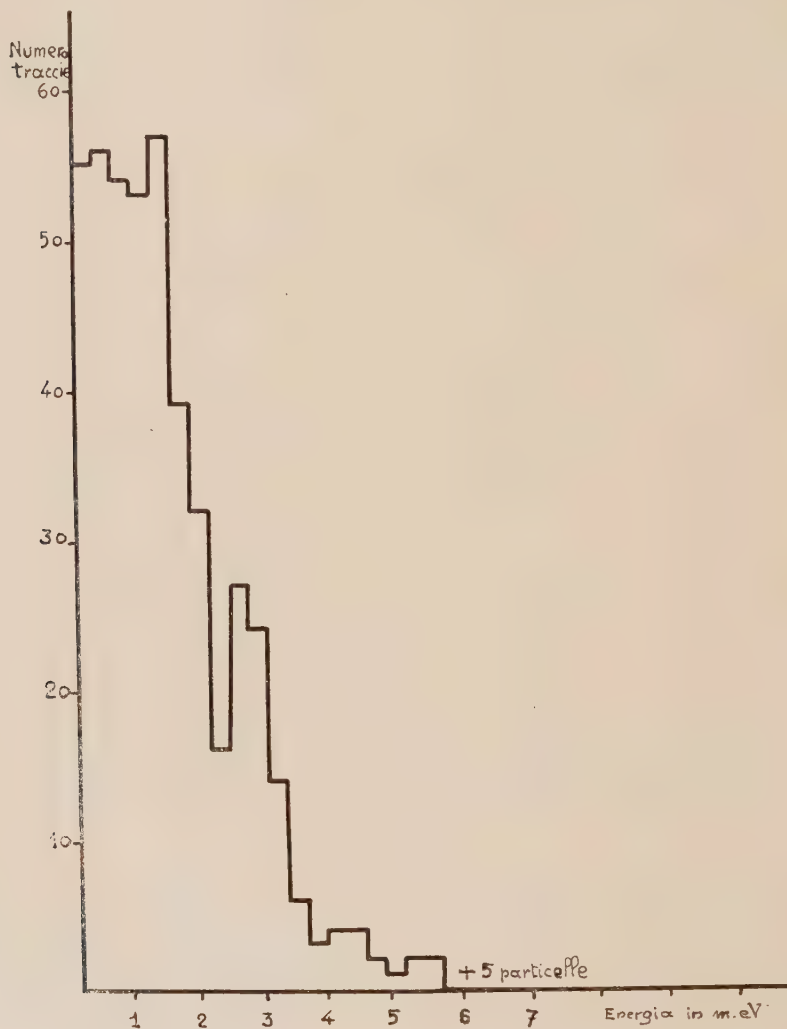
3. Dal seguente grafico si possono trarre alcune conclusioni. Una di queste è che la maggior parte delle tracce ha un'energia inferiore a 4 m. e. v. È legittimo in questo caso di attribuire a questo gruppo di elettroni un'energia definita dall'intersezione con l'asse delle ascisse della tangente alla curva. Questo procedimento conduce a un *punto di fine* per la radiazione situato a circa 4 m. e. v.; il che conduce ad attribuire alla radiazione gamma responsabile per questo gruppo di elettroni un'energia di circa 4,3 m. e. v.

Misure analoghe sono state eseguite per le altre tre serie ed esse hanno portato a valori di 4,3 — 4,2 — 4,1 m. e. v. Se si tiene conto del fatto che la misura eseguita in questo modo conduce ad una sopravvalutazione <sup>(1)</sup> e non ad

(1) CHADWICK, BLACKETT, OCCHIALINI, luogo citato, p. 240.

una diminuzione del valore dell'energia, si può concludere che la radiazione gamma in esame può essere di  $4 - 4,3$  m. e. v., ma assai difficilmente di energia maggiore.

La curva presenta una estensione dal lato delle energie superiori ai 4 milioni, e questa è certamente dovuta in parte ad errori di misura. Però



un confronto accurato con la coda simile che appare, in condizioni sperimentali analoghe, nello spettro del Th C''<sup>(1)</sup>, che certamente non possiede una percentuale apprezzabile di radiazione al disopra di 2,6 m. e. v., mi ha convinto che esiste veramente nella radiazione Po-Be una componente gamma

(1) CHADWICK, BLACKETT, OCCHIALINI, luogo citato, p. 239.

capace di produrre elettroni di energia superiore a 5 m. e. v. Questo è il limite delle energie che era possibile di valutare con una certa accuratezza, data la lunghezza del tratto di traccia misurato e l'intensità del campo impiegato.

Una evidenza secondaria dell'esistenza dei raggi gamma di questa energia è data dalla presenza di due elettroni positivi la cui energia è rispettivamente di circa 3,7 e 4 milioni di volt, il che porta per il raggio gamma primario ad una energia minima di 5 m. e. v.

Lo spettro mostra infine una complessità che si può oggi giustificare facilmente dopo le misure eseguite da W. Bothe<sup>(1)</sup>. Questa complessità viene accentuata quando si prendano in considerazione le tracce emesse dalla lastrina di rame sospesa nel mezzo della camera. Si nota per esempio anche qui un difetto di elettroni nella regione 2,4 — 2,8 m. e. v. Trattandosi solamente di 48 tracce, non ho giudicato opportuno di riportarle in un grafico.

Come si vede le misure ora descritte sono in ottimo accordo con quanto lo spettro magnetico di W. Bothe suggerisce, almeno per ciò che riguarda le due componenti principali e quella maggiore energia; per le altre componenti, sia con il metodo da me impiegato come pure con quello di W. Bothe, non si ha un potere risolutivo adeguato.

Una valutazione esatta dei rapporti di intensità tra la radiazione più dura e le componenti più molli non è molto agevole, però dalle nostre fotografie appare assai difficile che la prima sia più del 10 % di tutta la radiazione presente. Questo anche quando si tenga conto del fatto che il criterio di scelta è stato necessariamente più severo per le tracce di alta energia che per le altre.

Si può obiettare che per un raggio gamma di energia superiore a 5 m. e. v. una gran parte della interazione deve manifestarsi in coppie e che perciò il numero degli elettroni Compton non può rappresentare le intensità relative. Però se esistesse un maggior numero di raggi gamma superiori ai 5 m. e. v., la caduta nel numero di tracce nei pressi di 3 m. e. v. non sarebbe così rapida. D'altra parte, sopra circa 60 elettroni positivi presenti nelle nostre fotografie, solo 2 o al massimo 4 hanno l'energia richiesta da una radiazione di 5 m. e. v. Infine, una forte interazione in coppie sarebbe stata rivelata dalla produzione di coppie dell'energia richiesta, dalla lastra di rame sospesa nel mezzo della nostra camera.

Siccome le coppie osservate in queste condizioni sono assai poche, credo si possa concludere che l'intensità vera della nostra radiazione non può essere molto diversa da quella che noi abbiamo osservata.

Un confronto fra il grafico della figura n. 1 e la curva di Curie e Joliot<sup>(1)</sup>, mostra che i due risultati non sono affatto inconciliabili: la tangente

(1) W. BOTHE, «Z. f. Phys.», 100, 5-6, 273 (1936). Non ho potuto prendere visione della Nota originale di F. KOCH e F. RIEDER su i «Wien. Ber.», 144, 331, 1935.

(1) I. CURIE e JOLIOT, «Journ. de Phys.», 4, 494, 1933.

alla parte finale della curva mostra anche qui come la maggior parte degli elettroni ha un'energia inferiore a 4,2 m. e. v.

4. Sembra così giustificato di concludere che la radiazione è realmente costituita in grande prevalenza da raggi gamma di questa energia, e che perciò il valore medio di 5 m. e. v. dedotto dal metodo delle coincidenze è sensibilmente alto. Dal momento che esiste un buon accordo nei vari dati raccolti nella tabella I sia per la valutazione del *punto fine* che per la forma della curva di assorbimento, è lecito di cercare la ragione delle divergenze nel diverso modo di interpretare i dati sperimentali.

Becker e Bothe, come pure Auger, hanno usato come parametro l'*Halbwertsdicke* che rappresenta il valore della penetrazione media degli elettroni in esame. Nel caso di radiazioni non monocromatiche questo valore può essere soggetto a variazioni dovute alle condizioni sperimentali impiegate (p. es. distanza dei contatori)<sup>(1)</sup>. Tuttavia il metodo è giustificato dalla mancanza di dati sperimentali sulla penetrazione di elettroni nell'intervallo di energia in discussione (3 — 6 m. e. v.). Senza questa difficoltà sarebbe preferibile di determinare direttamente l'energia degli elettroni secondari dal punto di fine della curva, nonostante che un tale procedimento richieda una grande accuratezza che rende assai più lunga e faticosa la misura<sup>(2)</sup>.

Bernardini ed Emo<sup>(3)</sup> si sono attenuti a questa tecnica. Dalla massima penetrazione degli elettroni emessi (6 — 7 mm. di alluminio) essi hanno dedotto per il raggio gamma una energia di 3,7 m. e. v.

Se si tiene conto del fatto che questo valore è basato sopra un tentativo di estrapolazione in una regione in cui mancano completamente dati sperimentali, l'accordo con le ultime misure di Bothe come pure con queste è abbastanza soddisfacente.

Se poi si riconsiderano i dati sulle penetrazioni<sup>(4)</sup>, appare che una estrapolazione dei risultati di Bernardini ed Emo altrettanto legittima, attribuisce agli elettroni di 6 — 7 mm. di penetrazione una energia di 3,9 m. e. v., valore che si allinea assai bene con quelli recenti di Bothe e dell'Autore.

Da tutte queste considerazioni pare si possa concludere che è giustificato di attribuire un valore di 4 milioni di volt agli elettroni che hanno una penetrazione di circa 7 mm. di Alluminio, nelle misure ora assai frequenti di energie di raggi gamma dedotte dal metodo delle coincidenze.

Desidero di esprimere la mia gratitudine al Prof. Tieri per l'interesse che ha mostrato in questa ricerca.

(1) G. OCCHIALINI (in compilazione).

(2) S. KIKUCHI, K. HUSIMI u. H. AOKI, « Nature », 137, 186 (1936). Osaka, « Imp. Univ. », III, 1935.

(3) BERNARDINI ed EMO, loc. cit.

(4) G. BERNARDINI ed L. EMO, loc. cit.; S. KIKUCHI, K. HUSIMI, H. AOKI, loc. cit.



**Chimica.** — *Sulla non esistenza del bromuro bismutoso  $\text{BiBr}_2$ .*  
Nota<sup>(1)</sup> di A. BARONI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Le ricerche sulla possibilità di esistenza del bromuro bismutoso  $\text{BiBr}_2$  sono state iniziate da Weber<sup>(3)</sup> che, per fusione del bromuro  $\text{BiBr}_3$  con bismuto metallico, ottenne una massa bruna che non potè liberare completamente dal bismuto in eccesso per cui le analisi gli diedero sempre un tenore in bismuto superiore di 4-5 unità alla percentuale teorica per il composto  $\text{BiBr}_2$ . Successivamente Muir<sup>(4)</sup> trovò che nella preparazione del composto  $\text{BiBr}_3$  per debole riscaldamento del bismuto con bromo, si ha formazione, nella massa gialla cristallina di questo, di cristalli di color grigio scuro che però possono venire separati solo difficilmente dal  $\text{BiBr}_3$ , e che egli ritenne da attribuirsi al composto  $\text{BiBr}_2$ . Studiando il diagramma di stato del sistema  $\text{BiBr}_3\text{-Bi}$ , W. Herz ed A. Guttmann<sup>(5)</sup> osservarono infine che la curva presenta un massimo alla composizione corrispondente a  $\text{BiBr}_2$ . Questa è delle varie ricerche quella che può essere verosimilmente ritenuta la più attendibile.

Recentemente E. Montignie<sup>(6)</sup> affermò di aver ottenuto il composto  $\text{BiBr}_2$  allo stato puro e ne ha studiato le presunte proprietà. Esso sarebbe un composto di color grigiastro, insolubile in acqua, alcool, etere, solfuro di carbonio, poco solubile in benzolo bollente; per azione di acqua darebbe ossibromuro  $\text{BiOBr}$  ed acido bromidrico, per azione di zolfo a  $200^\circ$  darebbe il solfuro  $\text{Bi}_2\text{S}_3$ , con perossido di azoto darebbe dell'ossibromuro e con ammoniacca gassosa secca a  $150^\circ$  reagirebbe dando un composto della formula  $\text{BiBr}_2 \cdot 10 \text{NH}_3$ . Queste ultime caratteristiche, come risulta dalla letteratura, sono identiche a quelle del bromuro  $\text{BiBr}_3$ .

Mi è sembrato interessante, in relazione alla non esistenza dell'ioduro  $\text{BiI}_2$  stabilita precedentemente da Cagliotti<sup>(7)</sup> e per l'interesse che presentava per me, per un lavoro in corso sull'azione della potassa sugli alogenuri di bismuto, verificare col metodo röntgenografico, che è il migliore per la risoluzione di questi casi dubbi, se il composto di Montignie corrispondesse effettivamente ad un vero bromuro del bismuto bivalente.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Milano.

(2) Nella seduta del 21 febbraio 1937.

(3) «Pogg. Ann.» 107, 600 (1859).

(4) «J. Chem. Soc.» 29, 145 (1876).

(5) «Zeit. Anorg. Chem.», 56, 422 (1908).

(6) «Bull. Soc. Chim.», V, 3, 1083 (1936).

(7) «Gazz. Chim. Ital.», 60, 933 (1930).

Facendo agire i vapori di bromo sul bismuto a 15°, Montignie ha osservato che si ha formazione di un prodotto contenente circa 22 % di bromo ( $\text{Br}^\circ\%$  teorico per  $\text{BiBr}_2$  43, 46); in soluzione eterea il bromo esercita solo un piccolo attacco sul bismuto; allo stato puro reagisce col bismuto in polvere dando un prodotto contenente solo 7,52 % di bromo, mentre col bismuto precipitato si ha un prodotto contenente 43,12 % di bromo. È questo quindi, secondo Montignie, il metodo migliore per la preparazione del bromuro di bismuto bivalente. Io ho usato appunto questi due ultimi metodi secondo le modalità date da questo autore ed ho osservato che anche col bismuto metallico in polvere fina il bromo puro e secco reagisce con grande energia e con notevole sviluppo di calore e non ho anzi osservato nessuna differenza di comportamento rispetto al bismuto precipitato. Il bismuto in polvere da me usato è stato setacciato attraverso uno staccio con tela di seta a 2000 maglie per  $\text{cm}^2$ . Già termicamente quindi la reazione sembra avvenire in un solo senso e cioè in quello della formazione del tribromuro. Pure nessuna differenza ho osservato nella composizione centesimale dei prodotti ottenuti nei due casi: col bismuto in polvere ho avuto infatti un prodotto contenente 41,25 % di bromo e col bismuto precipitato un prodotto contenente 42,50 % di bromo. Per spiegarmi la differenza col risultato di Montignie ho fatto la reazione fra il bismuto in polvere e quello precipitato ed il bromo, con bromo umido ed ho effettivamente notato una netta differenza nel caso del bismuto in polvere: l'attacco è molto più lento e perciò calorimetricamente non confrontabile con quello del bismuto precipitato ed il prodotto ottenuto contiene solo 22 % di bromo.

L'esame röntgenografico dei prodotti ottenuti per azione del bromo puro e secco sul bismuto in polvere e sul bismuto precipitato, mi ha permesso di stabilire che essi non sono altro che miscele di bismuto e di tribromuro di bismuto  $\text{BiBr}_3$ : i fotogrammi ottenuti (che non riporto perchè difficilmente riproducibili data la loro complessità) sono infatti perfettamente identici a quello del tribromuro  $\text{BiBr}_3$ . La presenza del bismuto non è rivelabile röntgenograficamente perchè esso viene a costituire la parte centrale dei granelli e lo strato periferico di  $\text{BiBr}_3$ , röntgenograficamente troppo opaco, impedisce, con raggi relativamente molli quali sono quelli usati per i fotogrammi di Debye, la comparsa delle diffrazioni del bismuto.

I risultati da me ottenuti permettono quindi di affermare la non esistenza del composto preparato da Montignie e probabilmente analoghe conclusioni si possono trarre anche per i prodotti preparati dai precedenti autori.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 7 marzo 1937 - Anno XV*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Forme canoniche dei  $ds^2$  binari con data curvatura totale.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio T. LEVI-CIVITA.

#### I. — GENERALITÀ E RICHIAMI CONCERNENTI LA FORMA CANONICA GEODETICA.

La curvatura totale  $K$  di una superficie  $\sigma$  si immagini assegnata quale funzione  $K(P)$  del punto generico  $P$  della  $\sigma$ . Supponendo questa riferita a coordinate curvilinee  $u, v$ , sarà specificamente da riguardare conosciuta l'espressione  $K(u, v)$  che compete a  $K$ , in funzione delle coordinate  $u, v$  di  $P$ .

In generale il quadrato dell'elemento lineare della  $\sigma$  è della forma

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

con  $E, F, G$  funzioni delle  $u, v$ ; e  $K$  si esprime in modo noto (che non ho bisogno di richiamare) in funzione dei coefficienti  $E, F, G$  e delle loro derivate prime e seconde. Evidentemente la conoscenza di  $K(u, v)$  non basta da sola a caratterizzare l'espressione del  $ds^2$  che la ammette come curvatura totale, cioè non basta a individuare i suoi coefficienti  $E, F, G$ . Questi infatti sono tre, e debbono verificare un'unica equazione (a derivate parziali) del secondo ordine. Per rendere il problema determinato bisogna necessariamente aggiungere altre condizioni, anzi, si può dire subito, salvo a precisare, altre due condizioni.

(1) Presentata nella seduta del 7 marzo 1937.

Il criterio classico è di esigere che  $u, v$  siano coordinate geodetiche polari col polo in un ben determinato punto (regolare)  $O$  di  $\sigma^{(1)}$ . Allora si ha, in un conveniente intorno di  $O$ ,

$$(1) \quad ds^2 = du^2 + G dv^2,$$

dove  $\sqrt{G}$  è funzione uniforme nell'intorno, e precisamente funzione periodica dell'argomento  $v$  (di periodo  $2\pi$ ) e, rispetto ad  $u$ , della forma <sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \sqrt{G} = u(1 + u^2 \gamma),$$

essendo  $\gamma$  pure uniforme, continua ecc.

La espressione di  $K$  per la metrica (1) assume notoriamente l'aspetto assai semplice

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{d^2 \sqrt{G}}{du^2}.$$

D'altra parte, in base alla (2),  $\sqrt{G}$  si deve annullare per  $u = 0$ , la sua derivata rapporto ad  $u$  assumendo ivi il valore 1.

Ne consegue che  $\sqrt{G}$  rimane univocamente determinata dai suddetti valori iniziali quale soluzione della equazione differenziale omogenea del secondo ordine

$$(3) \quad \frac{d^2 \sqrt{G}}{du^2} + K \sqrt{G} = 0.$$

Si noti che questa equazione non presenta alcuna singolarità per  $u = 0$ . Dalla equazione stessa e dalla circostanza che  $\sqrt{G}$  si annulla per  $u = 0$  segue in particolare che anche  $\frac{d^2 \sqrt{G}}{du^2}$  è zero per  $u = 0$ , ossia che lo sviluppo di  $\sqrt{G}$  ha effettivamente la forma (2).

Il comportamento qualitativo della  $K$  — esistenza di derivate continue fino ad un generico ordine  $\nu$  — porta come conseguenza per la soluzione  $\sqrt{G}$  che essa ammette derivate continue, rapporto ad  $u$ , fino all'ordine  $\nu + 2$  e, rapporto a  $v$ , fino all'ordine  $\nu$  <sup>(3)</sup>.

(1) Cfr., p. es., BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*. Terza edizione, vol. I, 1922, pp. 288-291.

(2) Oltre a BIANCHI, loc. cit., veggasi l'elegante trattazione di W. BLASCHKE, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Berlin, Springer (terza ediz., 1930), p. 152.

(3) Si può riconoscerlo appoggiandosi sui teoremi generali di esistenza [cfr., per es., GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, to. II, Paris, Gauthier-Villars (quarta ediz., 1924), cap. XIX, sezione II, n. 384] quali si traggono dal metodo delle approssimazioni successive, e trattando in particolare, nella equazione (3), l'argomento  $v$  quale parametro.

## 2. - SCOPO DELLA PRESENTE NOTA

è di far vedere che si può passare dalla forma canonica geodetica ad altra *forma canonica isoterma*, attraverso l'integrazione (sotto opportune condizioni iniziali) di *una equazione differenziale ordinaria del primo ordine, esente da singolarità nel punto O*. Quest'ultima è la circostanza più notevole. La riduzione per sè stessa è in fondo prevedibile, ove si pensi che, facendo intervenire le linee di lunghezza nulla, la equazione a derivate parziali del secondo ordine, da cui dipende l'isometria, si scinde in due fattori operatori del primo.

## 3. - RIFERIMENTO A COORDINATE NORMALI DI RIEMANN.

Le coordinate geodetico-cartesiane o normali, introdotte da Riemann, sono

$$(4) \quad x = u \cos v, \quad y = u \sin v.$$

Supposto che  $K(x, y)$  (ossia la curvatura totale  $K$  espressa per  $x, y$ , anzichè per  $u, v$ ) sia, in un intorno di  $O (x = y = 0)$  funzione regolare anche di  $x, y$ , nel solito senso (cioè continua assieme alle derivate fino all'ordine  $\nu$ ), si può facilmente desumere (dalla equazione differenziale (3) e dalle condizioni iniziali imposte a  $\sqrt{G}$ ) che anche la  $\gamma$ , la quale figura nella espressione (2) di  $\sqrt{G}$ , è regolare, ossia finita e continua assieme a tutte le sue derivate parziali rapporto ad  $x, y$  fino all'ordine  $\nu$ .

## 4. - RICERCA DI PARAMETRI ISOMETRICI $\xi, \eta$ .

Si tratta ora di assegnare pel nostro  $ds^2$  una forma canonica *isometrica*

$$(5) \quad ds^2 = \lambda (d\xi^2 + d\eta^2),$$

dove  $\xi, \eta$  sono ben determinate funzioni indipendenti di  $x, y$ , regolari (cioè — ripetiamolo ancora una volta — continue assieme alle derivate fino all'ordine  $\nu$ ) in un intorno di  $O$ , e  $\lambda$  è funzione, pure regolare, di  $x, y$  e quindi anche, se si vuole, di  $\xi, \eta$ .

All'uopo ricordo<sup>(1)</sup> che  $\xi, \eta$ , considerate per un momento quali funzioni delle variabili geodetico-polari  $u, v$ , debbono verificare il sistema lineare (di coniugio secondo Beltrami)

$$(6) \quad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \eta}{\partial v}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

(1) BIANCHI, op. cit., p. 127.



Ove si introducano i binomi complessi coniugati

$$(7) \quad \zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta$$

in luogo delle due funzioni reali  $\xi, \eta$ , le (6), moltiplicate per  $\sqrt{G}$ , diventano

$$(6') \quad \sqrt{G} \frac{\partial \zeta}{\partial u} + i \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0, \quad \sqrt{G} \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial u} - i \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial v} = 0,$$

le quali, dato che  $\sqrt{G}$  contiene  $u$  a fattore, *non* hanno comportamento regolare per  $u = 0$ . Basta tuttavia — e qui sta il punto saliente delle attuali considerazioni — introdurre altresì, al posto delle variabili indipendenti  $u, v$ , le combinazioni complesse coniugate delle coordinate normali  $x, y$ , cioè

$$(8) \quad z = x + iy = ue^{iv}, \quad \bar{z} = x - iy = ue^{-iv},$$

perchè, attesa l'espressione (2) di  $\sqrt{G}$ , il sistema assuma automaticamente forma regolare.

Si ha infatti dalle (8)

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{1}{u} z, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial u} = -\frac{1}{u} \bar{z}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} = iz, & \frac{\partial \bar{z}}{\partial v} = -i\bar{z}; \end{cases}$$

quindi, per una generica funzione  $f(u, v)$ , riguardandola come dipendente da  $u, v$  pel tramite di  $z, \bar{z}$ ,

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{u} \left( z \frac{\partial f}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right), \\ \frac{\partial f}{\partial v} = i \left( z \frac{\partial f}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right). \end{cases}$$

Con ciò la prima delle (6'), sostituendo, a norma della (2),  $\sqrt{G}/u$  con  $1 + u^2 \gamma$ , assume l'aspetto

$$(1 + u^2 \gamma) \left( z \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) + \bar{z} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} - z \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

tuttora irregolare per  $z = \bar{z} = 0$ , ma *immediatamente regolarizzabile*.

Infatti, elidendosi i due termini  $z \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}}$  e  $-z \frac{\partial \zeta}{\partial z}$ , basta scrivere  $z\bar{z}$  in luogo di  $u^2$  per ricavare

$$2\bar{z} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + z\bar{z}\gamma \left( z \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{z}} + \bar{z} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) = 0,$$

dove figura il fattore comune  $\bar{\alpha}$ . Una volta soppresso  $\bar{\alpha}$ , rimane

$$(10) \quad (2 + \alpha \bar{\alpha} \gamma) \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\alpha}} + \alpha^2 \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = 0,$$

perfettamente risolubile rapporto a  $\frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\alpha}}$  senza che si introduca alcuna singolarità in un intorno di  $\bar{\alpha} = 0$ .

Trattandosi di equazione a derivate parziali del primo ordine, la ricerca di soluzioni si riconduce, anche a prescindere dall'analiticità, alla integrazione dell'unica equazione differenziale ordinaria

$$\frac{d\alpha}{d\bar{\alpha}} = - \frac{\alpha^2 \gamma}{2 + \alpha \bar{\alpha} \gamma},$$

regolare in prossimità di  $\bar{\alpha} = 0$  per qualsivoglia  $\alpha$  (di quel certo intorno di 0, cui ci siamo finora riferiti). Possiamo in conformità affermare che la (10) definisce univocamente quella sua soluzione  $\zeta(\alpha, \bar{\alpha})$  che si assoggetti a ridursi per  $\bar{\alpha} = 0$  ad una prefissata funzione regolare <sup>(1)</sup> di  $\alpha$ . *Converremo di adottare proprio  $\alpha$  come determinazione iniziale  $\zeta$ .* Si ha allora, per la funzione regolare  $\zeta$  così individuata

$$(11) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} = 1 \quad \text{per } \bar{\alpha} = 0.$$

La  $\bar{\zeta}$ , in quanto immaginaria coniugata, si ottiene da  $\zeta$  mediante il semplice scambio di  $i$  in  $-i$ . Quindi essa verifica in particolare le condizioni iniziali

$$(12) \quad \bar{\zeta} = \bar{\alpha} \quad , \quad \frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{\alpha}} = 1 \quad \text{per } \alpha = 0.$$

Con ciò abbiamo dato una regola univoca per la costruzione delle funzioni  $\zeta(\alpha, \bar{\alpha})$ ,  $\bar{\zeta}(\alpha, \bar{\alpha})$ , e con esse, scindendo il reale dall'immaginario, di due parametri isometrici  $\xi, \eta$ . Al pari di  $\zeta$  e  $\bar{\zeta}$ , essi si annullano entrambi in 0, ossia per  $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ .

## 5. — ESPRESSIONE CANONICA DI $\lambda$ .

Il coefficiente  $\lambda$  dell'espressione isometrica (5) si identifica notoriamente coll'inverso  $1/\Delta \xi$  del primo parametro differenziale della funzione  $\xi$  (il quale, attesa l'isometria, non differisce da  $\Delta \eta$ ).

(1) Nel solito senso, cioè continua assieme alle sue derivate fino all'ordine  $\nu$ .

Un parametro si può pensare calcolato con referenza a variabili qualsivogliono. Usando l'espressione originaria (1) del  $ds^2$ , si ha

$$\Delta\xi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{G} \left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2 = \left(\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{i}{\sqrt{G}} \frac{\partial\xi}{\partial v}\right) \left(\frac{\partial\xi}{\partial u} - \frac{i}{\sqrt{G}} \frac{\partial\xi}{\partial v}\right),$$

ossia, badando alle (6) e (7),

$$\Delta\xi = \left(\frac{\partial\xi}{\partial u} - i \frac{\partial\eta}{\partial u}\right) \left(\frac{\partial\xi}{\partial u} + i \frac{\partial\eta}{\partial u}\right) = \frac{\partial\zeta}{\partial u} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial u}.$$

Ne segue

$$(13) \quad \lambda = \frac{1}{\frac{\partial\zeta}{\partial u} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial u}}.$$

Rimane soltanto da accertare che  $\lambda$  è veramente una funzione regolare di  $\xi, \eta$  in prossimità di  $O$ , cioè di  $\xi = \eta = 0$ . A tale scopo, giova ricorrere prima alle (9) che danno

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial u} = \frac{1}{u^2} \left( \chi \frac{\partial\zeta}{\partial\chi} + \bar{\chi} \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{\chi}} \right) \cdot \left( \chi \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\chi} + \bar{\chi} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\chi}} \right),$$

e poi alla (10) e sua coniugata, con che si può raccogliere a fattore  $\chi$  dalla prima parentesi e  $\bar{\chi}$  dalla seconda. Siccome il prodotto  $\chi\bar{\chi}$  non è che  $u^2$ , rimane

$$\frac{\partial\zeta}{\partial u} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial u} = \left\{ 1 - \frac{\chi\bar{\chi}\gamma}{2 + \chi\bar{\chi}\gamma} \right\}^2 \frac{\partial\zeta}{\partial\chi} \frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\chi}},$$

da cui, riscrivendo  $u^2$  per  $\chi\bar{\chi}$ , e notando che  $\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}$  e  $\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial\bar{\chi}}$  sono quantità complesse coniugate,

$$(14) \quad \lambda = \frac{1}{\left( 1 - \frac{u^2\gamma}{2 + u^2\gamma} \right)^2 \left| \frac{\partial\zeta}{\partial\chi} \right|^2},$$

che mette in evidenza la regolarità di  $\lambda$  e la circostanza che esso (al pari di  $\frac{\partial\zeta}{\partial\chi}$ ) si riduce all'unità in  $O$ .

#### 6. - SUPERFICIE A CURVATURA COSTANTE - FORMA CANONICA DI RIEMANN.

Supponiamo  $K$  costante (positiva o negativa), assumendo in ogni caso  $\sqrt{K}$  sotto la forma

$$\sqrt{K} = \frac{1}{R},$$

con che, per  $K < 0$ ,  $R$  risulterà puramente immaginario, potendosi del resto ritenere  $R > 0$  per  $K > 0$ , e  $-iR > 0$  per  $K < 0$ .

Comunque la corrispondente, ben nota espressione di  $\sqrt{G}$ , fornita dalla (3) sotto le condizioni iniziali  $0, 1$ , è

$$(15) \quad \sqrt{G} = R \sin u/R.$$

Introduciamo per un momento, al posto di  $u$ , una variabile ausiliaria  $v$  definita da

$$dv = \frac{du}{\sqrt{G}},$$

ossia, a meno di una inessenziale costante additiva, da

$$(16) \quad v = \log \operatorname{tg} u/2R.$$

La prima delle equazioni (6'), facendovi apparire  $v$  in luogo di  $u$ , si scrive

$$(17) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial v} + i \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

e mostra che  $\zeta$  deve essere funzione del solo argomento complesso  $v + iv$ , o, ciò che è lo stesso, di

$$2R e^{v+iv} = 2R \operatorname{tg} (u/2R) \cdot e^{iv} = \frac{\operatorname{tg} (u/2R)}{u/2R} u e^{iv}.$$

Il rapporto  $\frac{\operatorname{tg} (u/2R)}{u/2R}$  è una funzione pari di  $u/2R$ , e quindi di  $u$ , che assume il valore  $1$  per  $u = 0$ . Immaginando di sostituire ad  $u^2$  il prodotto  $z\bar{z}$ , se ne inferisce che il detto rapporto ha una espressione della forma

$$1 + z\bar{z} \mathfrak{P}(z\bar{z}),$$

con  $\mathfrak{P}$  funzione olomorfa del prodotto  $z\bar{z}$ . Perciò, badando alla prima delle (8), possiamo attribuire all'argomento (dal quale unicamente dipende  $\zeta$ ) l'aspetto

$$\{ 1 + z\bar{z} \mathfrak{P}(z\bar{z}) \} z.$$

Esso è senz'altro quel tale integrale regolare della equazione (10) [trasformata della prima delle (8'), cioè nel caso presente della (17)], il quale si riduce a  $z$  per  $\bar{z} = 0$ .

Si ha perciò, riprendendo le variabili  $u$  e  $v$ ,

$$(18) \quad \zeta = 2R \operatorname{tg} (u/2R) \cdot e^{iv},$$

da cui

$$\frac{\partial \zeta}{\partial u} = \frac{1}{\cos^2(u/2R)} e^{iv} = \{1 + \operatorname{tg}^2(u/2R)\} e^{iv},$$

e finalmente, in forza della (13),

$$(19) \quad \lambda = \frac{1}{\{1 + \operatorname{tg}^2(u/2R)\}^2}.$$

Dalla (18), moltiplicando per la complessa coniugata e badando alla definizione (7) di  $\zeta$ , si ha

$$\zeta \bar{\zeta} = \xi^2 + \eta^2 = 4R^2 \operatorname{tg}^2(u/2R).$$

L'espressione (5) del  $ds^2$ , scrivendo per brevità  $\rho^2$  in luogo di  $\xi^2 + \eta^2$  e facendo di nuovo apparire la curvatura  $K$  (sempre reale), anzichè il raggio  $R$  (che può anche essere immaginario) assume in definitiva la classica forma di Riemann

$$(20) \quad ds^2 = \frac{d\xi^2 + d\eta^2}{(1 + K\rho^2/4)^2}.$$

## 7. - OSSERVAZIONE SUL COMPORTAMENTO LOCALE DI $\lambda$ NEL CASO GENERALE.

Da quanto abbiamo detto alla fine del n. 1 e dall'accenno del n. 3 segue che, supponendo  $K(x, y)$  dotata di derivate, rapporto ad  $x, y$ , continue fino all'ordine  $\nu$ , lo stesso accade per  $\gamma$ . E sussiste in più il fatto importante che *le derivate di  $\gamma$  di un ordine complessivo  $\nu' \leq \nu$  dipendono (in un punto generico e in particolare in  $O$ ) soltanto dai valori di  $K$  e sue derivate fino allo stesso ordine  $\nu'$ .*

Immaginiamo ora di assumere come variabili indipendenti, in luogo di  $x, y$ , le loro combinazioni lineari (complesse coniugate)  $\alpha, \bar{\alpha}$ . Seguita naturalmente a valere, nei riguardi delle derivate della  $\gamma$ , quanto si è detto or ora riferendosi ad  $x, y$ .

Risulta poi dalla equazione regolarizzata (10), la quale definisce  $\zeta$  in base alla condizione  $\zeta = \alpha$  per  $\bar{\alpha} = 0$ , che, per  $\alpha = \bar{\alpha} = 0$ ,

a) le derivate successive di  $\zeta$  rapporto a  $\alpha$  sono la prima 1 e le altre nulle;

b) le derivate del tipo

$$\frac{\partial^{\nu'+1} \zeta}{\partial^p \bar{\alpha} \partial^{\nu'-p} \alpha} \quad (0 \leq p \leq \nu' \leq \nu),$$

calcolate in base alla (10), ossia a

$$(10') \quad \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\alpha}} = - \frac{\alpha^2 \gamma}{2 + \alpha \bar{\alpha} \gamma} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{\alpha}},$$



è riferite (a derivazione eseguita) al punto  $O$ , dipendono da derivate di  $\gamma$  e per conseguenza da derivate di  $K$  fino all'ordine  $\nu' - 2$  al più (essendo addirittura nulle per  $\nu' = 1$ ). Ciò unicamente per la presenza del fattore  $\chi^2$  nel secondo membro della (10').

Ne deduciamo subito, attesa l'espressione (14) di  $\lambda$ , che: I valori in  $O$  delle derivate parziali di  $\lambda$  fino ad un ordine generico  $\nu' \geq 2$  dipendono esclusivamente dalla curvatura  $K$  e sue derivate fino all'ordine  $\nu' - 2$ ; i valori di  $\lambda$  e delle sue due derivate prime rapporto a  $\chi$  e a  $\bar{\chi}$  sono  $1, 0, 0$ .

Come corollario<sup>(1)</sup> segue che, fino al secondo ordine incluso rispetto a  $\chi, \bar{\chi}$ , cioè in un intorno di secondo ordine di  $O$  (punto generico di regolarità) ogni  $ds^2$  si comporta come se fosse a curvatura costante, ammettendo precisamente la forma canonica (20) col valore costante di  $K$  che compete al punto  $O$ .

**Meccanica.** — *Sul magnetometro di tensione.* Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace.* Nota di L. AMERIO, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. FUBINI.

Scopo della presente Nota è l'esposizione di alcuni teoremi che completano e, a mio parere, semplificano in modo notevole la teoria della trasformazione di Laplace in uno dei punti essenziali: lo studio dell'esistenza e delle proprietà del « prodotto integrale » (*Faltung* secondo G. Doetsch) di due funzioni, e delle condizioni di validità del classico teorema di Horn sulla funzione trasformata di un prodotto integrale. Tale semplificazione risulta in modo ben naturale da un ampliamento delle condizioni usualmente poste per le funzioni trasformande: per esse si ammette infatti soltanto l'integrabilità secondo Lebesgue in ogni parte finita dell'intervallo di definizione.

Completa la Nota un nuovo teorema sulle radici di una trasformata di Laplace nel quale, a prezzo di una condizione supplementare, che è però estremamente poco restrittiva, si ottiene un risultato notevolmente più ampio di quelli sinora noti.

(1) Ove si miri soltanto ad esso, basta naturalmente limitare le presenti osservazioni ai valori  $0, 1$  e  $2$  di  $\nu'$ .

(2) Nella seduta del 7 marzo 1937.

1. Seguendo il Fubini<sup>(1)</sup> diremo *prodotto integrale* di due funzioni  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ , definite nell'intervallo  $0 \leq t \leq T$ , l'espressione

$$F_1 * F_2(t) = \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau$$

la quale, quando l'integrale esista, rappresenta nello stesso intervallo una ben determinata funzione di  $t$ .

L'esistenza del prodotto integrale è stata provata in condizioni varie; le più ampie, considerate dal Doetsch<sup>(2)</sup>, sono le seguenti:

a)  $F_1$  e  $F_2$  sono integrabili secondo Riemann, in senso proprio, tra ogni  $\varepsilon > 0$  e  $T$ ; integrabili in senso improprio, ma assolutamente, tra  $0$  e  $T$ .

b)  $F_1$  e  $F_2$  sono a quadrato integrabile.

Nel secondo caso il prodotto integrale risulta anche funzione continua; nel primo caso può fare eccezione il punto  $t = 0$ .

Le ipotesi del caso a) possono facilmente estendersi, rimanendo le stesse le conclusioni, nel modo seguente:

a')  $F_1$  e  $F_2$  sono integrabili secondo Lebesgue in  $0 \leq t \leq T$ , limitate in  $\varepsilon \leq T$ , per ogni  $\varepsilon > 0$ .

Un altro caso di esistenza e di continuità senza eccezione è poi il seguente:

c)  $F_1$  e  $F_2$  sono integrabili secondo Lebesgue e una delle due è limitata.

Ma quando si lasci da parte la questione della continuità, che del resto non è essenziale per le applicazioni, si può andare ben più oltre. Si ha infatti:

I. Se  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  sono integrabili secondo Lebesgue in  $0 \leq t \leq T$ , il loro prodotto integrale esiste per quasi ogni valore di  $t$ , ed è integrabile in  $0 \leq t \leq T$ .

Si consideri infatti l'integrale doppio

$$\int_0^T d\tau \int_\tau^T |F_1(\tau) F_2(t - \tau)| dt;$$

diciamo che esso è determinato. Esiste infatti, per l'integrabilità di  $|F_2(t)|$

(1) Cfr. G. FUBINI, *Una lezione sul calcolo funzionale degli elettrotecnici*. (« L'Elettrotecnica », 1936, pp. 324-327).

(2) L'ipotesi a) è quella adottata generalmente dal Doetsch nei suoi lavori; alla ipotesi b) si accenna nella Memoria: *Der Faltungssatz in der Theorie der Laplace-Transformation*. (« Annali R. Sc. Norm. Sup. di Pisa » (2), IV, 1935, pp. 71-84).

l'integrale semplice

$$\begin{aligned} \int_{\tau}^T |F_1(\tau) F_2(t - \tau)| dt &= |F_1(\tau)| \int_{\tau}^T |F_2(t - \tau)| dt = \\ &= |F_1(\tau)| \int_0^{T-\tau} |F_2(\alpha)| d\alpha \end{aligned}$$

ed è maggiorato da un'espressione del tipo  $M|F_1(\tau)|$ ; a sua volta esso è quindi integrabile tra 0 e  $T$ .

Per un noto teorema<sup>(1)</sup> esiste allora l'integrale  $I$  di  $F_1(\tau) F_2(t - \tau)$  esteso al campo  $0 \leq \tau \leq t \leq T$ , e per il teorema di Fubini può scriversi:

$$I = \int_0^T dt \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau,$$

l'integrale interno esistendo per quasi ogni valore di  $t$ . E ciò dimostra il teorema.

2. L'interesse del teorema dimostrato sta principalmente nel fatto che, quando si completi la definizione del prodotto integrale di due funzioni integrabili  $F_1, F_2$  in un eventuale insieme di misura nulla, esso risulta soddisfare alle stesse condizioni di integrabilità di  $F_1$  e  $F_2$  e può essere quindi senz'altro impiegato a formare nuovi prodotti integrali  $(F_1 * F_2) * F_3$ ,  $\{(F_1 * F_2) * F_3\} * F_4 \dots$  tutti determinati quasi ovunque e integrabili.

È evidente la proprietà commutativa del prodotto integrale; meno evidente la associativa, sinora dimostrata nelle condizioni *a)* del n. 1. Ma noi possiamo qui provare, assai più generalmente:

II. Se le funzioni  $F_1(t), F_2(t), F_3(t)$  sono definite nell'intervallo  $0 \leq t \leq T$  e ivi integrabili, per quasi ogni valore di  $t$  sarà

$$(F_1 * F_2) * F_3(t) = F_1 * (F_2 * F_3)(t).$$

Precisamente, l'eguaglianza varrà sicuramente per i valori di  $t$  per i quali esiste il prodotto integrale  $(|F_1| * |F_2|) * |F_3|(t)$ .

Supponiamo infatti che per un certo valore di  $t$  esista l'ultimo prodotto considerato, e cioè l'integrale

$$\begin{aligned} \int_0^t |F_3(t - \tau)| d\tau \int_0^{\tau} |F_1(\alpha) F_2(\tau - \alpha)| d\alpha &= \\ = \int_0^t d\tau \int_0^{\tau} |F_3(t - \tau) F_1(\alpha) F_2(\tau - \alpha)| d\alpha. \end{aligned}$$

(1) Cfr., per es., CARATHÉODORY (C.), *Reelle Funktionen*, p. 637, Satz 7.

Come al n. 1, esisterà allora l'integrale  $I$  di  $F_3(t - \tau) F_1(\alpha) F_2(\tau - \alpha)$  esteso al campo  $0 \leq \alpha \leq \tau \leq t$ , e potrà scriversi:

$$I = \int_0^t F_3(t - \tau) d\tau \int_0^\tau F_1(\alpha) F_2(\tau - \alpha) d\alpha = (F_1 * F_2) * F_3(t)$$

ed anche

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t F_1(\alpha) d\alpha \int_\alpha^t F_2(\tau - \alpha) F_3(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_0^t F_1(\alpha) d\alpha \int_0^{t-\alpha} F_2(\beta) F_3(t - \alpha - \beta) d\beta = F_1 * (F_2 * F_3)(t) \end{aligned}$$

donde l'eguaglianza richiesta.

Questa vale dunque per i valori di  $t$  per i quali esiste  $(|F_1| * |F_2|) * |F_3|$ ; ma secondo il teorema I ciò avviene per quasi tutti i valori di  $t$  e perciò il teorema è dimostrato.

3. Il prodotto integrale ha importanza considerevole nella teoria della trasformazione di Laplace (unilatera)

$$L(F(t)) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt = f(p)$$

in forza del teorema di Horn secondo il quale, sotto certe condizioni, il prodotto integrale di due funzioni si trasforma nel prodotto aritmetico delle funzioni trasformate:

$$(I) \quad L(F_1 * F_2) = L(F_1) \cdot L(F_2).$$

Questo teorema (*Faltungssatz* secondo il Doetsch) è stato sinora provato in due distinte ipotesi:

a) che per un certo valore  $p_0$  gli integrali  $L(F_1)$ ,  $L(F_2)$  siano assolutamente convergenti; l'integrale  $L(F_1 * F_2)$  risulta anch'esso assolutamente convergente;

b) che per un certo valore  $p_0$  siano convergenti i tre integrali  $L(F_1)$ ,  $L(F_2)$ ,  $L(F_1 * F_2)$ ,

la tesi restando naturalmente assicurata per quello stesso valore  $p_0$ .

Se si riflette ora alla ben nota analogia tra la teoria della trasformazione di Laplace e quella delle serie di potenze, nella quale analogia il teorema di Horn ha come corrispondente la formula di moltiplicazione di due serie di potenze, o, se si vuole, di due serie qualunque eseguita al modo di Cauchy, si vede che le ipotesi a) e b) corrispondono a quelle di due noti teoremi

sulla moltiplicazione delle serie: quello di Cauchy e quello di Abel. Ma esiste anche un terzo teorema sull'argomento, quello di Mertens, in cui la convergenza assoluta è richiesta solo per una delle due serie; ed è il suo analogo che qui ci proponiamo di dimostrare:

III. Se  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$  sono definite per ogni  $t \geq 0$  e integrabili secondo Lebesgue in  $0 \leq t \leq T$ , per ogni  $T > 0$ ; se per un certo valore  $p = p_0$  convergono i due integrali  $L(F_1)$ ,  $L(F_2)$ , il primo anche assolutamente, convergerà per  $p = p_0$  anche  $L(F_1 * F_2)$  e varrà la relazione (1) di Horn.

La dimostrazione può darsi in vari modi; seguiremo qui la traccia di una elegante dimostrazione del teorema di Mertens dovuta a Jensen <sup>(1)</sup>.

Come nel teorema I, mediante la considerazione dell'integrale doppio

$$\begin{aligned} & \int_0^T d\tau \int_\tau^T |e^{-p_0 t} F_1(\tau) F_2(t - \tau)| dt = \\ & = \int_0^T |F_1(\tau)| d\tau \int_0^{T-\tau} e^{-R(p_0)(\tau + \alpha)} |F_2(\alpha)| d\alpha \end{aligned}$$

si giustifica la trasformazione:

$$\begin{aligned} & \int_0^T e^{-p_0 t} dt \int_0^t F_1(\tau) F_2(t - \tau) d\tau = \int_0^T d\tau \int_\tau^T e^{-p_0 t} F_1(\tau) F_2(t - \tau) dt \\ & = \int_0^T F_1(\tau) d\tau \int_\tau^T e^{-p_0 t} F_2(t - \tau) dt = \int_0^T F_1(\tau) d\tau \int_0^{T-\tau} e^{-p_0(\tau + \alpha)} F_2(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

ossia

$$\int_0^T e^{-p_0 t} F_1 * F_2(t) dt = \int_0^T e^{-p_0 \tau} F_1(\tau) d\tau \int_0^{T-\tau} e^{-p_0 \alpha} F_2(\alpha) d\alpha.$$

Ponendo

$$L(F_2) = \int_0^\infty e^{-p_0 \alpha} F_2(\alpha) d\alpha = f_2(p_0) \quad , \quad \int_t^\infty e^{-p_0 \alpha} F_2(\alpha) d\alpha = \rho(t)$$

questa può scriversi

$$\int_0^T e^{-p_0 t} F_1 * F_2(t) dt = f_2(p_0) \int_0^T e^{-p_0 \tau} F_1(\tau) d\tau - \int_0^T e^{-p_0 \tau} F_1(\tau) \rho(T - \tau) d\tau$$

(1) «Nouv. Corresp. Mathém.», 1879, p. 430; riportate dal CESÀRO a p. 166 della sua *Analisi algebrica*.



e facendo tendere  $T$  a  $+\infty$  vediamo che il teorema sarà dimostrato quando sia provato che l'ultimo integrale tende a zero.

Per far ciò scomponiamo questo integrale in due: uno  $I_1$  tra 0 e  $T/2$ , l'altro  $I_2$  tra  $T/2$  e  $T$ , e osserviamo che, per la convergenza di  $L(F_2)$ ,  $\rho(t)$  rimane limitato per ogni  $t$ :  $|\rho(t)| < M$ , e che il massimo  $\mu(T)$  di  $\rho(t)$  per  $\frac{T}{2} \leq t \leq T$  tende a zero per  $T \rightarrow \infty$ . Ciò posto, nel primo integrale,  $\tau$  variando da 0 a  $T/2$ ,  $T - \tau$  varia da  $T/2$  a  $T$ , onde

$$|I_1| \leq \mu(T) \int_0^{T/2} e^{-R(\rho_0)\tau} |F_1(\tau)| d\tau$$

mentre per il secondo si ha

$$|I_2| \leq M \int_{T/2}^T e^{-R(\rho_0)\tau} |F_1(\tau)| d\tau$$

e, a causa della convergenza assoluta di  $L(F_1)$ , è chiaro che  $I_1$  e  $I_2$  tendono ambedue a zero per  $T \rightarrow \infty$ . Il teorema è così dimostrato.

4. Sugli zeri della trasformata di Laplace  $f(p)$  di una funzione  $F(t)$  che non sia quasi ovunque nulla è noto da molto tempo un teorema di Lerch<sup>(1)</sup>, che è di importanza fondamentale per la dimostrazione, che se ne trae, della unicità dell'antitrasformata di una data  $f(p)$ . Una notevole estensione ne ha dato di recente A. Wintner<sup>(2)</sup> provando l'impossibilità di infinite radici della forma  $u_n + i\beta$ , con  $u_n$  e  $\beta$  reali,  $\lim u_n = +\infty$  e  $\Sigma(1/u_n)$  divergente.

In questi teoremi le ipotesi su  $F(t)$  sono quelle strettamente necessarie: integrabilità di  $F(t)$  ed esistenza di  $L(F)$  per un qualche valore di  $p$ . Mostreremo qui come, con ipotesi supplementari sul comportamento di  $F(t)$  nell'intorno di  $t = 0$ , si possa conseguire un risultato molto più generale. E anzitutto:

IV. Se  $F(t)$  è reale, definita in  $0 \leq t < \infty$  e integrabile secondo Lebesgue in ogni parte finita di questo intervallo, e se in ogni intorno destro di  $t = 0$ , purché convenientemente piccolo, la  $F(t)$  è  $\geq 0$  (oppure  $\leq 0$ ) senza essere quasi ovunque nulla, la sua trasformata di Laplace

$$f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt \quad (p = u + iv)$$

(1) M. LERCH, *Sur un point de la théorie des fonctions génératrices d'Abel*. (« Acta Math. », 27, 1903, 339-351).

(2) A. WINTNER, *Bemerkung zum Eindeutigkeitsatz der Laplace-Transformierten*. (« Math. Zeitschr. », 36, 1933, 638-640).

supposta esistente per  $u > \alpha$ , non può ammettere infiniti zeri nel campo

$$u \geq k > \alpha, \quad V_1 \leq v \leq V_2.$$

Supponiamo prima  $F(t)$  continua, positiva a destra di  $t = 0$ , assolutamente trasformabile per  $u > \alpha$ . Si potrà allora scegliere un  $\delta > 0$  tale che per  $0 < t < \delta$  sia  $F(t) > 0$  e inoltre

$$|\delta V_1| < \frac{\pi}{2}, \quad |\delta V_2| < \frac{\pi}{2}.$$

Sia poi

$$0 < \beta < \gamma < \delta$$

e  $\mu > 0$  il minimo di  $F(t)$  in  $\beta \leq t \leq \gamma$ .

Consideriamo allora la parte reale di  $f(p)$

$$Rf(p) = \int_0^{\infty} e^{-ut} \cos vt F(t) dt$$

e facendo variare  $p$  nel campo

$$u \geq k, \quad V_1 \leq v \leq V_2$$

spezziamo l'integrale in due: uno,  $I_1$ , tra 0 e  $\delta$ , l'altro,  $I_2$ , tra  $\delta$  e  $+\infty$ . Notando che per  $0 \leq t \leq \delta$ ,  $V_1 \leq v \leq V_2$ ,  $\cos vt$  risulta positivo, e dicendo  $\lambda$  il suo minimo in questo campo, si ha:

$$I_1 \geq \int_{\beta}^{\gamma} e^{-ut} \cos vt F(t) dt \geq \lambda \mu (\gamma - \beta) e^{-u\gamma} = A e^{-u\gamma}$$

essendo  $A$  una costante positiva. È poi

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_{\delta}^{\infty} e^{-ut} \cos vt F(t) dt \right| \leq \int_{\delta}^{\infty} e^{-ut} |F(t)| dt = \\ &= \int_{\delta}^{\infty} e^{-(u-k)t} \cdot e^{-kt} |F(t)| dt \leq e^{-(u-k)\delta} \int_{\delta}^{\infty} e^{-kt} |F(t)| dt = B e^{-u\delta} \end{aligned}$$

essendo  $B$  un'altra costante positiva.

Ne segue

$$Rf(p) \geq A e^{-u\gamma} - B e^{-u\delta} = A e^{-u\gamma} \left( 1 - \frac{B}{A} e^{-u(\delta-\gamma)} \right)$$

e cioè  $Rf(p) > 0$  appena  $u$  superi un conveniente numero  $K$ .

La  $f(p)$  non ha dunque radici nel campo:

$$u > K, \quad V_1 \leq v \leq V_2$$

e poichè nel rettangolo  $k \leq u \leq K$ ,  $V_1 \leq v \leq V_2$ , per l'analiticità, può averne solo un numero finito, il teorema è dimostrato.

Si passa al caso generale notando che se si pone

$$\varphi(t) = \int_0^t F(t) dt$$

la  $\varphi(t)$  risulta precisamente continua e positiva a destra di  $t=0$ , assolutamente trasformabile in un certo semipiano  $u > \alpha_1$ . La  $L(\varphi)$  non avrà dunque infinite radici nel campo.

$$u \geq k_1 > \alpha_1, \quad V_1 \leq v \leq V_2.$$

Ma è  $L(\varphi) = f(p)/p$ , quindi lo stesso si può dire di  $f(p)$ . Il resto della deduzione è allora evidente.

5. Il teorema precedente può avere una vastissima estensione con il seguente enunciato:

V. Se  $F(t)$  (reale o complessa), definita in  $0 \leq t < +\infty$  e integrabile secondo Lebesgue in ogni parte finita di questo intervallo, ammette per  $R(p) > \alpha$  la trasformata di Laplace  $f(p)$ , e se esiste una funzione  $G(t)$  definita e integrabile in  $0 \leq t < T$  ( $T > 0$ ) tale che il prodotto integrale  $F * G$  sia reale e si mantenga  $\geq 0$  ( $0 \leq 0$ ) in ogni intorno destro di  $t=0$ , purchè convenientemente piccolo, senza essere ivi quasi ovunque nullo, la trasformata  $f(p)$  non potrà ammettere infiniti zeri nel campo

$$u \geq k > \alpha, \quad V_1 \leq v \leq V_2.$$

La  $G(t)$ , continuata con valori nulli per  $t > T$  è certo trasformabile, anzi assolutamente, e per ogni valore di  $p$ , e si ha perciò per  $u > \alpha$

$$L(F * G) = L(F) \cdot L(G).$$

Ma per il teorema precedente e per le ipotesi poste il primo membro non può ammettere, nel solito campo, infiniti zeri; lo stesso può dirsi dunque per  $L(F) = f(p)$ , come si voleva.

OSSERVAZIONI. — a) I teoremi IV e V continuano a sussistere se le proprietà supposte per l'intervallo  $0 \leq t < +\infty$  e per l'estremo 0 si suppongono valere per l'intervallo  $c \leq t < +\infty$  e per l'estremo  $c$ . Si ha difatti

$$\int_c^\infty e^{-pt} F(t) dt = e^{-pc} \int_0^\infty e^{-pt} F(c+t) dt$$

e le condizioni poste assicurano che il nuovo integrale, e quindi nemmeno il primitivo, possiedono infinite radici nel solito campo.

Questa osservazione permette di sostituire all'ipotesi del teorema IV

l'altra più ampia che  $F(t)$ , in un certo intorno destro di  $t = 0$  sia  $\geq 0$  ( $0 \leq 0$ ) ma non quasi ovunque nulla. E analogamente nel teorema V.

b) Se nell'enunciato del teorema V si pone

$$G(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!}$$

si ottiene, mercè una ben nota formula, il risultato:

La tesi del teorema IV vale se in un intorno destro di  $t = 0$  è  $\geq 0$  ( $0 \leq 0$ ) ma non identicamente nulla, per un qualche valore di  $r$  la funzione

$$\varphi(t) = \int_0^t d\tau_r \int_0^{\tau_r} d\tau_{r-1} \int_0^{\tau_{r-1}} \dots \int_0^{\tau_2} F(\tau_1) d\tau_1.$$

c) Se  $F(t)$  è complessa, esistono effettivamente funzioni  $G(t)$  tali che  $F * G$  è reale; basta assumere per es.,  $G$  eguale alla coniugata  $\bar{F}$  di  $F$ . Se  $F = F_1 + iF_2$  si ha infatti

$$F * \bar{F} = F_1 * F_1 + F_2 * F_2$$

Si può ricavare di qui un enunciato particolare, su cui non ci fermiamo, relativo ad una  $F(t)$  complessa.

d) Il teorema V implica una proprietà assai singolare che è posseduta da quelle funzioni  $F(t)$  la cui trasformata di Laplace  $f(p)$  ammette infiniti zeri in una semistriscia del tipo  $u \geq k > \alpha$ ,  $V_1 \leq v \leq V_2$ ; per es. infinite radici reali tendenti a  $+\infty$ . Ora funzioni così fatte esistono effettivamente; ciò è, si può dire, implicito nella ricerca del Wintner, citata più sopra, ma crediamo valga la pena di accennarne la dimostrazione, non essendoci noto alcun esempio al riguardo.

Dal teorema di Müntz<sup>(1)</sup> richiamato dal Wintner risulta che il sistema delle potenze  $x^{\lambda_n}$ , con  $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  non è chiuso, in  $0 \dashv \vdash 1$ , se la serie  $\Sigma(1/\lambda_n)$  converge. Ne segue, in tale ipotesi, l'esistenza di una funzione a quadrato integrabile in  $0 \dashv \vdash 1$ , ortogonale a tutte le  $x^{\lambda_n}$ , e non quasi ovunque nulla. Sia essa  $\varphi(x)$ ; posto  $x = e^{-t}$ , risulta

$$0 = \int_0^1 \varphi(x) x^{\lambda_n} dx = \int_0^\infty e^{-(\lambda_n + 1)t} \varphi(e^{-t}) dt$$

e la  $F(t) = \varphi(e^{-t})$  soddisfa alle condizioni richieste. La sua trasformata si annulla infatti per i valori  $p_n = \lambda_n + 1$  reali e crescenti all'infinito.

Ciò posto, sia  $0 \dashv \vdash c$  il massimo intorno destro dello zero in cui  $F(t)$  è quasi ovunque nulla; allora il prodotto integrale della  $F(t+c)$  per una qualunque  $G(t)$  integrabile, che in ogni intorno  $0 \dashv \vdash \varepsilon$  non sia quasi ovunque nulla, presenta sempre in  $0 \dashv \vdash \varepsilon$  valori positivi e negativi.

(1) CH. MÜNTZ, Ueber den Approximationssatz von Weierstrass. (« Mathematische Abhandlungen H. A. Schwarz gewidmet », Berlin, 1914; 303-312).

**Matematica.** — *Sulle funzioni di operatori lineari.* — Nota I di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. SEVERI.

1. Sia dato un operatore lineare  $A$  che ad ogni funzione  $y(t)$  di un certo campo funzionale lineare  $H$  fa corrispondere un'altra funzione  $y_1(t) = Ay$ . Il prof. Fantappiè ha mostrato in due sue Memorie <sup>(2)</sup> come sia possibile stabilire una definizione ed un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$  corrispondenti alle funzioni analitiche  $f(\lambda)$  di un opportuno campo funzionale  $\Phi$  quando l'equazione fondamentale

$$(1) \quad Ay - \alpha y = y,$$

per ogni funzione  $y$  dal campo funzionale  $H$  ed ogni valore di  $\alpha$  di una certa regione connessa  $B$  contenente il valore  $\alpha = \infty$ , ammetta sempre una e una sola soluzione  $\gamma$ , pure del campo  $H$ , la quale, come funzione del parametro  $\alpha$ , risulti analitica e regolare in ogni punto di  $B$ . Nella prima Memoria C. S., insieme ad esempi di operatori lineari  $A$  per i quali si riesce a stabilire in questo modo un calcolo degli operatori  $f(A)$ , se ne danno però altri, come l'operatore

$$(2) \quad \Delta y(t) = y(t + w)$$

per i quali l'equazione fondamentale corrispondente

$$(3) \quad \Delta \gamma - \alpha \gamma = y$$

ammette invece infinite soluzioni e per i quali, quindi, il metodo stesso non è applicabile.

Mi propongo in queste Note di mostrare come tale metodo si possa estendere a casi molti più generali e cioè anche a casi in cui l'equazione (1) ha più soluzioni.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) L. FANTAPPIÈ, *La giustificazione del calcolo simbolico*. « Mem. della R. Acc. d'Italia », vol. I (1930-VIII), pp. 25-57. Questa Memoria verrà indicata nel seguito più brevemente con C. S.

L. FANTAPPIÈ, *Integrazione con quadrature dei sistemi a derivate parziali lineari e a coefficienti costanti in due variabili mediante il calcolo degli operatori lineari*. « Rend. del Circolo Matematico di Palermo », to. LVII, 1933. Questa Memoria sarà indicata con S. D. P.

Per le definizioni e le proprietà degli operatori lineari e dei campi funzionali lineari rimando a queste due Memorie.



2. Ricordiamo perciò le quattro proprietà date dal prof. Fantappiè nelle Memorie citate per stabilire una definizione e un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$  di un operatore lineare  $A$  che ad ogni funzione di un campo lineare  $H$  fa corrispondere sempre una funzione dello stesso campo.

Cerchiamo perciò di definire gli operatori

$$(4) \qquad f(A) y$$

corrispondenti alle funzioni analitiche  $f(\lambda)$  di una regione funzionale lineare  $\Phi$  connessa in modo che siano soddisfatte le seguenti proprietà fondamentali, e cioè:

1<sup>a</sup> Se la funzione analitica  $f$  varia entro  $\Phi$  in dipendenza da certi altri parametri  $\alpha, \beta \dots$  che compaiono pure analiticamente nella funzione  $f(\lambda; \alpha, \beta, \dots)$  anche l'espressione

$$f(A; \alpha, \beta \dots) y(t),$$

che rappresenta l'operatore ad essa coordinato, risulta sempre una funzione pure analitica degli stessi parametri qualunque sia  $y(t)$  in  $H$ . Poichè l'espressione (4) dipende dalla funzione analitica  $f(\lambda)$  variabile entro  $\Phi$ , è cioè, per ogni  $y$  prefissato in  $H$ , un funzionale  $F[f(\lambda)]$  univocamente definito per ogni funzione  $f$  di  $\Phi$ , potremo anzi precisare maggiormente questa prima proprietà nel senso che detto funzionale  $F$  deve risultare un funzionale di  $f$  *analitico localmente* in  $\Phi$  <sup>(1)</sup>.

2<sup>a</sup> Alla regione funzionale lineare  $\Phi$  in cui è definito il funzionale  $F$  devono appartenere le particolari funzioni di  $\lambda$  date da  $f(\lambda) = 1 = \lambda^0$  e  $f(\lambda) = \lambda$ , a cui devono corrispondere per  $F$ , rispettivamente, l'operatore identico  $A^0 y = y$  e l'operatore fondamentale  $A$ .

3<sup>a</sup> Se alla funzione  $f_1(\lambda)$  di  $\Phi$  è coordinato l'operatore lineare  $f_1(A)$  e ad un'altra funzione  $f_2(\lambda)$  di  $\Phi$  è coordinato l'altro operatore  $f_2(A)$ , la funzione prodotto  $f_1 f_2 = f_2 f_1$  deve pure appartenere a  $\Phi$  e ad essa deve corrispondere l'operatore  $f_1(A) f_2(A)$  *prodotto* dei due operatori corrispondenti; segue di qui che, data la proprietà commutativa per il prodotto ordinario di due qualunque funzioni del campo  $\Phi$ , anche per il prodotto degli operatori coordinati a queste funzioni *dovrà sempre valere la proprietà commutativa* (oltre, naturalmente, la proprietà associativa).

(1) Per le definizioni e proprietà essenziali dei funzionali analitici vedere le seguenti Memorie del prof. FANTAPPIÈ, *I funzionali analitici*. («Memorie della R. Accademia dei Lincei», ser. 6<sup>a</sup>, vol. III (1928-30), pp. 451-683) che verrà indicata nel seguito con F. A.; *I funzionali delle funzioni di due variabili*. («Memorie della R. Accademia d'Italia», vol. II (1931-IX), p. 1<sup>a</sup>, pp. 191-355); *Überblick über die Theorie der analytischen Funktionalen*. («Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung», Band. 43, 1933) che verrà indicata con Ü. F.

4<sup>a</sup> Se, infine, alle due funzioni  $f_1$  e  $f_2$  di  $\Phi$  sono coordinati, come precedentemente, i due operatori  $f_1(A)$  ed  $f_2(A)$  rispettivamente, alla funzione somma  $f_1 + f_2$  che appartiene certo alla regione funzionale  $\Phi$  deve risultare coordinato l'operatore somma  $f_1(A)y + f_2(A)y$ , il che equivale a dire che il funzionale  $F$ , che ad ogni funzione  $f(\lambda)$  di  $\Phi$  fa corrispondere l'espressione (4) è, non solo analitico, ma anche *lineare*.

3. Supponiamo ora che, dato l'operatore fondamentale  $A$ , si sia potuto stabilire un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$  in modo che siano soddisfatte le precedenti proprietà. L'espressione (4) risulterà allora definita per ogni funzione  $y$  del campo lineare  $H$  e per ogni funzione analitica  $f(\lambda)$  della regione funzionale lineare connessa  $\Phi$ . Fissata la  $y$  essa sarà, per ciò che abbiamo visto, un funzionale analitico e lineare di  $f$  e potrà perciò immediatamente calcolarsi con un integrale curvilineo (vedi F. A., Cap. II e le modificazioni in Ü. F.) quando se ne conosca l'*indicatrice emisimmetrica*

$$(5) \quad \gamma(\alpha, t) = L_\alpha y(t) = \frac{1}{\alpha - A} y(t)$$

quando si conosca cioè l'operatore  $L_\alpha$  corrispondente alle particolari funzioni  $\frac{1}{\alpha - \lambda}$  che appartengono a  $\Phi$ . Per le proprietà generali dei funzionali analitici lineari sarà infatti, qualunque sia  $f(\lambda)$  in  $\Phi$ ,

$$(6) \quad f(A)y = f(\lambda)_* \gamma(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) \gamma(\lambda, t) d\lambda$$

dove  $C$  è una curva chiusa, separatrice, della sfera complessa che lascia alla sinistra tutti i punti dell'insieme chiuso  $A$  ove l'indicatrice  $\gamma(\alpha, t)$ , pensata come funzione di  $\alpha$ , non è definita, e lascia invece alla destra tutti i punti dell'insieme chiuso  $I$  ove non è definita la funzione  $f(\lambda)$ . Anzi, per note proprietà dei funzionali analitici lineari, la regione funzionale lineare  $\Phi$  sarà costituita proprio da tutte e sole le funzioni analitiche  $f(\lambda)$  che sono regolari nell'insieme chiuso  $A$ , e poichè deve essere connessa, la regione  $B$  della sfera complessa, complementare dell'insieme chiuso  $A$  dove l'indicatrice  $\gamma(\alpha, \lambda)$  è definita e regolare, dovrà pure essere una regione connessa (vedi F. A., Cap. I, n. 13). D'altra parte alla regione funzionale  $\Phi$  appartengono, come abbiamo supposto (2<sup>a</sup> proprietà), le funzioni  $1$  e  $\lambda$  che hanno l'infinito per unico punto singolare, quindi il punto  $\lambda = \infty$  non potrà appartenere all'insieme chiuso  $A$  e dovrà perciò essere un punto della regione  $B$ .

Nell'ipotesi dunque che si sia potuta stabilire una definizione rigorosa degli operatori  $f(A)y$  mediante la formola (6) in modo che siano rispettate le quattro proprietà del n. 2 l'indicatrice emisimmetrica  $\gamma(\alpha, t)$ , data

dall'espressione (5), dovrà risultare, qualunque sia  $y$  in  $H$ , una funzione analitica di  $\alpha$  definita e regolare in tutta una regione connessa  $B$  della sfera complessa contenente il punto  $\alpha = \infty$ .

Corrispondentemente l'indicatrice simmetrica  $\bar{\gamma}(\alpha, t)$  dello stesso funzionale lineare  $F$ , legata all'indicatrice emisimmetrica  $\gamma(\alpha, t)$  dalle relazioni

$$(7) \quad \bar{\gamma}(\alpha, t) = \frac{1}{\alpha} \gamma\left(\frac{1}{\alpha}, t\right) \quad \gamma(\alpha, t) = \frac{1}{\alpha} \bar{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}, t\right)$$

sarà ancora una funzione analitica di  $\alpha$ , definita e regolare in tutta la regione connessa  $\bar{B}$  data dai valori reciproci dei punti  $\alpha$  appartenenti a  $B$ , quindi in particolare  $\bar{\gamma}$  sarà certo regolare nell'origine (reciproco di  $\alpha = \infty$ ) e sarà perciò sviluppabile in un suo intorno in serie convergente di potenze di  $\alpha$

$$(8) \quad \bar{\gamma}(\alpha, t) = \sum_0^{\infty} \xi_n(t) \alpha^n.$$

Ma quando è nota l'indicatrice simmetrica  $\bar{\gamma}$  del funzionale  $F$  il valore di questo per ogni funzione  $f(\lambda)$  per cui è definito si ottiene dal prodotto funzionale simmetrico

$$(9) \quad F[f(\lambda)] = f(A)y(t) = f(\hat{\lambda})\bar{\gamma}(\hat{\lambda}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) \frac{1}{\lambda} \bar{\gamma}\left(\frac{1}{\lambda}, t\right) d\lambda$$

formola che, nel caso particolare di  $f(\lambda) = \lambda^n$ , dà

$$(10) \quad A^n y(t) = \hat{\lambda}^n \bar{\gamma}(\hat{\lambda}, t) = \xi_n(t).$$

Dunque, nelle ipotesi fatte, i coefficienti  $\xi_n(t)$  dello sviluppo dell'indicatrice simmetrica  $\bar{\gamma}$  nell'intorno dell'origine non sono altro che le funzioni  $A^n y$  del campo  $H$  corrispondenti alla funzione  $y$  per i successivi operatori iterati  $A^n$ . Se perciò, per ogni  $y$  di  $H$ , possiamo determinare le funzioni  $A^n y$  che le corrispondono per questi operatori iterati potremo anche calcolare l'indicatrice simmetrica  $\bar{\gamma}$  mediante la serie di potenze

$$(11) \quad \bar{\gamma}(\alpha, t) = \sum_0^{\infty} \xi_n(t) \alpha^n = \sum_0^{\infty} \alpha^n A^n y$$

per tutti i valori di  $\alpha$  di quell'intorno dell'origine in cui tale serie è certo convergente. Ma una volta conosciuta la funzione  $\bar{\gamma}$  in questo intorno, essendo essa definita e analitica nella regione connessa  $\bar{B}$  che lo contiene, i valori che assume anche negli altri punti di  $\bar{B}$  risulteranno determinato univocamente dai precedenti mediante opportuni prolungamenti analitici da quell'intorno a tutta la regione  $\bar{B}$ .

4. Dato ora un operatore lineare  $A$  che ad ogni funzione  $y$  di un campo lineare  $H$  fa corrispondere una funzione dello stesso campo, per stabilire una definizione e un calcolo rigorosi degli operatori  $f(A)$  cerchiamo invece di utilizzare i risultati del numero precedente partendo dallo sviluppo (11). Qualunque sia  $y$  in  $H$  le funzioni  $A^0 y = y$ ,  $A^1 y = Ay$ ,  $A^2 y$ ,  $A^3 y$ , ... saranno intanto certo tutte nel campo  $H$  e potremo perciò considerare la serie di potenze

$$(12) \quad \sum_0^{\infty} \alpha^n A^n y.$$

Se non si può trovare nessun intorno dell'origine  $\alpha = 0$  in cui questa serie di potenze sia sempre convergente per ogni  $y$  di  $H$  resta senz'altro escluso di poter fondare un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$ ; infatti, quando ciò è possibile, la serie (12), che si riduce alla (11), deve essere certo convergente, come abbiamo visto, in un conveniente intorno dell'origine.

Supponiamo perciò che l'operatore  $A$  sia tale da far convergere la serie (12) in un conveniente intorno dell'origine qualunque sia la funzione  $y(t)$  di  $H$  e che la somma di questa serie, la quale, evidentemente è un operatore lineare di  $y$  che potremo indicare con  $\bar{L}_\alpha y$

$$(11') \quad \bar{\gamma}(\alpha, t) = \sum_0^{\infty} \alpha^n A^n y = \bar{L}_\alpha y$$

per ogni  $\alpha$  in tale intorno sia sempre, come funzione di  $t$ , un elemento del campo lineare  $H$ . Più generalmente potremo supporre che questo operatore  $\bar{L}_\alpha y$  risulti sempre, per ogni  $y$  in  $H$ , una funzione di  $\alpha$  non solo analitica e regolare in quell'intorno dell'origine, ma prolungabile analiticamente a tutta una regione più ampia  $\bar{B}$  connessa e non ricoprentesi in modo che, per ogni  $\alpha$  in  $\bar{B}$ ,  $\bar{L}_\alpha y = \bar{\gamma}(\alpha, t)$  sia ancora, come funzione di  $t$ , un elemento del campo lineare  $H$ .

Supponiamo inoltre che, applicando l'operatore  $\bar{L}_\alpha$  a una funzione  $y(t, \beta)$  che appartenga ad  $H$  per ogni  $\beta$  di una regione  $\Omega$  della sfera complessa e sia analitica e regolare, come funzione di  $\beta$ , in questa regione, il risultato  $\bar{L}_\alpha y(t, \beta)$  risulti pure una funzione di  $H$  analitica e regolare, come funzione del parametro  $\beta$ , in tutta la regione  $\Omega$ . Segue da questa ipotesi fatta sull'operatore  $\bar{L}_\alpha$  che essa dovrà di conseguenza essere verificata anche per l'operatore  $A$  e le sue potenze. Infatti dalla (11') segue

$$A^n y(t, \beta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{1}{\alpha^{n+1}} \bar{L}_\alpha y(t, \beta) d\alpha$$

ove  $C_0$  è una piccola curva chiusa di integrazione racchiudente l'origine e tutta appartenente a quel suo intorno in cui la serie (11') è convergente,

e poichè la funzione integranda è, per l'ipotesi fatta, una funzione analitica e regolare del parametro  $\beta$  in tutta la regione  $\Omega$ , tale sarà il risultato dell'integrazione, cioè  $A^n y(t, \beta)$  e in particolare, per  $n = 1$ ,  $A y(t, \beta)$ .

Consideriamo allora sulla sfera complessa la regione connessa  $B$  contenente l' $\infty$  costituita da tutti i valori reciproci di quelli appartenenti a  $\bar{B}$ , e indichiamo con  $A$  l'insieme chiuso complementare di  $B$ . L'insieme di tutte le funzioni analitiche  $f(\lambda)$  regolari in  $A$  costituirà allora, per note proprietà, una regione funzionale lineare che potremo indicare con  $\Phi$  e per ogni tale funzione  $f(\lambda)$  avrà un significato ben preciso il prodotto funzionale simmetrico

$$(13) \quad f(\overset{\circ}{\lambda}) \bar{y}(\overset{\circ}{\lambda}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\lambda) \frac{1}{\lambda} \bar{y}\left(\frac{1}{\lambda}, t\right) d\lambda$$

essendo  $C$  la solita curva separatrice. A ogni funzione  $f(\lambda)$  di  $\Phi$  si viene così ad associare l'espressione (13) la quale è una funzione di  $t$  che, data la linearità del campo  $H$  a cui appartengono tutte le funzioni  $\frac{1}{\lambda} \bar{y}\left(\frac{1}{\lambda}, t\right)$  per ogni  $\lambda$  su  $C$ , risulterà necessariamente ancora appartenente ad  $H$  (vedi le proprietà caratteristiche dei campi lineari in S. D. P. § 3).

Per ogni funzione  $y$  di  $H$  definiamo allora l'operatore  $f(A)$  corrispondente a una funzione  $f(\lambda)$  di  $\Phi$  mediante la formola

$$(14) \quad f(A) y = f(\overset{\circ}{\lambda}) \bar{y}(\overset{\circ}{\lambda}, t) = f(\overset{\circ}{\lambda}) \bar{L}_{\overset{\circ}{\lambda}} y(t).$$

Questo operatore  $f(A)$ , evidentemente lineare, farà così corrispondere a ogni funzione  $y$  di  $H$  un'altra funzione ben determinata dallo stesso campo.



**Matematica.** — *Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane.* Nota di I. POPA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

Nella presente Nota, vogliamo esporre alcuni risultati relativi allo studio proiettivo-differenziale di alcune singolarità delle curve piane e, precisamente, della *cuspidale*, del *flecnode* e del *biflecnode*.

Il prof. Bompiani ha mostrato l'interesse e la necessità che può presentare lo studio differenziale delle singolarità e ha esaminato, in ciò che riguarda le curve piane, il punto di flesso <sup>(2)</sup> e il nodo <sup>(3)</sup>.

Speriamo di presentare, fra poco, uno studio analogo concernente alcune singolarità delle superficie.

1. Consideriamo la curva cuspidata  $\Gamma$  riferita ad un triangolo avente la tangente cuspidale come un lato e la cuspidale stessa come un vertice. La curva  $\Gamma$  si può rappresentare (in coordinate non omogenee):

$$x = t^2,$$

$$y = at^3 + bt^4 + ct^5 + dt^6 + et^7 + ft^8 + gt^9 + \dots$$

L'approssimazione si farà con curve cuspidate. Fra le cubiche cuspidate in  $O$  aventi la stessa tangente cuspidale, ne esistono  $\infty^3$  che abbiano contatto 6-punto <sup>(4)</sup> con  $\Gamma$  e si possono rappresentare con l'equazione

$$(1 - ux - vy)y^2 - a^2(x - \mu y)^3 = 0,$$

nella quale abbiamo messo in evidenza la retta  $(d) \equiv x - \mu y = 0$ , congiungente la cuspidale  $O$  col solo punto di flesso che può avere una cubica cuspidata e la retta  $1 - ux - vy = 0$  la quale ne è la tangente inflessionale. La condizione affinchè le cubiche considerate contengano un nuovo punto di  $\Gamma$  vicino ad  $O$ , determina  $\mu$ ; si può dire che questo intorno di  $\Gamma$  è rap-

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) *Per lo studio delle singolarità.* «Boll. Unione Matematica Italiana», vol. V (1926); si può vedere anche il § I (5) della sua magistrale esposizione nel II° Appendice del libro *Geometria proiettivo-differenziale* di FUBINI-ČECH.

(3) *Invarianti d'intersezione di due curve sghembe.* «Rend. della R. Accad. dei Lincei», to. XIV (1931), pp. 456-461 e la sua recentissima Nota *Gli invarianti proiettivi nella teoria delle superficie* (I), negli stessi «Rendiconti», to. XXIV, I, pp. 323-332.

(4) Intendendo con ciò che 6 delle loro intersezioni sono accumulati in  $O$ .

presentato dalla retta ( $d$ ). Gli intornoi successivi determinano  $u$  e  $v$ , cioè due punti principali  $O_1$  e  $O_2$  (con determinati significati geometrici) e anche risultano ben determinati una cubica cuspidata (osculatrice)  $\gamma^3$  e un triangolo di riferimento. Per trovare un punto unità, consideriamo le quartiche cuspidate in  $O$  con la stessa tangente cuspidale, passanti per il punto principale  $O_1$  (situato sulla retta  $d$ ) e aventi con  $\Gamma$  un contatto 11-punto. Ne esistono  $\infty^2$  ma tutte hanno con la cubica osculatrice  $\gamma^3$ , all'infuori di  $O$ , una stessa intersezione ( $fe^2, -ae^3, f^3$ ). Assumendola come punto unità, risulta determinato un riferimento proiettivo invariabilmente collegato al intorno considerato e gli sviluppi corrispondenti

$$x = t^2,$$

$$y = t^3 + et^7 - et^8 + gt^9 + \dots$$

mettono in evidenza  $e, g, \dots$  invarianti proiettivi della curva cuspidata.

2. Consideriamo ora la singolarità *flecnode*, cioè il nodo di cui un ramo  $\Gamma^2$  è regolare e l'altro  $\Gamma^3$  è inflessionale. L'approssimazione si può fare con coniche  $\gamma^2$  (approssimanti il ramo  $\Gamma^2$ ) e con cubiche inflessionali  $\gamma^3$  (approssimanti il ramo  $\Gamma^3$ ) e, di più, aventi fra di loro un contatto di quarto ordine in un punto qualunque (diverso da  $O$ ), con tangente qualunque. Il luogo di questo punto di contatto fra  $\gamma^2$  e  $\gamma^3$  che hanno contatti di secondo, rispettivamente terzo ordine con i due rami del flecnodo è una ben determinata quintupla di rette. L'intorno di terzo ordine del ramo  $\Gamma^2$  (insieme a quello dello stesso ordine del ramo  $\Gamma^3$ ) determina sulla tangente di  $\Gamma^2$  un *punto principale* (polo della tangente inflessionale rispetto a tutte le coniche che osculano le cubiche  $\gamma^3$  e che contengono il detto intorno del ramo  $\Gamma^2$ ). L'intorno di quarto ordine del ramo  $\Gamma^3$  determina sulla tangente corrispondente un *secondo punto principale* (per il quale passano le *coniche polari degeneri* di  $O$  rispetto alle cubiche  $\gamma^3$  con contatto richiesto). In questo modo, riesce determinato un triangolo di riferimento. Si avrà un punto unità considerando l'intorno di quarto ordine del ramo  $\Gamma^2$  e, precisamente, si può prendere come tale una delle 5 intersezioni della conica osculatrice al ramo  $\Gamma^2$  con le rette della quintupla qui sopra trovata.

*Osservazione.* Il flecnodo apparisce nell'intersezione di una superficie  $\Sigma$  con un suo piano tangente in un punto di flesso di una delle sue asintotiche. Nelle notazioni classiche della geometria proiettivo-differenziale delle superficie (riferite alla retta delle asintotiche come retta di coordinate), tali punti sono caratterizzati da una delle relazioni  $\beta$  oppure  $\gamma = 0$ . Sia, per fissare le idee,  $\beta = 0$ . In un tale punto, le direzioni di Darboux coincidono con la tangente asintotica inflessionale. I risultati precedenti permettono di concludere: *Ad un flecnodo di una superficie sono associate le cinque direzioni*

rappresentate dall'equazione

$$3\beta_u du^5 - 4\gamma^2 dv^5 = 0$$

(s'intende che  $\beta_u, \gamma$  sono i valori di queste funzioni in O), dipendenti soltanto dagli intorni appartenenti al piano tangente (cioè per la determinazione di esse non occorre uscire da questo piano tangente).

3. Passiamo all'ultima singolarità che vogliamo studiare il *biflecnode* cioè il nodo a rami inflessionali. L'approssimazione si può fare con quartiche biflecnodali (con lo stesso biflecnode) e aventi in un punto qualunque un tacnode con tangente tacnodale ( $d$ ) qualunque. Fra esse ne esistono  $\infty^2$  aventi con ciascun ramo un contatto di terzo ordine. Il luogo dei tacnodi di queste quartiche è una determinata quaterna di rette passanti per O. L'intorno di quarto ordine di un ramo (insieme a quello di terzo ordine dell'altro) determina sulla tangente corrispondente un *punto principale* (pel quale passano tutte le tangenti tacnodali delle  $\infty^1$  quartiche contenenti gli intorni considerati). Ne segue che gli intorni di quarto ordine dei due rami determinano la quartica tacnodale e un triangolo. Gli stessi intorni determinano anche un punto unità: Le cubiche polari dei due punti principali rispetto alla quartica tacnodale osculatrice, s'incontrano, all'infuori di O, in due punti. Ne risulta determinato, con una sola ambiguità di segno, un punto unità.

*Osservazione.* La configurazione considerata apparisce nell'intersezione di una superficie con suo piano tangente in un punto nel quale le due asintotiche sono inflessionali. Per tali punti si ha  $\beta = \gamma = 0$ ; le direzioni di Darboux sono indeterminate. Con i precedenti risultati, si può concludere: *Ad un biflecnode di una superficie si può associare la quaterna di direzioni rappresentati dall'equazione.*

$$\beta_u du^4 - \gamma_v dv^4 = 0$$

dipendenti soltanto dagli intorni appartenenti al piano tangente.

La stessa configurazione apparisce proiettando due asintotiche curvilinee di una superficie rigata da un suo punto, cioè nel problema delle « trasformate asintotiche ». Inoltre, lo studio di questo problema è l'origine delle ricerche sopra esposte <sup>(1)</sup>.

**Matematica.** — *Sulle funzioni di operatori lineari.* Nota II di S. MARTIS in BIDDAU, presentata dal Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Si può vedere la mia Nota Lincea *Sulle trasformate asintotiche delle curve sghembe*, in questo to. XXV, pp. 107-111.

**Meccanica.** — *Sulla forma lagrangiana delle forze elettromagnetiche.* Nota di G. RACAHA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

È noto già da molto tempo che la legge del moto di una particella elettricamente carica in un campo elettromagnetico può esser messa sotto forma lagrangiana, benchè la forza cui tale particella è soggetta (forza di Lorentz) non sia conservativa nel senso che comunemente si dà a questa parola. Questa importante proprietà della forza di Lorentz è dovuta al fatto che le sue componenti, come ha mostrato lo Schwarzschild <sup>(2)</sup>, possono porsi sotto la forma

$$(1) \quad Q_i = -\frac{\partial V}{\partial q_i} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

dove  $V(q|\dot{q}, t)$  è una funzione potenziale generalizzata che dipende dalle  $\dot{q}_i$  oltre che dalle  $q_i$  e dal tempo.

Scopo di questa Nota è il mostrare che la forza di Lorentz

$$(2) \quad \mathbf{F} = e \left( \mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \frac{1}{c} \mathbf{B} \right)$$

è l'unico tipo di forza dipendente dalla posizione e dalla velocità del punto di applicazione (oltre che eventualmente dal tempo), che sia deducibile da una funzione potenziale generalizzata: si dimostrerà infatti che perchè una forza goda di tale proprietà, oltre che la particolare forma (2), è necessario che i vettori  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  soddisfino le equazioni

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0; \end{array} \right.$$

e queste equazioni sono le uniche che effettivamente legano le componenti del campo elettromagnetico, potendosi sempre soddisfare le altre equazioni di Maxwell con una conveniente distribuzione di cariche e di correnti.

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) K. SCHWARZSCHILD, « Göttinger Nachr. », anno 1903, p. 126; cfr. anche A. SOMMERFELD, « Ann. d. Phys. », 53, 527, 1917 e « Atombau », ed. 1924, p. 801.

Credo che questo risultato non sia privo di interesse, specie in questo momento in cui le ben note difficoltà collegate all'esistenza di cariche elettriche puntiformi (massa elettromagnetica infinita, ecc.) stanno orientando i fisici verso la ricerca di eventuali possibili modificazioni alle leggi fondamentali dell'elettromagnetismo. Per conservare la forma lagrangiana, che è intimamente legata con la conservazione dell'energia e dell'impulso, sarà dunque necessario mantenere sia la (2) che le (3).

Le condizioni generali perchè le componenti lagrangiane di una forza possano derivarsi da una funzione potenziale  $V(q|\dot{q}|t)$  secondo la legge (I) sono state date per la prima volta dall'Helmholtz<sup>(1)</sup> e poi dimostrate dal Mayer<sup>(2)</sup>; esse sono

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_k} = \frac{\partial Q_k}{\partial \ddot{q}_i} \\ \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \ddot{q}_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \ddot{q}_i} \right) \\ \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} \right). \end{array} \right.$$

Nell'ipotesi che la forza dipenda dalle velocità ma non dalle accelerazioni, la prima condizione è automaticamente soddisfatta e la seconda diventa

$$(5) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_k} + \frac{\partial Q_k}{\partial \dot{q}_i} = 0;$$

la terza, esplicitando la derivazione totale, diventa

$$(6) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_l \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_l} \right) \dot{q}_l + \frac{1}{2} \sum_l \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial q_l} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial t} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial t} \right),$$

e dovendo valere per qualsiasi valore delle  $\dot{q}_i$ , si spezza in

$$(7) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_l} = 0$$

e

$$(8) \quad \frac{\partial Q_i}{\partial q_k} - \frac{\partial Q_k}{\partial q_i} = \frac{1}{2} \sum_l \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial q_l} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial q_l} \right) \dot{q}_l + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial t} - \frac{\partial^2 Q_k}{\partial \dot{q}_i \partial t} \right).$$

(1) H. HELMHOLTZ, « Journal f. Math. », 100, 165, 1886, riportato in « Opere complete », vol. III, p. 236.

(2) A. MAYER, « Leipziger Berichte », 40, 519, 1896.



Derivando la (5) rispetto a  $\dot{q}_i$  e sommando con la (7) si ha

$$(9) \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial \dot{q}_k \partial \dot{q}_l} = 0,$$

cioè che la forza deve essere funzione lineare della velocità; sarà dunque in generale

$$(10) \quad Q_i = e_i + \sum_l c_{il} \dot{q}_l$$

con  $e_i$  e  $c_{il}$  indipendenti dalle  $\dot{q}$ .

Sostituendo la (10) nelle (5) e (8) si ha rispettivamente

$$(11) \quad c_{ik} + c_{ki} = 0$$

e

$$(12) \quad \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial e_k}{\partial \dot{q}_i} + \sum_l \left( \frac{\partial c_{il}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial c_{kl}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_l \frac{\partial (c_{ik} - c_{ki})}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_l + \frac{1}{2} \frac{\partial (c_{ik} - c_{ki})}{\partial t};$$

dovendo quest'ultima valere per qualsiasi valore delle  $\dot{q}_l$ , essa si spezza in

$$(13) \quad \frac{\partial c_{ik}}{\partial \dot{q}_l} + \frac{\partial c_{kl}}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial c_{li}}{\partial \dot{q}_k} = 0$$

e

$$(14) \quad \frac{\partial c_{ik}}{\partial t} + \frac{\partial e_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial e_i}{\partial \dot{q}_k} = 0.$$

Le (10), (11), (13) e (14) sono dunque le condizioni necessarie e sufficienti perchè le  $Q_i(q|\dot{q}|t)$  possono dedursi secondo la legge (1) da una  $V(q|\dot{q}|t)$ ; si osservi anche che quando si ponga  $q_0 = t$  e  $c_{k0} = e_k$  le (14) rientrano normalmente nelle (13).

Nel caso particolare che le  $q_i$  siano le tre coordinate cartesiane di una particella, si può porre per la (11)

$$(15) \quad b_i = c_{i+1, i+2} = -c_{i+2, i+1};$$

le  $e_i$  e  $b_i$  diventano allora rispettivamente le componenti di due vettori  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$ , mentre le

$$(16) \quad Q_i = e_i + c_{i, i+1} \dot{q}_{i+1} + c_{i, i+2} \dot{q}_{i+2} = e_i + \dot{q}_{i+1} b_{i+2} - \dot{q}_{i+2} b_{i+1}$$

diventano le componenti del vettore

$$(17) \quad \mathbf{F} = \mathbf{e} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{b}.$$

Ma non basta che la forza abbia questa forma, perchè possa derivare da un potenziale generalizzato: occorre altresì per le (13) e (14) che i vettori  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{b}$  soddisfino le equazioni

$$(18) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{b} = 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{e} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = 0, \end{cases}$$

cioè proprio quelle equazioni cui debbono soddisfare il campo elettrico e l'induzione magnetica.

**Meccanica.** — *Sui problemi di elasticità piana a funzione di Airy polidroma* <sup>(1)</sup>. Nota di C. TOLOTTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Come è ben noto <sup>(3)</sup>, se in un sistema elastico piano, sollecitato esclusivamente al contorno con forze giacenti in esso piano, si considerano, con l'Airy, le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  dello sforzo come derivanti da un'unica funzione incognita  $F(x, y)$  per il tramite delle posizioni

$$(1) \quad \begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \end{cases}$$

il relativo problema della determinazione degli sforzi si riduce alla ricerca delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$(2) \quad \Delta \Delta F = 0 \quad (4),$$

con opportune condizioni al contorno.

Particolare attenzione merita il caso dei sistemi piani pluriconnessi, perchè, per questi sistemi, se non si introducono particolari ipotesi sulla distribuzione delle forze al contorno (oltre a quelle, beninteso, richieste dalle equazioni cardinali dell'equilibrio), occorre cercare la incognita soluzione

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(3) Cfr., ad es., A. E. H. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge Univ. Press, 1927, 4<sup>a</sup> ed., Cap. IX.

(4)  $\Delta$  denota, come d'uso, l'operatore di Laplace  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ .

$F(x, y)$  nel campo delle funzioni polidrome (a derivate seconde cartesiane monodrome).

Uno studio completo sulla natura della polidromia della funzione di Airy  $F(x, y)$  si trova, ad es., nel bel libro di foto-elasticità di Coker e Filon<sup>(1)</sup>, dove è mostrato che l'incremento della  $F(x, y)$ , dopo un intero giro attorno ad una cavità del sistema, si interpreta meccanicamente con il momento delle forze applicate al contorno della cavità, rispetto al punto di partenza del circuito. Cosicché, in particolare, per la univalenza della funzione di Airy, occorre è basta che i sistemi di forze, agenti ai singoli contorni parziali del campo, si facciano tutti *separatamente* equilibrio.

Ma non crediamo sia stato già esposto come quella bella interpretazione meccanica permetta, *qualunque sia la forma e l'ordine di connessione del sistema*, di ricondurre, in modo semplice, il problema generale ad un problema con distribuzioni separatamente equilibrate di forze al contorno e che quindi non comporta più alcuna polidromia per la incognita funzione di Airy<sup>(2)</sup>.

Questo è appunto l'oggetto della nostra Nota.

2. Premettiamo qualche breve richiamo.

Chiameremo, coi Sigg. Coker e Filon, funzione ciclica  $C(f)$  di una  $f(x, y)$ , relativamente ai circuiti di una certa connessione<sup>(3)</sup>, l'incremento, variabile in genere da punto a punto, che la  $f(x, y)$  subisce ritornando al punto di partenza attraverso ad un circuito della connessione.

Siano  $p$  le cavità del sistema. Denotiamo con  $C_k(F)$  ( $k = 1, \dots, p$ ) la funzione ciclica della funzione di Airy  $F(x, y)$  relativa ai circuiti della connessione a cui appartiene il contorno della  $k^{ma}$  cavità.

Secondo la interpretazione meccanica, a cui accennavamo al n. 1, possiamo senz'altro dare<sup>(4)</sup> come espressioni delle  $C_k(F)$

$$(3) \quad C_k(F) = M_k(x, y) \quad (k = 1, \dots, p),$$

dove  $M_k(x, y)$  denota il momento delle forze applicate al contorno della  $k^{ma}$  cavità, rispetto al punto  $(x, y)$  di partenza del circuito<sup>(5)</sup>.

(1) E. G. COKER and L. N. G. FILON, *A treatise on photo-elasticity*. Cambridge University Press, 1931, p. 506 e segg.; cfr. anche L. SOBRERO, *Del significato meccanico della funzione di Airy*. «Rend. Acc. Lincei», ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXI, febbraio 1935, pp. 264-269.

(2) COKER e FILON nel volume citato (pp. 374-379) eseguono quella separazione nel caso particolare dell'anello circolare, procedendo per coefficienti indeterminati, senza sfruttare le loro considerazioni generali sulla polidromia della funzione di Airy.

(3) Per circuiti di una stessa connessione, intendiamo circuiti mutualmente deducibili per deformazione continua.

(4) Cfr. E. G. COKER and L. N. G. FILON, op. cit., p. 514.

(5) Le (3) valgono anche in segno purchè: si assuma come verso di percorrenza dei circuiti quello che lascia alla sua destra la relativa cavità; si misurino i momenti lungo la normale  $Oz$  al piano, orientata in modo da costituire cogli assi  $Ox, Oy$  un triedro destro.

Ci servirà in seguito notare che  $M_k(x, y)$  è una funzione lineare di  $x, y$ ; precisamente

$$(4) \quad M_k(x, y) = \bar{M}_k - x Y_k + y X_k \quad (k = 1, \dots, p),$$

in cui  $X_k, Y_k$  indicano le due componenti cartesiane del risultante delle forze applicate al contorno della  $k^{ma}$  cavità ed  $\bar{M}_k$  il loro momento rispetto all'origine degli assi.

Osserviamo infine che da (3), (4) per derivazione <sup>(1)</sup> si ha

$$(5) \quad \begin{cases} C_k \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) = -Y_k \\ C_k \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right) = X_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, p),$$

che corrispondono alla nota interpretazione meccanica delle funzioni cicliche (in questo caso, costanti cicliche) delle derivate della  $F(x, y)$ .

3. Ciò premesso, consideriamo la funzione

$$(6) \quad F''(x, y) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p \theta_k M_k,$$

dove le  $\theta_k$  ( $k = 1, \dots, p$ ) denotano le anomalie del punto variabile  $(x, y)$  prese rispetto ai poli  $O_k$  (arbitrariamente scelti nell'interno delle cavità corrispondenti) e a partire dalla direzione dell'asse  $x$ , nel senso di circolazione determinato nel piano dagli assi di riferimento (rotazione di  $Ox$  verso  $Oy$ ).

Come somma di prodotti delle funzioni armoniche  $\theta_k$  per i polinomi lineari  $M_k$  forniti dalle (4), la  $F''(x, y)$  è funzione biarmonica. Inoltre essa possiede come funzioni cicliche

$$(7) \quad C_k(F'') = -M_k(x, y) \quad (k = 1, \dots, p),$$

e per le sue derivate prime

$$(8) \quad \begin{cases} C_k \left( \frac{\partial F''}{\partial x} \right) = Y_k \\ C_k \left( \frac{\partial F''}{\partial y} \right) = -X_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, p);$$

mentre le derivate seconde sono monodrome.

(1) Se  $f(x, y)$  ha, per una data connessione, una funzione ciclica  $C(f)$ , la sua derivata  $\frac{\partial f}{\partial n}$ , secondo una direzione generica  $n$ , ha come funzione ciclica, per la stessa connessione, la derivata della  $C$ :  $C\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right) = \frac{\partial}{\partial n} C(f)$ . Cfr. E. G. COKER and L. N. G. FILON, op. cit., p. 513.

Poichè biarmonica e a derivate seconde univalenti, la  $F''(x, y)$  si può interpretare come funzione di Airy degli sforzi per una opportuna sollecitazione al contorno, che ora determineremo, ma che, in virtù di (7), (8), già sappiamo possedere sul contorno della  $k^{ma}$  cavità  $-X_k, -Y_k$  come componenti cartesiane del risultante degli sforzi e  $-\bar{M}_k$  momento rispetto all'origine.

Per calcolare questa distribuzione di forze ricordiamo che, assegnato un arco di curva  $s$  ed orientata la normale  $n$  ad esso (in modo da costituire con il verso di percorrenza di  $s$  una coppia che possa sovrapporsi a quella degli assi  $Ox, Oy$ , senza uscire dal piano), le relative componenti  $\sigma_n, \tau_{ns}$  normale e tangenziale dello sforzo sono legate alla funzione di Airy  $F(x, y)$  dalle relazioni <sup>(1)</sup>

$$(9) \quad \begin{cases} \sigma_n = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} + c \frac{\partial F}{\partial n}, \\ \tau_{ns} = -\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial F}{\partial n} \right) + c \frac{\partial F}{\partial s} \end{cases} \quad (2)$$

dove  $c(s)$  indica la curvatura, che va considerata positiva o negativa, a seconda che la normale  $n$  risulta volta verso la convessità o la concavità della curva.

Tenendo presenti le (9), si ha come espressioni delle componenti  $(\sigma''_n)_h, (\tau''_{ns})_h$ , secondo la normale e la tangente al contorno  $h^{mo}$ , della sollecitazione lineare agente su quel contorno, ( $h = 0, 1, \dots, p$ ) <sup>(3)</sup>:

$$(10) \quad \begin{cases} (\sigma''_n)_h = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p \left[ M_k \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial s_b^2} + 2 N_{hk} \frac{\partial \theta_k}{\partial s_b} + c_b M_k \frac{\partial \theta_k}{\partial n_b} \right], \\ (\tau''_{ns})_h = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^p \left[ -M_k \frac{\partial}{\partial s_b} \left( \frac{\partial \theta_k}{\partial n_b} \right) + (c_b M_k + T_{hk}) \frac{\partial \theta_k}{\partial s_b} - N_{hk} \frac{\partial \theta_k}{\partial n_b} \right], \end{cases}$$

dove  $N_{hk}, T_{hk}$  denotano le componenti, secondo la normale e la tangente al contorno  $h^{mo}$ , del risultante delle forze applicate alla  $k^{ma}$  cavità

$$(11) \quad \begin{cases} N_{hk} = \frac{\partial M_k}{\partial s_b} = l_h X_k + m_h Y_k \\ T_{hk} = -\frac{\partial M_k}{\partial n_b} = -m_h X_k + l_h Y_k \end{cases} \quad \begin{pmatrix} h = 0, 1, \dots, p \\ k = 1, \dots, p \end{pmatrix},$$

( $l_h, m_h$  coseni di direzione della normale  $n_h$ ).

(1) Cfr., ad es., E. G. COKER and L. N. G. FILON, op. cit., p. 162.

(2) Si tenga presente che, trattandosi di derivazioni rispetto ad archi, non è in generale lecito invertire l'ordine delle derivazioni.

(3) Come contorno  $h = 0$  va inteso il contorno esterno.



4. Sostituiamo ora alla  $F(x, y)$  come nuova funzione incognita  
(12)  $F'(x, y) = F(x, y) + F''(x, y),$

con  $F''$  data dalla (6).

Per quanto precede,  $F'(x, y)$  è la funzione di Airy dell'ausiliario problema elastico che si ottiene sovrapponendo, alla effettiva distribuzione di forze al contorno, la ulteriore distribuzione (10).

Il vantaggio di passare a questo problema ausiliario, è che la nuova distribuzione di forze, come segue da (3), (5), (7), (8), è separatamente equilibrata nei singoli contorni parziali, e, in corrispondenza, la incognita funzione di Airy è certamente monodroma. Dalla soluzione  $F'$  del problema ausiliario, si risale poi alla corrispondente del problema effettivo per mezzo della (12).

Resta così realizzata la riduzione che si desiderava:

*La sostituzione (12) riconduce il problema generale, per un qualsivoglia campo moltiplicemente connesso, ad un problema analogo, relativo allo stesso campo, che però ammette una funzione di Airy certamente monodroma.*

5. Come esempio, applichiamo le formule precedenti al caso del più semplice dei sistemi pluriconnessi: l'anello circolare<sup>(1)</sup>.

Riferito l'anello, di raggio interno  $r$  e raggio esterno  $R$ , ad un sistema di coordinate polari  $(\rho, \theta)$  con polo nel suo centro, si ha da (12), per l'ausiliaria funzione di Airy che va introdotta,

$$F'(\rho, \theta) = F(\rho, \theta) + \frac{\theta}{2\pi} M(\rho, \theta),$$

con  $M$  momento (rispetto al punto variabile  $\rho, \theta$ ) delle forze applicate al cerchio interno.

Inoltre, tenendo conto che

$$\frac{\partial}{\partial n_0} = -\frac{\partial}{\partial n_1} = \frac{\partial}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial}{\partial s_0} = -\frac{\partial}{\partial s_1} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

le (10) forniscono come distribuzione di forze al contorno, che (nel problema ausiliario) va sovrapposta alla effettiva sollecitazione,

$$\begin{aligned} (\sigma''_n)_r &= \frac{N}{\pi r}, & (\tau''_{ns})_r &= \frac{\bar{M}}{2\pi r^2}, \\ (\sigma''_n)_R &= \frac{N}{\pi R}, & (\tau''_{ns})_R &= \frac{\bar{M}}{2\pi R^2}, \end{aligned}$$

ove  $\bar{M}$  denota il momento rispetto all'origine delle forze applicate al cerchio interno ed  $N(\theta)$  la componente radiale del loro risultante.

(1) Per la trattazione di questo caso particolare, cfr. L. N. G. FILON, *The stresses in a circular ring*. «Selected Engin. Papers of the Inst. of Civil Eng.», 1924; E. G. COKER and L. N. G. FILON, op. cit., pp. 374-381.

**Meccanica.** — *Una soluzione relativa alla espansione dell'Universo.* Nota di P. UDESCHINI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

Tra i risultati più suggestivi della teoria della relatività vi è certamente quello d'aver permesso la costruzione di modelli geometrici che permettono una visione d'insieme sulla struttura dell'Universo. Questi modelli si ottengono da alcune semplici soluzioni delle equazioni gravitazionali di Einstein, supponendo che la materia e la radiazione siano statisticamente distribuite in modo uniforme nello spazio. I primi modelli riguardano soluzioni statiche: sono cioè modelli nei quali ogni caratteristica fisica non dipende da quella coordinata del cronotopo, che si suole interpretare come tempo. Essi corrispondono a due soluzioni ben note delle equazioni della statica einsteiniana: la soluzione di Einstein e quella di De-Sitter.

Nell'Universo di Einstein la velocità della luce non varia da luogo a luogo e neppure varia, da luogo a luogo, la frequenza di una radiazione. Non così nell'Universo di De-Sitter nel quale tanto la velocità della luce, quanto la frequenza di radiazione variano da luogo a luogo. Si può pensare di trarre profitto da ciò per spiegare l'apparente velocità di recessione delle Nebule extragalattiche. Ma mentre la soluzione di De-Sitter vuole che tale velocità di recessione sia proporzionale al quadrato della distanza, l'osservazione mostra che sensibilmente la legge di variazione della velocità di fuga, dà la proporzionalità con la distanza e non col quadrato di questa.

Le soluzioni statiche debbono quindi essere abbandonate se si vuole trovare nella teoria della relatività la spiegazione del misterioso fenomeno (ormai sicuramente accertato), dell'apparente fuga delle Nebule extragalattiche. Si costruiscono allora delle soluzioni dinamiche corrispondenti a modelli in cui le caratteristiche del cronotopo variano in uno stesso punto dello spazio geometrico da istante a istante. Sono ben note in proposito le soluzioni di Friedmann, Lemaître, Tolman, Robertson, Takeuchi ecc. Tutte queste soluzioni sono estensioni della soluzione statica di Einstein, nel senso che, prescindendo dalla dipendenza dal tempo, esse si riducono alla accennata soluzione di Einstein. Le soluzioni dinamiche di Friedmann, Lemaître, Tolman, Robertson, Takeuchi ecc., comportano velocità della luce costante in ogni luogo e in ogni istante, ma frequenza di uno stesso fenomeno variabile da luogo a luogo. Ne segue lo spostamento delle righe spettrali di una stessa

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

sostanza, una prima volta osservata sulla terra, una seconda volta sopra una Nebula extragalattica. Orbene se  $\nu$  è la frequenza di radiazione emessa da un elemento sulla terra e  $\nu + \delta\nu$  la frequenza emessa dallo stesso elemento posto a distanza  $r$ , il rapporto  $\delta\nu/\nu$  è negativo e proporzionale ad  $r$ . Ciò è in ottimo accordo con le osservazioni sperimentali eseguite. Di qui il successo delle soluzioni dinamiche accennate e dei corrispondenti modelli di Universo.

In questo mio lavoro, mi sono proposto di ricercare una soluzione dinamica che generalizzi, non la soluzione statica di Einstein (come avviene per le soluzioni dinamiche suaccennate), ma bensì generalizzi la soluzione statica di De-Sitter. Sono pervenuto così alla costruzione di un modello di Universo dinamico che, qualora si prescinda da ogni dipendenza temporale, viene a coincidere con il modello statico di De-Sitter. Nel modello dell'Universo da me costruito, la materia è dotata di una effettiva velocità di insieme variabile da punto a punto: in questo veniamo a ricollegarci all'ipotesi di Castelnovo<sup>(1)</sup>, ipotesi secondo la quale le Nebule che presentemente si muovono nello spazio curvo, sarebbero state generate da un'unica immensa Nebula originaria in un tempo remotissimo.

In questa soluzione delle equazioni gravitazionali, la velocità della luce non è costante (come avviene in tutte le soluzioni dinamiche note); come pure la frequenza caratteristica di un elemento varia di luogo in luogo e precisamente il rapporto  $\delta\nu/\nu$  è somma di due termini entrambi negativi: l'uno proporzionale alla distanza, l'altro al quadrato di questa. La legge è dunque parabolica. Per Nebule abbastanza vicine il termine quadratico non porta contributo sensibile: questo si manifesterebbe considerando almeno distanze maggiori di  $10^9$  anni luce.

1. METRICA. — Se lo spazio geometrico è in ogni istante omogeneo ed isotropo pur variando da istante a istante la sua configurazione, è ben noto che l'elemento fondamentale del cronotopo assume l'espressione:

$$(1) \quad ds^2 = c^2 dt^2 - e^{f(t)} dl^2, \quad dl^2 = (1 + r^2/4 R^2)^{-2} dl_0^2$$

$dl$  = elemento lineare di spazio geometrico a curvatura costante;  $dl_0$  = elemento lineare di spazio euclideo;  $r$  = distanza in questo spazio tra un generico punto e un punto prefissato;  $R$  = raggio dell'Universo.

Questo elemento lineare dinamico risulta di tipo più generale di quello statico di Einstein poichè quest'ultimo è in esso contenuto, come caso particolare, pur di prescindere da ogni dipendenza temporale cioè ponendo la funzione  $f(t) = 0$ .

(1) *De Sitter's Universe and the Motion of Nebulae*. « Month. Not. of. the R. Ast. Soc. », XCI, 1931, p. 829.

Vediamo invece a quale risultato si perviene considerando un elemento lineare dinamico che contempla quale caso particolare quello statico di De-Sitter, cioè l'elemento seguente:

$$(2) \quad ds^2 = V^2 dt^2 - e^{f(t)} dl^2, \quad V = c (1 - r^2/4 R^2) (1 + r^2/4 R^2)^{-1}.$$

Tale forma quadratica appare così di tipo più generale della (1). In essa infatti il coefficiente di  $dt$  non è più una costante, ma è  $V$  funzione del posto; basta quindi supporre detta funzione costante  $= c$  per ricadere nel caso prima considerato. Questo elemento lineare contiene come casi particolari: l'elemento lineare statico di De-Sitter per  $f(t) = 0$ ; e per  $f(t) = 0$ ,  $V = c$ , quello di Einstein.

2. TENSORE ENERGETICO. — Assumendo dunque quale caratteristica della metrica del cronotopo il  $ds$  così formato, determiniamo dalle equazioni gravitazionali di Einstein, il corrispondente tensore energetico. Quale ipotesi base anche qui ammettiamo che l'Universo, pur variando continuamente di configurazione, possieda la proprietà dell'isotropia. Così pur essendo i corpi celesti separati da distanze molto grandi in rapporto alle loro dimensioni, e quindi la materia distribuita nello spazio stesso in modo piuttosto discontinuo, supporremo, da un punto di vista statistico, che la materia cosmica sia uniformemente distribuita in ogni punto, anziché concentrata in modo discreto. Supponendo altresì che questa materia sia dotata di una velocità radiale effettiva, nel caso in esame vediamo subito quali sono le componenti del tensore energetico. Indicando con  $\mu$  la densità di materia,  $p$  la pressione di radiazione,  $\eta = c^2 \mu - p$  la densità di energia;  $V$  la velocità della luce funzione del posto;  $v$  la componente secondo il raggio (linea  $x^1$ ) della velocità radiale di insieme;  $g_{ik}$  ( $i, k = 0, 1, 2, 3$ ) i coefficienti della forma quadratica fondamentale  $ds^2 = \sum_{ik}^3 g_{ik} dx^i dx^k$

$$T_{00} = V^2/c^2 \cdot \eta, \quad T_{01} = -\eta \cdot v/V, \quad T_{02} = T_{03} = 0 \\ T_{11} = -pg_{11} + \eta \cdot v^2/V^2, \quad T_{ik} = -pg_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3).$$

Si noti che se  $v$  è piccolo rispetto alla velocità  $V$  della luce, il termine quadratico  $v^2/V^2$  è trascurabile, sicché in definitiva da (2), se  $dl_0^2$  ha forma ortogonale:

$$T_{00} = V^2/c^2 \cdot \eta, \quad T_{01} = -\eta v/V, \quad T_{ii} = -pg_{ii} \quad (i = 1, 2, 3); \\ T_{02} = T_{03} = T_{12} = T_{13} = T_{23} = 0.$$

3. TENSORE GRAVITAZIONALE. — Riferendosi alle coordinate polari dello spazio (o geografiche)  $\rho, \vartheta, \varphi$  ( $\rho$  = raggio vettore,  $\vartheta$  = longitudine,  $\varphi$  = co-

latitudine) l'elemento di linea di spazio geometrico prende la forma:

$$dl_o^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

quindi l'elemento lineare quadridimensionale diventa il seguente:

$$(3) \quad ds^2 = V^2 dt^2 - e^{f(t)} (dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2) (1 + r^2/4 R^2)^{-2}.$$

Calcolando da (3) i simboli di Christoffel e quelli di Riemann, possiamo ottenere le componenti del tensore di Einstein  $G_{ik}^{(2)}$ , e quindi il tensore inerziale  $A_{ik} = G_{ik} - \frac{1}{2} G g_{ik}$ ;  $G = \sum_i G_i^i$ . Si ottiene così con calcoli laboriosi ma concettualmente semplici, che tutte le componenti  $A_{ik}$  del tensore inerziale sono nulle meno le seguenti:

$$A_{00} = -3 g^{11} (0101) - \frac{1}{2} G g_{00}; \quad A_{01} = -2 g^{22} (2021);$$

$$A_{33} = \sin^2 \vartheta A_{22} = r^2 \sin^2 \vartheta A_{11}$$

$$A_{11} = -g^{00} (0101) - 2 g^{22} (1212),$$

essendo

$$G = -6 g^{00} g^{11} (0101) - 6 g^{11} g^{22} (1212).$$

4. EQUAZIONI GRAVITAZIONALI. — Richiamo ora le equazioni gravitazionali di Einstein

$$(4) \quad A_{ik} + \lambda g_{ik} + \chi T_{ik} = 0$$

dove  $\chi$  è una costante universale ed uguale ad  $\frac{8\pi f}{c^4}$  ( $= 2 \cdot 10^{-48}$ ) con  $f$  costante di attrazione newtoniana e  $c$  velocità della luce nel vuoto;  $\lambda$  dipende dal fenomeno a grandissima distanza dal luogo considerato ed è detta costante cosmica;  $\lambda g_{ik}$  dicesi termine cosmico.

Ora da (4) sostituendo i valori trovati si ottengono cinque equazioni di cui tre però non sono linearmente indipendenti, quindi in definitiva rimangono le tre seguenti equazioni indipendenti:

$$(5) \quad \begin{cases} r \dot{f} R^{-2} (1 + r^2/4 R^2)^{-2} = \chi \eta v \\ \frac{3}{R^2} e^{-f} + \frac{3}{4 V^2} \dot{f}^2 = \lambda + \chi \eta \\ \frac{3}{R^2} e^{-f} + \frac{3}{4 V^2} \dot{f}^2 + \frac{1}{V^2} \ddot{f} = \lambda - \chi \dot{p}. \end{cases}$$

(1) T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, 1928.



Il punto denotando derivazione rispetto al tempo  $t$ .

Osserviamo anzitutto che la seconda equazione coincide con una di quelle ottenute nella soluzione dinamica caratterizzata dalla (1) salvo lo scambio della costante  $c$  con  $V$  velocità della luce funzione del posto. La terza equazione invece differisce non solo per lo scambio di  $c$  con  $V$  ma anche per il coefficiente di  $e^{-f}$ . Ed è naturale che questo coefficiente risulti diverso, perchè mentre nel caso dinamico prima ricordato, ponendo la funzione del tempo  $f(t) = 0$  si deve ottenere la soluzione di Einstein (infatti per tale posizione l'elemento lineare dinamico diviene quello statico di Einstein) nel caso nostro, con la stessa posizione, si deve ottenere la soluzione di De-Sitter. Così ponendo la funzione  $f(t) = 0$  si ha:

$$v = 0 \quad ; \quad 3 R^{-2} = \chi \eta + \lambda \quad ; \quad 3 R^{-2} = \lambda - \chi p.$$

Quindi dalle ultime due relazioni ricordando che  $\eta = c^2 \mu - p$  si ha  $\mu = 0$ , esattamente come vuole la soluzione statica di De-Sitter.

Dalle (5) si vede come la soluzione del problema dinamico in esame non sia possibile se non assegnando  $\eta$  (densità di energia), oppure  $p$  (pressione di radiazione) in funzione del tempo  $t$  (ad esempio assegnando la densità di energia dell'Universo in ogni istante). Ora questo non è possibile mediante l'esperienza e solo possiamo fare delle ipotesi dando l'una o l'altra delle due funzioni incognite.

5. SOLUZIONE IN SECONDA APPROSSIMAZIONE. — Consideriamo ora la funzione *a priori* incognita  $f(t)$  e sviluppiamola in serie di potenze in  $t$ :  $f(t) = kt + ht^2 + \dots$  ( $k, h$  essendo costanti molto piccole). Osservo poi che il tempo nei riguardi dell'esistenza dell'Universo assume valori assai elevati, e d'altra parte i tempi che noi possiamo considerare, anche per i più elevati valori che si possono assumere, sono sempre molto piccoli in rapporto ai primi. Inoltre nei riguardi del lontanissimo passato e anche futuro, non si potrebbe altro che azzardare delle ipotesi, cosicchè conviene limitarci ai tempi a noi più vicini. Possiamo quindi nello sviluppo di  $f(t)$  trascurare i termini che contengono le potenze di  $t$  superiori alla II per modo che  $e^{f(t)} = 1 + kt + (k^2/2 + h) t^2$ .

Sostituendo in (5) si vede come il raggio  $R$  dell'Universo sia perfettamente noto, una volta che l'esperienza ci abbia fornito il valore delle costanti  $h, k$  nonchè di  $\eta$  (densità di energia), oppure  $p$  (pressione di radiazione); così pure possiamo avere  $v$  velocità effettiva di insieme come funzione perfettamente nota di  $r, t$ . Si ha poi che lo spazio geometrico caratterizzato da (3) per  $dt = 0$  (sempre nell'approssimazione considerata) si espande o si contrae secondo il segno delle costanti  $h, k$ . In base all'esperienza, dette costanti risultano positive cosicchè l'Universo appare in istato di espansione.

Da (5) si può anche vedere facilmente come in prima approssimazione, cioè identificando  $f(t)$  con  $kt$ , l'Universo in esame risulti vuoto di materia

( $\mu = 0$ ) esattamente come vuole la soluzione statica di De Sitter. Ciò vuol dire che la densità di materia (che non è certamente nulla), è però molto tenue nell'ordine dei problemi considerati.

6. SPOSTAMENTO DELLE RIGHE SPETTRALI. — In un Universo in dette condizioni dovrà osservarsi uno spostamento verso il rosso delle righe spettrali per la luce proveniente dai punti più remoti, come ad esempio dalle Nebule extragalattiche? *A priori* si può dire che tale spostamento, interpretato come effetto Döppler, sarebbe dovuto non soltanto alla curvatura dell'Universo e quindi ad una apparente velocità di fuga delle Nebule, ma anche ad una vera e propria velocità variabile con la distanza stessa. Calcoliamo quindi il rapporto  $\delta\nu/\nu$ . Dalla nota relazione  $\lambda\nu = V$  ( $\lambda$  = lunghezza d'onda,  $V$  = velocità della luce variabile da posto a posto), differenziando si ottiene:

$$\delta\nu/\nu = \delta V/V - \delta\lambda/\lambda.$$

Ma una lunghezza  $L$  varia da luogo a luogo come risulta dalla relazione

$$dL = [1 + kt/2 + (k^2/8 + b/2)t^2] [1 + r^2/4 R^2]^{-1} dr$$

quindi

$$\delta\nu/\nu = \delta V/V - \delta dL/dL.$$

Conveniamo di porre il tempo  $t = 0$  nell'istante in cui un osservatore posto in un luogo dove  $r = 0$  (es. sulla terra) osserva la luce proveniente da un punto a distanza  $r$  (es. sopra una Nebula) e assumiamo  $t = t_0$  l'istante in cui avviene il fenomeno dell'emissione del raggio luminoso. Ammettendo poi che per due fenomeni identici nello stesso istante le lunghezze siano indipendenti dal posto, avremo:

$$(6) \quad \frac{\delta\nu}{\nu} = \frac{V(r, t) - V(0, 0)}{V(0, 0)} - \frac{dL(0, t) - dL(0, 0)}{dL(0, 0)}$$

Poichè per un raggio luminoso è

$$ds = 0 \quad ; \quad V dt = e^{\frac{1}{2}(kt + ht^2)} \cdot [1 + r^2/4 R^2]^{-1} dr.$$

Da cui integrando (sempre nell'approssimazione considerata) otteniamo:

$$t = \frac{r}{c} + \left( \frac{k}{4c^2} + \frac{b}{kc^2} \right) r^2.$$

Quindi da (6)

$$(7) \quad \frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{k}{2c} r - \left( \frac{k}{4c^2} + \frac{1}{2R^2} + \frac{b}{c^2} \right) r^2.$$

Ricordando poi la relazione tra la frequenza di radiazione e la velocità  $W$  della sorgente che lo emette  $\nu' = \nu \left(1 - \frac{W}{c}\right)$ , si ottiene in definitiva:

$$(8) \quad W = \frac{k}{2} r - \left( \frac{k^2}{4c} + \frac{c}{2R^2} + \frac{b}{c} \right) r^2.$$

Dunque nell'Universo in esame dovrà verificarsi uno spostamento verso il rosso delle righe spettrali corrispondenti a radiazioni emesse dai punti più remoti. Così le Nebule appaiono come dotate di una velocità di retrocessione variabile con la distanza e precisamente con la legge parabolica data da (8).

**Meccanica.** — *Influenza di piccole viscosità di un fluido nella determinazione della pressione in regioni singolari.* Nota di M. PASTORI, presentata dal Corrisp. U. CISOTTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Astronomia.** — *Risultati della nuova determinazione di longitudine dell'asse della « Torre Senatoria del Campidoglio » e della « Torre del Primo Meridiano d'Italia a Monte Mario ».* Nota di L. GIALANELLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

1. *Generalità.* — La seconda campagna di operazioni mondiali di longitudine, seguita alla prima del 1926 per cercare principalmente una verifica alle ipotesi di Wegener sulla deriva dei continenti e di Vening Meinesz sui piegamenti sottomarini al largo delle coste, importanti entrambe una variazione (periodica o no) delle coordinate geografiche dei diversi luoghi della Terra <sup>(2)</sup>, ha avuto luogo — com'è noto — nell'ottobre-novembre 1933 e fu organizzata, come la precedente, dall'Unione Astronomica e dall'Associazione Geodetica Internazionale. Ad essa doveva partecipare, tra gli altri Osservatori Astronomici italiani, anche quello romano del Campidoglio. A tale scopo il Direttore, prof. G. Armellini, ebbe in prestito dalla R. Commissione Geodetica Italiana il complesso radio-ricevente che mancava tra gli strumenti dell'Osservatorio Capitolino. E in effetti ci venne inviato dal Gabinetto di Geodesia della R. Università di Bologna un apparecchio « Ducati » a 12 valvole, appositamente studiato e costruito per la ricezione e registrazione diretta dei segnali radio ad onde lunghissime (18000-19000 m.) delle

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) Cfr. L. GIALANELLA, *Il problema della variazione delle longitudini terrestri*. « Rend. del Seminario Matematico della R. Università di Roma », 1935.

tre stazioni europee di Rugby, Nauen e Bordeaux. Ma, sia per il ritardo con cui il detto apparecchio arrivò a Roma, e sia per il bisogno che ebbe, non appena arrivato, di una completa revisione, per cui fu necessario l'intervento sul posto dello stesso costruttore Ducati di Bologna, non fu possibile iniziare le osservazioni nell'autunno 1933.

Questo imprevisto contrattempo, però, non fece mutare al Direttore dell'Osservatorio il progetto di intraprendere la determinazione di longitudine, la quale doveva, oltre tutto, servire anche a collegare alla rete internazionale — per mezzo di una operazione condotta con metodi e strumenti moderni — quel « Caposaldo Capitolino », già studiato da Respighi, Reina, Di Legge, e che, per una fortunata coincidenza, si trova a soli pochi metri di distanza dall'antico *Umbilicus Urbis Romae*: e cioè dal caposaldo geodetico della Roma Imperiale, che costituiva il centro del Grande Impero e l'origine donde si contavano le distanze sulle vie consolari.

Contemporaneamente, l'operazione doveva determinare — servendosi di una precedente triangolazione della città di Roma fatta dal Reina — il nuovo e più recente valore della longitudine da Greenwich del punto trigonometrico di Monte Mario, il quale fin dal secolo scorso era stato prescelto — su proposta dello Schiaparelli — quale origine delle coordinate geografiche dei vertici della rete italiana. Per questo fine lo Schiaparelli, allora Presidente della R. Commissione Geodetica Italiana, volle che se ne determinasse la longitudine rispetto agli Osservatori Astronomici di Milano, di Napoli e di Padova, già sicuramente connessi alla rete delle longitudini europee. Si ebbero così le determinazioni di longitudine fra l'Osservatorio di Padova e Monte Mario nel 1906; fra l'Osservatorio di Brera (Milano) e Monte Mario nel 1907; fra l'Osservatorio di Capodimonte (Napoli) e Monte Mario nel 1909. Ma fino ad ora mancava una determinazione più recente, eseguita con i metodi moderni della radiotelegrafia, che collegasse la *Torre del Primo Meridiano d'Italia a Monte Mario* direttamente con altri Osservatori europei ed extra-europei, e principalmente con quello di Greenwich, dal cui meridiano hanno origine le longitudini mondiali.

Per tali ragioni decidemmo di effettuare questa nuova determinazione di longitudine, la quale è stata eseguita per intero — sia per quel che riguarda le osservazioni astronomiche e sia per quel che riguarda la ricezione e la registrazione dei segnali radio — dallo scrivente, sotto la guida e il controllo del Direttore dell'Osservatorio. Essa si è svolta nel periodo tra il 9 giugno e il 12 luglio 1934, comprendendo in tutto 18 serate di osservazioni stellari per la determinazione della correzione dell'orologio e 31 giornate di ricezione di segnali radio-telegrafici.

In questa Nota do una breve relazione dell'operazione astronomico-geodetica da me eseguita e riferisco i risultati definitivi ottenuti. Il lavoro più esteso, comprendente tutte le tabelle, i dettagli delle osservazioni e dei calcoli, gli errori medi, ecc., è in corso di pubblicazione in altra sede.



2. *Le osservazioni astronomiche.* — Lo strumento che ho adoperato per le osservazioni stellari è stato il « Bamberg » meridiano del R. Osservatorio del Campidoglio, grande modello, n. 11676, a cannocchiale spezzato, di 89 mm. di apertura e m. 0.95 circa di distanza focale, con ingrandimento di 120, a cui corrisponde una sensibilità di 0".500. Esso era installato nella sua solita cupola, interamente apribile, insieme con il cronografo a secco « Cavignato » a tre punte, una delle quali registrava i segnali del pendolo siderale Kobell ad asta invar di Riefler e fornito di compensatore barometrico della medesima casa Riefler.

Il « Bamberg » era munito di micrometro impersonale mosso a mano, del quale, avanti di iniziare le osservazioni stellari di tempo e durante il corso delle osservazioni stesse, ho avuto cura di eseguire uno studio dettagliato determinandone ripetutamente i valori delle costanti. La sensibilità della grande livella orizzontale sospesa all'asse di rotazione era stata già altre volte determinata; tuttavia, durante il corso delle osservazioni, essa è stata nuovamente da me controllata mediante il nostro misuratore di livelle della medesima casa Bamberg.

I valori delle costanti che ho adottato sono i seguenti:

Parte di livella . . . . .	0".085
Passo della vite micrometrica . .	7.563
Valore di una divisione . . . . .	0.076
Semicon tatto e passo morto . . .	0.035

La correzione per il semicon tatto e passo morto è stata conglobata con quella per l'aberrazione diurna meridiana K, calcolata mediante la formula:

$$K = \mp 0^s.0213 \cos \varphi \sec \delta = \mp 0^s.0159 \sec \delta \text{ (1)}$$

onde ho ottenuto come correzione totale in  $\sec \delta$  i valori:

$C_{\sec \delta} = + 0^s.0140 \sec \delta$	per le culminazioni superiori
$C_{\sec \delta} = + 0^s.0512 \sec \delta$	per le culminazioni inferiori.

Ho scelto le stelle tra le fondamentali del *Nautical Almanac*: il programma stellare comprendeva 38 orarie e 12 polari distribuite in sei ore di ascensione. Le osservazioni han durato generalmente dalle ore venti ad oltre la mezzanotte, in maniera da comprendere in mezzo il gruppo principale dei segnali orari serali delle stazioni europee di Rugby, Bordeaux, Parigi, Nauen. Le stelle osservate, nelle sere non ostacolate da nubi, sono state in media una ventina di cui quattro polari per la determinazione dell'azimut. Ho sempre osservato ogni stella nelle due giaciture E e W dell'oculare, accompagnan-

(1) La latitudine del pilastro adottata è stata  $\varphi = + 41^{\circ} 53' 33'' .3$ .



dola - in ognuna - per almeno tre rivoluzioni del tamburo del micrometro autoregistratore, di guisa che ogni passaggio stellare è stato basato sopra almeno trenta appulsi doppi corrispondenti. *Complessivamente ho osservato 289 stelle, il che ha comportato il rilievo, sulle strisce cronografiche, di oltre diciottomila punti.* Per ogni stella, ho letto la livella avanti l'inizio dell'osservazione e subito dopo la fine a rovesciamento eseguito.

Per le riduzioni delle osservazioni stellari ho impiegato la formula di Mayer, introducendovi le ascensioni rette apparenti dedotte dal *Nautical Almanac* con interpolazione per differenze seconde e tenendo conto dei termini lunari di lungo e corto periodo. Ho quindi dedotto le correzioni serali dell'orologio Kobell dalla media delle stelle orarie, tenendo conto dell'andamento orario del pendolo durante il corso delle osservazioni. *Ho poi trasformato queste correzioni, espresse in tempo siderale vero (T. S. V.) in tempo siderale uniforme (T. S. U. = T. S. V. - nutazione in ascensione retta), ed infine ho ottenuto la determinazione degli andamenti del pendolo, e quindi delle sue correzioni corrispondenti agli istanti della ricezione dei segnali radio, mediante una rappresentazione grafica delle correzioni serali del pendolo stesso.*

3. *I segnali orari.* - Come ho già accennato, il complesso ricevente «Ducati» era appositamente studiato e costruito per la ricezione e la registrazione dei segnali ad onde lunghissime delle tre stazioni fondamentali: *Rugby* (GBR, m. 18740), *Nauen* (DFY, m. 18130) e *Bordeaux* (FYL, m. 19100). Su queste tre stazioni, pertanto, ho fondato in modo principale la mia determinazione di longitudine, ed esse ho ricevuto e registrato normalmente, ognuna nella duplice emissione giornaliera, eccettuata la trasmissione mattutina di *Bordeaux* delle 8<sup>h</sup> (T. U.).

Il prof. Armellini ha voluto però dare alla determinazione di longitudine una base più larga di quella permessa dal «Ducati», e per questo ha approfittato della gentile concessione dell'Ammiraglio prof. Pession, Direttore generale al Ministero delle Comunicazioni, per far collegare con un filo telegrafico diretto i nostri impianti di registrazione al Campidoglio con la stazione ricevente dell'*Italo-Radio*, posta nelle immediate vicinanze di Roma (Malnome-Radio, Ponte Galera). Mi è stato così possibile ricevere e registrare anche i segnali di altre stazioni europee ed extra-europee trasmittenti su onde lunghe e lunghissime, e precisamente: *Parigi-Torre Eiffel* (FLE, m. 2650), *Mosca-Radiocentro* (RAI, m. 7700), *Leningrado-Detskoië Selo* (RET, m. 3800), *Saigon* (FZA, m. 15900) e *Buenos Ayres* (LOL, m. 1053). La ricezione e la registrazione di questa seconda categoria di segnali è stata in generale altrettanto buona quanto la prima, ma naturalmente ho trattato a parte le longitudini dedotte. Delle stazioni di *Rugby*, *Nauen* e *Bordeaux* ho registrato, di regola, entrambe le serie di segnali, e cioè sia quelli ricevuti direttamente e sia quelli ricevuti per mezzo dell'*Italo-Radio*.

In riassunto, i *segnali orari ritmici* che ricevevo erano i seguenti:

Nome della Stazione		Ora (T. U.)
Parigi-Torre Eiffel	(FLE, m. 2650)	9 <sup>h</sup> 31 <sup>m</sup> — 9 <sup>h</sup> 36 <sup>m</sup>
Rugby	(GBR, m. 18740)	9 55 — 10 00
Buenos Ayres	(LOL, m. 1053)	11 45 — 11 50
Nauen	(DFY, m. 18130)	12 01 — 12 06
Mosca	(RAI, m. 7700)	16 01 — 16 06
Rugby	(GBR, m. 18740)	17 55 — 18 00
Saigon	(FZA, m. 15900)	19 00 — 19 05
Bordeaux	(FYL, m. 19100)	20 01 — 20 06
Leningrado	(RET, m. 3800)	22 01 — 22 06
Parigi-Torre Eiffel	(FLE, m. 2650)	22 31 — 22 36
Buenos Ayres	(LOL, m. 1053)	23 45 — 23 50
Nauen	(DFY, m. 18130)	24 01 — 24 06

La registrazione dei segnali era fatta con un cronografo Cavignato a tre penne. Di queste, la centrale serviva per registrare i segnali del pendolo siderale Kobell e le altre due, rispettivamente: i segnali radio del « Ducati » e gli impulsi del micrometro l'una; i segnali dell'*Italo-Radio* l'altra. I segnali del « Ducati » erano di potenza sufficiente da poter essere inviati direttamente al cronografo, senza l'intervento di *relais* intermediari, i quali possono essere causa di errori e ritardi a volte imponderabili, perchè di natura variabile<sup>(1)</sup>. Attraverso lo stesso circuito di questi segnali venivano fatti passare anche gli impulsi dal micrometro autoregistratore adoperato per le osservazioni stellari, ed un opportuno strumento di misura ed una resistenza variabile inseriti in esso hanno permesso di mantenere, per quanto possibile, sullo stesso valore le intensità delle correnti inviate nel circuito nei due casi. Delle penne del cronografo determinavo ogni giorno la parallasse. Così pure, alla fine di ogni ricezione e registrazione dei segnali radio, determinavo il valore del ritardo dovuto al complesso ricevente e agli organi registratori, adoperando — col metodo suggerito da R. Jouaust e consigliato dalla Unione Geodetica Internazionale<sup>(2)</sup> — la linea lunga con cui terminava ogni serie di segnali ritmici. E ciò sia per i segnali ricevuti direttamente dal « Ducati » e sia per quelli ricevuti per mezzo dell'*Italo-Radio*; di modo che mi è stato possibile valutare — da quelle registrazioni eseguite contemporaneamente — il *ritardo relativo medio* dei due distinti complessi riceventi. Tale valore, applicato ai segnali ricevuti unicamente per mezzo dell'*Italo-Radio*, mi ha permesso di impiegare, nella conclusione della longitudine, tali

(1) Cfr. F. MOREAU et J. VERBAANDERT, *La suppression des relais électromagnétiques en astronomie méridienne*. « Bulletin de l'Observatoire de Uccle », vol. II, n. 4.

(2) Cfr. « Bulletin Géodésique », 1933.

segnali alla medesima stregua di quelli ricevuti direttamente (pur restando — nel risultato — distinte le due serie).

Per tener conto poi anche dei ritardi dovuti alla *propagazione delle onde radioelettriche*, ho calcolato le distanze delle otto stazioni trasmittenti da Roma e determinato le correzioni relative, adottando come velocità apparente delle onde lunghe quella di 240000 Km/sec. (R: Jouaust).

Per quel che riguarda infine il rilievo delle strisce cronografiche, ho letto generalmente dei gruppi di dodici segnali abbraccianti ciascuno dei tratti (segnali 62, 123, 184, 245) ed ho ricondotto al *primo* segnale i tratti 62, 123 e all'*ultimo* (306) i tratti 184, 245. In tal maniera, la media delle ore dei segnali 1 e 306 è risultata indipendente dall'intervallo di due tratti consecutivi forniti dalla registrazione quotidiana. Naturalmente, se la ricezione non ha permesso la registrazione di tutti i 306 segnali, ne ho rilevato il maggior numero possibile, sempre osservando però la condizione di simmetria di cui sopra.

*Complessivamente ho registrato circa 200 segnali radiotelegrafici, comportanti quindi il rilievo di circa diecimila punti, i quali, aggiunti ai diciottomila delle osservazioni stellari, fanno ascendere ad oltre ventottomila il numero dei punti che in totale ho dovuto rilevare dalle strisce cronografiche.*

4. *Conclusione delle longitudini.* — Per concludere il valore della longitudine (da Greenwich) del pilastro dell'istrumento dei passaggi Bamberg ho confrontato le ore di registrazione dei segnali 1 e 306 (determinate nel modo sopra detto) di ognuna delle emissioni delle otto stazioni da me ricevute (corrette di ogni ritardo: parallasse delle penne, ritardo degli amplificatori ed organi di registrazione, tempo di propagazione) con le ore dei medesimi segnali registrate in altri Osservatori (precisamente in quelli di Greenwich, Uccle, Paris-Bureau International de l'Heure, Tashkent, Amburgo) e pubblicate sia direttamente da questi Osservatori, sia nel *Bulletin Horaire*. Ove è stato necessario, ho convertito queste ore in *tempo siderale uniforme*, come pure ne ho corretto i tempi per la durata di propagazione delle onde radioelettriche, quando questa correzione non era stata già apportata dagli Osservatori.

Per eseguire poi le medie, ho attribuito ai segnali di ogni stazione un peso proporzionale al numero dei segnali della stazione ricevuti, tenendo distinte le longitudini ottenute a mezzo del « Ducati » da quelle ottenute a mezzo dell'*Italo-Radio*. I due valori, però, sono risultati sensibilmente identici. Invero, dai 381 valori ottenuti col « Ducati » ho ricavato, per la *longitudine del pilastro dello strumento dei passaggi Bamberg del R. Osservatorio del Campidoglio*, il valore:

$$\lambda = - 0^h 49^m 56^s.166,$$

mentre dai 414 valori ottenuti a mezzo dell'*Italo-Radio* ho trovato:

$$\lambda = -0^h 49^m 56^s.164;$$

onde ho assunta come longitudine definitiva, ottenuta da medie ponderate di 795 valori, il valore:

$$\lambda = -0^h 49^m 56^s.165.$$

Di questo valore mi sono servito per determinare la *longitudine* (da *Greenwich*) dell'asse della Torre centrale del Palazzo Senatorio (Torre Capitolina), giacchè da rilievi da me fatti è risultato che quest'asse è spostato, rispetto al pilastro dello strumento Bamberg, di m. 26,90 verso ponente ( $\Delta\lambda = -0^s.077$ ) e di m. 9,95 verso Sud. Ho quindi ottenuto come valore della *longitudine dell'asse della Torre Capitolina*:

$$\lambda = -0^h 49^m 56^s.088.$$

D'altra parte, secondo una triangolazione eseguita precedentemente dal Reina sopra la città di Roma <sup>(1)</sup>, risulta che il punto trigonometrico di Monte Mario è spostato, rispetto all'asse della Torre Capitolina, di m. 2610,17 verso ponente ( $\Delta\lambda = -7^s.550$ ) e di m. 3484,05 verso Nord, onde ho infine per la *longitudine della Torre del Primo Meridiano d'Italia a Monte Mario* il valore:

$$\lambda = -0^h 49^m 48^s.538.$$

È interessante confrontare questo nuovo valore della longitudine Monte Mario-Greenwich con il valore della longitudine Milano (Brera)-M. Mario ricavata <sup>(2)</sup> nel 1907 ( $\lambda = -0^h 13^m 02^s.75$ ) e con il valore recentissimo della longitudine Milano (Brera)-Greenwich ottenuto in occasione dell'operazione internazionale <sup>(3)</sup> del 1933 ( $\lambda = -0^h 36^m 45^s.82$ ). Da questi valori risulterebbe per la longitudine M. Mario-Greenwich  $\lambda = -0^h 49^m 48^s.57$ , valore che si deve considerare in ottimo accordo con quello da me testè trovato, quando si tenga conto che la precedente determinazione di longitudine Roma-Milano rimonta al 1907.

(1) V. REINA, *Triangolazione della città di Roma*. «Rivista di Topografia e Catasto», 1896.

(2) V. REINA, E. BIANCHI, L. GABBA, G. A. FAVARO, *Differenza di longitudine Milano (Brera) e Roma (Monte Mario) determinata nel 1907*. Si veda anche: *Travaux de l'Association de Géodésie*. Tome 12, 1935.

(3) Pubblicazioni del R. Osservatorio di Milano, n. LXIII.

**Astronomia.** — *Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934.* Nota II di G. L. ANDRISSI, pres. dal Socio G. ARMELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

E. BIANCHI. — Commemorazione dell'astronomo dalmata RUGGERO BOSCOVICH.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.



## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio BIANCHI pronuncia un'alta ed elevata commemorazione dell'Astronomo dalmata *Ruggero Boscovich*, fondatore della Specola di Brera ed illustre fra gli Astronomi del secolo XVIII.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio LEVI-CIVITA, anche a nome del Collega AMALDI, espone la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di I. Barta « Sulla risoluzione del problema di Dirichlet per il cerchio e per la sfera ».

L'Assemblea approva.

Il Socio ARMELLINI, anche a nome del Collega ALESSIO, legge la relazione con la quale si propone la stampa della Memoria di Massimo Vanni su « I sistemi di coordinate locali. Considerazioni sulla determinazione del punto nave astronomico mediante osservazioni simultanee del medesimo astro. Luoghi geometrici e linee di posizioni ».

L'Assemblea approva.

## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio BIANCHI presenta in omaggio all'Accademia la pubblicazione n. 8 della R. Specola di Merate ed il Contributo n. 23 della stessa con le seguenti parole:

« La prima è un lavoro dei dottori Gratton e Krüger di statistica stellare e concerne la distribuzione delle grandezze assolute per le stelle di tipo G (da  $F_8$  a  $G_5$ ). La ricerca è basata sui moti propri, sulle velocità radiali, nonchè sulle parallassi trigonometriche; meglio: sul confronto fra la distribuzione dei moti propri e quella delle velocità radiali per le supergiganti e giganti e sulle parallassi trigonometriche per le stelle nane.

« Senza dilungarmi troppo in minuti dettagli circa i diversi risultati della ricerca, riferisco quello che, ai fini cosmogonici e pratici ha forse maggiore importanza e che è tanto più degno di rilievo in quanto risulta in perfetto accordo con uno analogo ottenuto in passato dal dott. Gratton, studiando le stelle di tipo K.

« Può essere così enunciato: la funzione di luminosità finale trovata nella presente ricerca pare non dia luogo a nessun minimo di frequenza (si intende nelle grandezze assolute) fra le stelle giganti e le nane.

« Questa conclusione fa subito pensare al famoso diagramma di Russel esprimente l'andamento delle grandezze assolute in funzione dei tipi spettrali; diagramma sino ad ora sempre interpretato come avente un tratto unitario dai primi tipi spettrali sino circa il tipo F e di là in poi due diramazioni man mano sempre più divergenti, relative rispettivamente alle stelle nane ed alle giganti.

« Già nel 1925 Van Rhijn aveva avanzata l'ipotesi che il vuoto fra le due ramificazioni ora dette nel diagramma di Russel null'altro fosse che un effetto di selezione statistica nella distribuzione delle stelle, cioè delle parallassi trigonometriche usate; ma solo ora, vale a dire coi dati moderni relativi a moti propri, velocità radiali e parallassi, è stato possibile mettere queste ricerche su basi meno limitate e più sicure; e poichè per le stelle K e per le G siamo nella regione del diagramma russelliano, in cui dovrebbe apparire evidente ed ormai accentuata la lacuna fra nane e giganti, il fatto che ciò non trovi conferma ed il fatto altresì che non vi sono ragioni fisiche perentorie per accedere alla concézione delle due classi separate di nane e giganti, induce forse ad una radicale revisione delle nostre idee, appunto circa il succedersi delle grandezze assolute coi tipi spettrali, nel senso che forse bisognerà pensare il diagramma russelliano come costituito da una fascia unitaria che parte dai primi tipi con una dispersione limitata (ma sempre di circa 4 grandezze stellari però) e prosegue poi dal tipo F in giù con dispersione sempre maggiore abbracciante le stelle che oggi chiamiamo nane e quelle dette giganti.

« La presente ricerca dà poi cenno sicuro, e quindi nuova conferma, della esistenza di stelle supergiganti per tutti i tipi spettrali, in numero limitato, e tutte poste fuori della fascia or ora accennata.

« Non è chi non veda la enorme importanza di tutto ciò anche ai fini della definizione dei criteri spettroscopici su cui basare la deduzione delle parallassi spettroscopiche.

« Il Contributo astronomico n. 23 dà un primo riassunto delle osservazioni spettrofotometriche fatte dagli astronomi Cecchini e Gratton sulla nova 605 Lacertae 1936, limitate per questo primo lavoro ad alcuni dei molti spettrogrammi ottenuti con il Riflettore di Merate.

« Vi si indaga circa le variazioni del tipo spettrale, circa le forti velocità radiali negative dovute al moto di espansione dell'atmosfera della stella durante il cataclisma che la dominò; circa la temperatura di colore, i profili delle bande dell'idrogeno ecc. ecc.

« Si riserva ad una Memoria ulteriore la elaborazione definitiva di tutto il materiale raccolto ».

L'Accademico Segretario aggiunto prof. AMALDI presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando l'insieme dei lavori pubblicati dall'Istituto Nazionale per lo Studio del cancro dietto dal Socio RONDONI; le « Leçons sur la Théorie des Espaces a Connexion Projective » del Socio Straniero ELIA CARTAN; l'opuscolo « Sur le Groupes de Transformations Analytiques » di ENRICO CARTAN; e lo studio di Giovanni Villey sulle « Proprietà generali dei fluidi motori ».

#### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione nei « Rendiconti » i Soci ARMELLINI, BLANC, BOMPIANI, GIORGI, LEVI-CIVITA, SEVERI.

#### PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il PRESIDENTE comunica che è giunto all'Accademia un plico suggellato dell'ing. Roberto Gualtieri, e assicura che tale plico sarà conservato, secondo la consuetudine, a disposizione dell'autore negli Archivi dell'Accademia.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta del 7 marzo 1937*

---

- ANTONIANI C. e BUCALOSSI P. — Scissione dell'acido fosfoglicerico in acido fosforico ed acido piruvico per azione enzimatica dei tumori mammari, in vitro. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. IV-V). Milano, 1936. 8°, pp. 1-11.
- ASTUNI ANTONINO. — Sul contenuto in fosfatasi del plasma di portatori di tumori con metastasi ossee (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. III). Milano, 1936. 8°, pp. 1-19.
- ASTUNI ANTONINO. — Tumori maligni e capacità lavorativa. (Estr. dagli «Atti del VI Congresso Nazionale di Medicina legale». Milano, ottobre 1935). Cuneo, 1936. 8°, pp. 1-12.
- BORGHETTI UMBERTO. — Il comportamento della soglia elettrolitica del siero (reazione di Weltmann) nei cancerosi. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. II). Milano, 1936. 8°, pp. 1-38.
- BORGHETTI UMBERTO. — Il rosso Congo virato al bleu in ambiente acido nella determinazione della massa di sangue e nello studio delle curve di eliminazione del colore. (Estr. dalla «Rivista mensile Diagnostica e Tecnica del Laboratorio». 1935). Napoli, 1935. 8°, pp. 1-3.
- BORGHETTI U. e NATALE P. — Sulla differenziabilità del siero canceroso dal siero gravidico. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. IV-V). Milano, 1936. 8°, pp. 1-9.
- BORI DOMENICA VITTORIA. — Del comportamento respiratorio nell'orecchio del coniglio inoculato con olio rosso-scarlatto. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. II). Milano, 1936. 8°, pp. 1-10.
- BUCALOSSI P. — Vedi ANTONIANI C.
- CACCIA GIACINTO. — Granulomi sperimentali da farina fossile in trattamento combinato con Prolan. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. I). Milano, 1936. 8°, pp. 1-20.
- CARDILLO FURIO. — Primi risultati della irradiazione Röntgen a breve distanza focale (plesioröntgenterapia). (Estr. da «La Radiologia Medica». Vol. XXIII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-28.
- CARMINATI V. — Vedi RONDONI PIETRO.
- CARTAN E. — Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. 1-VI, 1-305.
- CARTAN HENRI. — Sur les groupes de transformations analytiques. (Exposés mathématiques publiés à la mémoire de Jacques Herbrand). Paris, Editeurs Hermann et C<sup>ie</sup>, 1935. 8°, pp. 1-53.
- CATTABENI C. M. — Linfangioma del cervello (Segnalazione anatomo-chimica). (Estr. da «Tumori». Anno XXII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-12.
- CATTABENI C. M. — Neoplasie linfoghiandolari di incerta classificazione (contributo alla conoscenza dei tumori reticolo-istiocitari). (Estr. da «Tumori». Anno XXI, fasc. II). Milano, 1936. 8°, pp. 1-28.
- CLEMENTI FILIPPO. — Il R. Istituto Tecnico Commerciale Duca degli Abruzzi

- di Roma. 1902-1936. Roma, 1936. 4°, 1-109.
- CORBELLINI A. — Vedi RONDONI PIETRO.
- DEOTTO ROMOLO. — Del comportamento respiratorio di tessuti sottoposti a. trattamento cancerizzante. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. I). Milano, 1936. 8°, pp. 1-31.
- DISTEFANO GIOACCHINO. — Emangio-endotelioma tiroideo sorto su un gozzo adenomatoso necrotico emorragico. (Estr. da «Atti e Memorie della Società lombarda di Chirurgia». Vol. IV). Milano, 1936. 8°, pp. 1-11.
- DISTEFANO GIOACCHINO. — Il cancro ex ulcera dello stomaco. (Estr. dall'«Archivio italiano di Chirurgia». Vol. XLIV). Bologna, 1936. 8°, pp. 1-82.
- DISTEFANO GIOACCHINO. — Istogenesi e classificazione dei rabdomiomi benigni e maligni. (Estr. da «Tumori». Anno XXII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-22.
- DONATI MARIO. — Tecnica dell'esceresi chirurgica delle metastasi cervicali nel trattamento radio-chirurgico dei cancri bucco-faringeo. (Estr. da «Atti e Memorie della Società lombarda di Chirurgia». Vol. IV). Milano, 1936. 8°, pp. 1-14.
- DONIZETTI GIUSEPPE. — Il trattamento radiologico dei tumori maligni faringo-laringei. (Estr. da «La Radiologia Medica». Vol. XXIII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-15.
- EISEN MILTON J. — A bacteriological Study of mouse Tumours. (Reprinted from the «American Journal of Cancer». Vol. XXVIII, pp. 512-521). Baltimore, 1936. 8°.
- EISEN MILTON J. — Adenoma spontaneo della ghiandola prepuziale nel topo. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. III). Milano, 1936. 8°, pp. 1-11.
- EISEN MILTON J. — Research of antibodies (agglutinis) in fibronogen and fibren. (Estr. dal «Giornale di batteriologia e immunologia». Vol. XVII). Torino, 1936. 8°, pp. 1-7.
- FANTOLI GAUDENZIO. — Inaugurazione del II corso per dirigenti di aziende (R. Politecnico di Milano). Milano, 1936. 8°, pp. 1-42.
- GALLAVRESI LUIGI. — Il fattore tempo in radioterapia (Atti del XII Congresso italiano di radiologia medica. Vol. I, fasc. IV). Venezia, 1936. 8°, pp. 1-149.
- GENTILE FRANCESCO. — Sull'ascite cancerosa trapiantabile del topo. Ricerche sperimentali (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. VI). Milano, 1936. 8°, pp. 1-20.
- GOOCH MARJORIE. — Vedi PEARL RAYMOND.
- GOULD SOPHIA A. — Vedi PEARL RAYMOND.
- HUBBLE EDWIN. — The realm of the Nebulae. New Haven, 1936. 8°, pp. I-XII, 1-210.
- LACROIX ALFRED. — Notice historique sur les cinq de Jussieu membres de l'Académie des Sciences (1712-1853). (Académie des Sciences de l'Institut de France). Paris, 1936. 4°, pp. 1-97.
- LANGER ALESSANDRO. — La digeribilità delle cellule normali e neoplastiche per parte della papaina. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. IV-V). Milano, 1936. 8°, pp. 1-11.
- LANGER ALESSANDRO. — La digeribilità di cellule normali e neoplastiche per parte della tripsina. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. III). Milano, 1936. 8°, pp. 1-12.
- MAGLIO G. — Risultati finali della terapia attinica ed attinico-chirurgica in 357 casi di cancro primitivo del collo uterino. (Estr. dal volume «Nel trentennio di fondazione della R. Clinica ostetrico-ginecologica L. Mangiagalli di Milano»). Fidenza, 1936. 8°, pp. 1-15.
- MASERA ENRICO. — Le malattie infettive degli insetti e loro indice bibliografico. (R. Staz. Bacologica Sperimentale di Padova). Bologna, Editore Licinio Cappelli, 1936. 8°, pp. 1-343.
- MINER JOHN A. — Vedi PEARL RAYMOND.



- MORATTI ANTONIO. — Sull'interruzione artificiale del sistema circolatorio della milza. (Estr. dalla « Pratica chirurgica e delle discipline affini ». Vol. IV). Città di Castello, 1935. 8°, pp. 1-36.
- NATALE P. — Vedi BORGHETTI U.
- PAOLI GUIDO. — Alcune specie di Empoasca viventi in Egitto. (Hemiptera-Homoptera). (Extr. du « Bulletin de la Société royale Entomologique d'Égypte », pp. 144-151). Le Caire, 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Constitutional factors in diseases of the cardiovascular-renal system (26 th. annual Meeting medical Section American Life Convention white Sulphur Springs, West Virginia, June 11-13, 1936). s. l. 8°, pp. 1-28.
- PEARL RAYMOND. — Fertility and contraception in urban whites and Negroes. (Reprinted from « Science ». Vol. LXXXIII). s. l. 8°, pp. 1-8.
- PEARL RAYMOND. — Historical papers in the Journal « Human Biology ». (Reprinted from « Isis ». Vol. XXIV, pp. 415-418). Baltimore, 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Multiplying man (Reprinted from the « Yale Review », 1936, pp. 584-602). s. l. 8°.
- PEARL RAYMOND. — On the incidence of tuberculosis in the offspring of tuberculous parents. (Sonderabdruck aus « Zeitschrift für Rassenkunde ». Band. III, pp. 301-307). s. l. 8°.
- PEARL RAYMOND. — The Laboratory of Anatomy and physical Anthropology of Haward University. (Reprinted from the « Journal of Negro History ». October 1936, pp. 447-449). s. l. 8°.
- PEARL RAYMOND. — Third progress report on a study of family limitation. (Reprinted from the « Milrank Memorial Fund Quarterly ». Vol. XIV). Baltimore, 1936. 8°, pp. 1-27.
- PEARL RAYMOND. — War and Overpopulation. Baltimore, 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND and GOULD SOPHIA A. — World population growth. (Reprinted from the « Human Biology ». Vol. VIII, pp. 399-419). Baltimore, 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND and GOOCH MARJORIE. — Studies on constitution, IV endocrine organ weights and somatological habitus types. (Reprinted from « Human Biology ». Vol. VIII, pp. 92-125). Baltimore, 1936. 8°.
- PEARL RAYMOND and MINER JOHN R. — Life tables for the pecan nut case bearer, *Acrobasis caryae* Grote. (Mélanges Paul Pelsenéer). (Extr. des « Mémoires du Musée Royal d'Histoire Naturelle de Belgique ». Série II, fasc. III, pp. 169-184). Bruxelles, 1936. 8°.
- PENNEY J. T. — Vedi WILSON H. V.
- PERUSSIA FELICE. — La roentgenerapia prolungata ad alte dosi frazionali nell'economia di esercizio di un grande Istituto del cancro. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-8.
- PERUSSIA FELICE. — Röntgendiagnosi e Radioterapia dei tumori secondari delle ossa. (Estr. dagli « Atti dell'Accademia Medica Lombarda ». Vol. XXV). Milano, 1936. 8°, pp. 1-23.
- PERUSSIA FELICE. — Spätergebnisse der Curietherapie kavernöser Angiome des Gesichtes von Kindan (Sonderabdruck aus « Strahlentherapie ». Band 57, pp. 109-120). Berlin, 1936. 8°.
- RATTI ARDUINO. — In tema di epatographia. (Estr. da « La Radiologia Medica ». Vol. XXIII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-20.
- RONDONI PIETRO. — Agenti cancerogeni di natura chimica ben definita. (Estr. dalla « Rivista biologica Medica ». Vol. XII). Milano, 1936. 8°, pp. 1-15.
- RONDONI PIETRO. — Critica dei recenti tentativi di sierodiagnosi e sierocitodiagnosi del cancro. (Estr. dalle « Relazioni del II Congresso Internazionale della lotta scientifica e sociale contro il cancro ». Tomo I, pp. 262-276). Bruxelles, 1936. 4°.
- RONDONI PIETRO — Le direttive attuali nello studio dei tumori maligni.

- (Estr. da «L'Attualità Medica». Anno I). Roma, 1936. 8°, pp. 1-4.
- RONDONI PIETRO. — Le métabolisme de la cellule cancéreuse. (Estr. de «Acta de l'Union Internationale contre le Cancer». Vol. I, pp. 50-66). Bruges, 1936. 4°.
- RONDONI PIETRO. — Metabolismo lipoidale nei tumori. (Publicado en el «Libro de oro, homenaje al prof. De Angel H. Roffo». Buenos Ayres, 1935. 8°, pp. 1-7).
- RONDONI PIETRO. — Oxydationsvorgänge Proteinaufbau und Wachstum. (Sonderabdruck aus «Leeuwenhoek-Vereeniging». 1935, pp. 178-199). Amsterdam, 1935. 8°.
- RONDONI PIETRO. — Relazione sull'attività dal 21 dicembre 1935 al 20 dicembre 1936 ed elenco delle pubblicazioni del 1936 dell'Istituto Naz. Vittorio Emanuele III per lo studio e la cura del cancro. Milano, 1937. 8°, pp. 1-30.
- RONDONI P. e CARMINATI V. — Sulla comparsa di sostanze estrogene in organi in vitro. (Estr. da «Atti e Memorie della Società lombarda di Chirurgia». Vol. IV). Milano, 1936. 8°, pp. 1-4.
- RONDONI P. e CARMINATI V. — Über das Auftreten von vestruserregenden Stoffen in Organen in vitro. (Sonderabdruck aus «Hoppe-Seyler's Zeitschrift f. physiolog. Chem.». 241 Bd, pp. 71-80). Berlin and Leipzig, 1936. 8°.
- RONDONI P. e CORBELLINI A. — L'azione cancerogena delle dibenzoacridine e l'ustione come fattore realizzante. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. I). Milano, 1936. 8°, pp. 1-15.
- RUSSO ACHILLE. — Divisione differenziale a divisione eguale negl'individui con apparato nucleare di 4 nuclei (3 macro ed 1 micronucleo) in *Gryptochilum echini* Mps. (Estr. dal «Monitore Zoologico Italiano». Anno XLVII, pp. 293-299). Firenze, 1937. 8°.
- RUSSO ACHILLE. — Incremento del condrioma ed attivazione del metabolismo nell'oocite della coniglia. (Estr. dall'«Archivio di Scienze Biologiche». Vol. XXII, pp. 601-604). Bologna, 1936. 8°.
- SUPINÒ LUCIANO. — I tumori metastatici della milza. (Estr. dal volume pubblicato in occasione delle onoranze al prof. A. Pepere, pp. 209-218). Rocca S. Casciano, 1936. 8°.
- SUPINO LUCIANO. — Osservazioni su di un caso non comune di malattia cutanea di Recklinghausen. (Estr. dagli «Atti della Società medico-chirurgica di Padova e Bollettino della Facoltà di Medicina e Chirurgia della R. Università di Padova». 1936). Milano, 1936. 8°.
- TANTINI EMANUELE. — L'azione di alcune sterine sul processo di riparazione delle ferite cutanee. (Estr. da «Lo Sperimentale». Archivio di Biologia normale e patologica. Vol. 89, fasc. VI, pp. 712-723). Siena, 1935. 8°.
- TANTINI EMANUELE. — Ricerche di controllo alla reazione di lattogelificazione dei sieri secondo Kopaczewski. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. I). Milano, 1936. 8°, pp. 1-23.
- TANTINI EMANUELE. — Sui pretesi fenomeni di idrolisi proteica nella interazione fra sieri normali e sieri di cancerosi. (Estr. da «Lo Sperimentale», Archivio di Biologia normale e patologica. Vol. 90, pp. 476-486). Siena, 1936. 8°.
- TANTINI EMANUELE. — Valori interferometrici assoluti in sieri di cancerosi e non cancerosi. (Estr. da «Tumori». Anno XXII, fasc. IV-V). Milano, 1936. 8°, pp. 1-19.
- WILSON H. V. and PENNEY J. T. — A new variety of the hexactinellid *Sponge*, *Rhabdocalyptus dawsoni* (Lambe) and the species of *Rhabdocalyptus*. (From the «Proceedings of the United States National Museum». Vol. 76). Washington, 1936. 8°, pp. 1-9.

N. P.



# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Fascicolo del 21 marzo 1937 - Anno XV*

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Astronomia** (Astrofisica). — *Altezza della cromosfera nel 1936 ed andamento del ciclo solare.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. ABETTI.

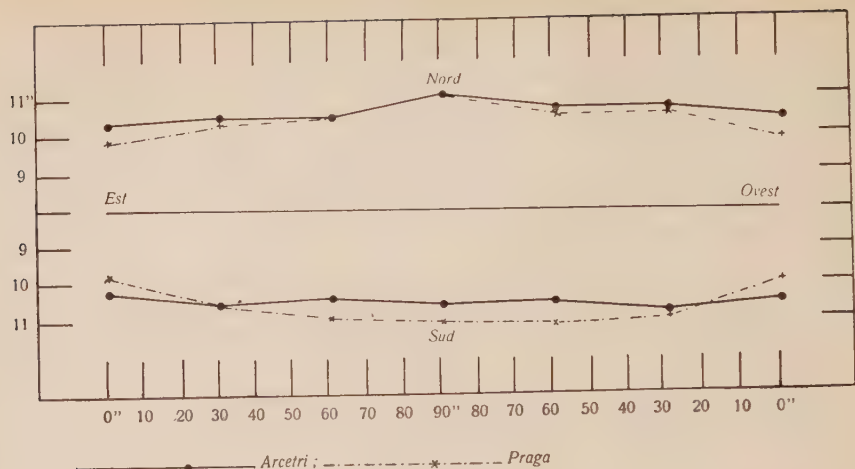
I risultati delle osservazioni dell'altezza della cromosfera eseguite ad Arcetri e a Praga durante il 1936, misurando l'altezza della riga  $H_{\alpha}$  invertita, con la fessura dello spettroscopio radiale al bordo, sono raccolti nella seguente tabella.

Ad Arcetri si sono fatte osservazioni in 87 giorni, in massima parte dal dott. P. Cipriani; all'Osservatorio Stefànik di Praga le osservazioni sono state eseguite in 48 giorni dalla dott.sa Novàková, e dai sigg. Vlček e Vrátník.

*Altezza media della cromosfera nel 1936.*

+ 90° N	+ 60° E	+ 30° E	0° E	- 30° E	- 60° E	- 90° S	- 60° W	- 30° W	0° W	+ 30° W	+ 60° W	Media
Arcetri												
11''.03	10''.49	10''.46	10''.22	10''.58	10''.41	10''.57	10''.48	10''.70	10''.43	10''.77	10''.68	10''.57
Praga												
11''.00	10''.40	10''.42	9''.78	10''.63	10''.92	11''.03	11''.11	10''.89	9''.93	10''.65	10''.55	10''.61

(1) Presentata nella seduta del 13 marzo 1937.



Nella figura sono riportati questi dati dai quali si nota che l'accordo è ottimo fra Arcetri e Praga come nell'anno precedente. La media Arcetri-Praga per il 1936 si può paragonare con l'analoga per il 1935:

$$1936-1935 = + 0''.30.$$

Si ha quindi un lieve aumento che porta l'altezza media quasi a quella del 1933, in cui però l'altezza ai poli era maggiore che non all'equatore, mentre che nel 1936 essa è sensibilmente uniforme attorno a tutto il globo solare.

L'area totale delle protuberanze dedotta dalle stazioni di Arcetri, Catania, Praga, Tashkent, Zurigo nel 1936 risulta di 247 unità di protuberanza, maggiore di quella del 1935, quindi continua ad aumentare l'attività del ciclo, come è provato anche dalle macchie.

I massimi principali delle protuberanze sono avvenuti: nell'emisfero nord a 57° di latitudine, e in quello sud a 62°, continuando così lo spostamento verso i poli delle protuberanze ad alta latitudine di 10°, tanto nell'emisfero nord, che in quello sud, rispetto al 1935. I massimi secondari, ormai ben pronunciati sono comparsi: a 37° nell'emisfero nord e a 35° in quello sud.

Dagli spettroeliogrammi in luce monocromatica di calcio e di idrogeno, presi durante il 1936 alla torre solare, si rileva che l'attività dei flocculi chiari ed oscuri è pure cresciuta da 1.5 a 2.5 nella scala dei numeri caratteristici dell'attività solare (0 = attività nulla; 5 = massima attività), come pure sono notevolmente aumentate le eruzioni cromosferiche luminose osservate con lo spettroelioscopio.

Per i dettagli di queste osservazioni si veda il fasc. 55 delle Pubblicazioni del R. Osservatorio di Arcetri.



## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulle funzioni di operatori lineari* <sup>(1)</sup>. Nota II di SILVIA MARTIS in BIDDAU, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio F. SEVERI.

5. Dimostriamo ora che, adottando la definizione (14) degli operatori  $f(A)$  data nella Nota precedente dallo stesso titolo risultano anche verificate le quattro proprietà fondamentali del n. 2 con le quali il loro calcolo formale risulta perfettamente rigoroso.

È intanto evidente che l'espressione (14) è un funzionale analitico e lineare di  $f(\lambda)$ , definito univocamente in tutta la regione funzionale lineare  $\Phi$  e avente per indicatrice simmetrica proprio la funzione  $\bar{\gamma}(\alpha, t)$  pensata come funzione di  $\alpha$ ; risultano quindi senz'altro verificate le proprietà 1<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup>. Inoltre, dato lo sviluppo (11') dell'indicatrice simmetrica  $\bar{\gamma}$ , quando la funzione  $f(\lambda)$  si riduce a una potenza  $\lambda^n$  il prodotto simmetrico (14) coordina a questa funzione il coefficiente di  $\alpha^n$  in tale sviluppo, cioè l'operatore  $A^n y$ . Alla funzione  $f(\lambda) = 1 = \lambda^0$  la definizione (14) degli operatori  $f(A)$  fa corrispondere quindi proprio l'operatore identico  $A^0 y = y$  mentre alla funzione  $f(\lambda) = \lambda$  viene a corrispondere, per la stessa definizione, proprio l'operatore fondamentale  $A$ ; anche la 2<sup>a</sup> proprietà risulta dunque verificata.

Per dimostrare che con la definizione (14) degli operatori  $f(A)$  risulta verificata anche la 3<sup>a</sup> proprietà osserviamo che, prese due funzioni  $f_1(\lambda)$  e  $f_2(\lambda)$  di  $\Phi$ , cioè regolari in  $A$ , anche il loro prodotto  $f_1 f_2$  risulterà regolare in  $A$  e quindi appartenente a  $\Phi$  e l'operatore ad esso coordinato dalla formola (14) sarà dato dall'espressione

$$(15) \quad \{ \overline{f_1(\lambda) f_2(\lambda)} \} \bar{\gamma}(\lambda, t)$$

che risulterà un funzionale analitico e bilineare delle due funzioni  $f_1$  ed  $f_2$  variabili in  $\Phi$  che indicheremo con

$$(16) \quad F_1[f_1(\lambda), f_2(\lambda)] = \{ \overline{f_1(\lambda) f_2(\lambda)} \} \bar{\gamma}(\lambda, t).$$

(1) Seguilo dell'altra Nota dallo stesso titolo pubblicata in questi « Rendiconti », vol. XXV, ser. 6<sup>a</sup>, 1937, pp. 214-219.

(2) Nella seduta del 7 marzo 1937.

Questo funzionale bilineare  $F_1$  sarà allora perfettamente individuato dalla sua indicatrice simmetrica

$$(17) \quad \bar{\gamma}_1(\alpha, \beta, t) = \left\{ \frac{1}{1 - \lambda\alpha} \frac{1}{1 - \lambda\beta} \right\} \bar{\gamma}(\overset{\circ}{\lambda}, t)$$

che risulterà una funzione analitica delle due variabili  $\alpha$  e  $\beta$  regolare per tutti i valori di queste variabili nella regione connessa  $\bar{B}$ , poichè il valore di  $F_1$  per ogni coppia di funzioni  $f_1$  e  $f_2$  di  $\Phi$  sarà dato dal prodotto funzionale simmetrico

$$(18) \quad F_1[f_1(\lambda), f_2(\lambda)] = f_1(\overset{\circ}{\alpha}) f_2(\overset{\circ}{\beta}) \bar{\gamma}_1(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta}, t).$$

Applicando invece l'operatore  $f_2(A)$  alla funzione  $y$  di  $H$  si ottiene, in base alla formola di definizione (14),

$$f_2(A)y = f_2(\beta) \bar{L}_{\beta} y$$

e applicando ancora a questo risultato l'operatore  $f_1(A)$  si ha infine

$$(19) \quad f_1(A)\{f_2(A)y\} = f_1(\overset{\circ}{\alpha}) \bar{L}_{\alpha} f_2(A)y = f_1(\overset{\circ}{\alpha}) \bar{L}_{\alpha} f_2(\beta) \bar{L}_{\beta} y$$

espressione che dipende dalle due funzioni analitiche  $f_1$  ed  $f_2$  variabili in  $\Phi$  ed è quindi un funzionale, evidentemente bilineare, di queste due funzioni che potremo indicare con  $F_2[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$ . Esso è anzi *un funzionale analitico* di queste due funzioni il che è immediato per quel che riguarda la dipendenza da  $f_1$  mentre, per quel che riguarda la dipendenza da  $f_2$ , si può osservare che, quando  $f_2 = f_2(\beta, \mu)$  varia in  $\Phi$  dipendendo analiticamente da un parametro  $\mu$  variabile in una regione  $\Omega$ , anche  $f_2(\beta, \mu) \bar{L}_{\beta} y$ , valore di un certo integrale, è ancora funzione analitica e regolare del parametro  $\mu$  in  $\Omega$ , quindi lo è pure  $\bar{L}_{\alpha} f_2(\overset{\circ}{\beta}, \mu) \bar{L}_{\beta} y$  che si ottiene applicando al risultato precedente l'operatore  $\bar{L}_{\alpha}$  in base all'ipotesi fatta su questo al n. 4 e, in definitiva, lo è ancora tutta l'espressione (19) cioè appunto  $F_2[f_1(\lambda), f_2(\lambda, \mu)]$ .

Questo funzionale analitico e bilineare  $F_2$  sarà pure perfettamente individuato dalla sua indicatrice simmetrica

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{\gamma}_2(\alpha, \beta, t) &= F_2 \left[ \frac{1}{1 - \lambda\alpha}, \frac{1}{1 - \lambda\beta} \right] = \\ &= \frac{1}{1 - \lambda_1\alpha} \bar{L}_{\lambda_1} \frac{1}{1 - \lambda_2\beta} \bar{L}_{\lambda_2} y = \bar{L}_{\alpha} \bar{L}_{\beta} y \end{aligned}$$

che risulterà una funzione analitica delle due variabili  $\alpha$  e  $\beta$  regolare per tutti i valori di queste variabili per cui le due funzioni di  $\lambda$ :  $\frac{1}{1 - \lambda\alpha}$  e

$\frac{1}{1-\lambda\beta}$  risultano appartenenti a  $\Phi$ , cioè per tutti i valori di queste variabili appartenenti alla regione connessa  $\bar{B}$ . Il valore di  $F_2[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$ , cioè l'espressione (19) sarà dato infatti, per le proprietà generali dei funzionali analitici, dal prodotto funzionale simmetrico

$$(21) \quad F_2[f_1(\lambda), f_2(\lambda)] = f_1(A) \{f_2(A) y\} = f_1(\overset{\circ}{\alpha}) f_2(\overset{\circ}{\beta}) \bar{\gamma}_2(\overset{\circ}{\alpha}, \overset{\circ}{\beta}, t).$$

Per dimostrare la 3ª proprietà, che cioè al prodotto  $f_1(\lambda) f_2(\lambda)$  corrisponde, per la definizione (14), un operatore che è proprio il prodotto  $f_1(A) f_2(A)$  dei due operatori  $f_1(A)$  e  $f_2(A)$  basterà quindi dimostrare che il funzionale bilineare  $F_1[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$ , che dà l'operatore corrispondente a  $f_1 f_2$  per la definizione (14), coincide identicamente con l'altro funzionale bilineare  $F_2[f_1(\lambda), f_2(\lambda)]$  che dà invece, per la (19), il risultato dell'applicazione successiva a  $y$  prima dell'operatore  $f_2(A)$  e poi dell'operatore  $f_1(A)$ . Ma dato che questi due funzionali analitici e bilineari  $F_1$  ed  $F_2$ , definiti ambedue per  $f_1$  e  $f_2$  variabili in  $\Phi$ , sono individuati dalle rispettive indicatrici  $\bar{\gamma}_1$  e  $\bar{\gamma}_2$ , per dimostrare la loro identità basterà dimostrare l'identità di queste due funzioni analitiche definite e regolari ambedue per  $\alpha$  e  $\beta$  variabili nella stessa regione connessa  $\bar{B}$  contenente l'origine. Per far ciò, anzi, basterà semplicemente dimostrare la loro identità in un intorno comunque piccolo di questo punto cioè l'identità dei loro sviluppi in serie di potenze di  $\alpha$  e  $\beta$ , poichè da ciò segue senz'altro, eseguendo i medesimi prolungamenti analitici, la loro identità in tutto il campo comune, per ipotesi connesso, di definizione.

Osserviamo perciò che l'indicatrice  $\bar{\gamma}_1$  di  $F_1$  è data dal prodotto funzionale simmetrico (17) cioè dal prodotto funzionale simmetrico di una funzione di  $\lambda$  il cui sviluppo nell'intorno dell'origine è:

$$(22) \quad \frac{1}{1-\lambda\alpha} \frac{1}{1-\lambda\beta} = \left( \sum_0^\infty \lambda^n \alpha^n \right) \left( \sum_0^\infty \lambda^m \beta^m \right) = \sum_0^\infty \lambda^n \left( \sum_0^n \alpha^r \beta^{n-r} \right)$$

per l'altra funzione di  $\lambda$   $\bar{\gamma}(\lambda, t)$  il cui sviluppo (11') nell'intorno dell'origine è invece

$$(11'') \quad \bar{\gamma}(\lambda, t) = \bar{L}_\lambda y = \sum_0^\infty \lambda^n A^n y$$

e quindi, per  $\alpha$  e  $\beta$  abbastanza piccoli in modulo, il prodotto funzionale simmetrico (17) sarà dato, per note proprietà (vedi F. A. n. 51), dalla serie, certo convergente,

$$(23) \quad \bar{\gamma}(\alpha, \beta, t) = \sum_0^\infty \left( \sum_0^n \alpha^r \beta^{n-r} \right) A^n y.$$

Ma questo sviluppo di  $\bar{\gamma}_1$ , cambiando l'ordine di termini, com'è permesso, si trasforma immediatamente nella serie doppia di potenze di  $\alpha$  e  $\beta$

$$(24) \quad \bar{\gamma}_1(\alpha, \beta, t) = \sum_n \sum_{r,s} \alpha^r \beta^s A^{r+s} y$$

che rappresenta  $\bar{\gamma}_1$  in un conveniente intorno dell'origine.

Ricordando invece la (20) e lo sviluppo (11') la funzione  $\bar{\gamma}_2(\alpha, \beta, t)$ , analitica e regolare nello stesso intorno dell'origine, sarà data da

$$(25) \quad \bar{\gamma}_2(\alpha, \beta, t) = \bar{L}_\alpha \bar{L}_\beta y = \sum_0^\infty \alpha^r A^r \left( \sum_0^\infty \beta^s A^s y \right) = \sum_{r,s} \alpha^r \beta^s c_{rs}$$

e quest'ultima serie doppia di potenze di  $\alpha$  e  $\beta$  sarà certo convergente nello stesso intorno dell'origine in cui converge lo sviluppo (24), essendo tanto  $\bar{\gamma}_1$  che  $\bar{\gamma}_2$  analitiche e regolari nello stesso campo. Per dimostrare l'identità di questi due sviluppi basterà allora mostrare che i coefficienti  $c_{rs}$  di  $\alpha^r \beta^s$  nello sviluppo (25) coincidono coi coefficienti delle stesse potenze nello sviluppo (24), che cioè si ha

$$(26) \quad c_{rs} = A^{r+s} y.$$

Ma per la formola di Cauchy è

$$(27) \quad c_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{d\beta}{\beta^{s+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{d\alpha}{\alpha^{r+1}} \left\{ \sum_n \alpha^n A^n \left( \sum_m \beta^m A^m y \right) \right\}$$

essendo  $C_1$  e  $C_2$  due piccole curve chiuse racchiudenti l'origine e tutte contenute in quel suo intorno in cui le serie sono totalmente convergenti. Integrando termine a termine, com'è permesso, si ha allora

$$(28) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{d\alpha}{\alpha^{r+1}} \left\{ \sum_n \alpha^n A^n \left( \sum_m \beta^m A^m y \right) \right\} = A^r \left( \sum_m \beta^m A^m y \right) = \varphi(\beta, t)$$

e  $\varphi$  risulterà una funzione analitica e regolare del parametro  $\beta$  in quello stesso intorno dell'origine in cui lo è lo sviluppo  $\sum_m \beta^m A^m y$  poichè si ottiene da questo applicandovi l'operatore  $A^r$  che, per l'ipotesi fatta al n. 4 su  $\bar{L}$ , conserva l'analiticità rispetto ai parametri. Quindi anche  $\varphi$  sarà sviluppabile in una serie di potenze di  $\beta$  convergente nello stesso intorno

$$(29) \quad \varphi(\beta, t) = \sum_m \beta^m b_m$$

ove i coefficienti  $b_m$  potranno ottenersi successivamente con la formola ricorrente

$$(30) \quad b_m = \lim_{\beta \rightarrow 0} \frac{\varphi(\beta, t) - \sum_{k=0}^{m-1} \beta^k b_k}{\beta^m} = \lim_{\beta \rightarrow 0} \varphi_m(\beta, t)$$

o anche come valori, per  $\beta = 0$ , di queste funzioni analitiche  $\varphi_m$  di  $\beta$  che compaiono sotto i segni di limite le quali sono pure regolari in quell'intorno dell'origine in cui converge lo sviluppo (29). In particolare si avrà

$$(31) \quad b_0 = \varphi(0, t) = A^r A^0 y = A^r y.$$

Ma è, per la (28)

$$(32) \quad \begin{aligned} \varphi(\beta, t) &= A^r \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m A^m y = A^r \left( y + \sum_{m=1}^{\infty} \beta^m A^m y \right) = \\ &= A^r y + A^r \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m A^m y = A^r y + \beta A^r \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} A^m y \end{aligned}$$

e quindi risulta

$$\begin{aligned} \varphi_1(\beta, t) &= \frac{\varphi(\beta, t) - b_0}{\beta} = \frac{A^r y + \beta A^r \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} A^m y - A^r y}{\beta} = \\ &= A^r \sum_{m=1}^{\infty} \beta^{m-1} A^m y \end{aligned}$$

da cui

$$b_1 = \varphi_1(0, t) = A^r A y = A^{r+1} y.$$

Procedendo successivamente in modo analogo si dimostra così in generale che è

$$b_m = \varphi_m(0, t) = A^{r+m} y$$

e con ciò lo sviluppo (29) diventa

$$(33) \quad \varphi(\beta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m A^{r+m} y$$

che confrontato con la (28) ci dà

$$\varphi(\beta, t) = A^r \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m A^m y = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m A^{r+m} y$$

il che equivale a dire che dall'ipotesi fatta al n. 4 su  $\bar{L}$  segue come conseguenza la possibilità di applicare l'operatore  $A^r$  termine a termine alla serie di potenze



$\sum_0^{\infty} \beta^m A^m y = \bar{L}_\beta y$  ottenendosi ancora la serie di potenze (33), convergente nello stesso campo. Sostituendo questa espressione di  $\varphi$  nella (27) si ha allora infine

$$c_{rs} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{d\beta}{\beta^{s+1}} \left( \sum_0^{\infty} \beta^m A^{r+m} y \right) = A^{r+s} y.$$

Resta con ciò dimostrata la (26) e quindi l'identità dei due sviluppi (24) e (25) di  $\bar{\gamma}_1$  e  $\bar{\gamma}_2$  in quell'intorno dell'origine in cui sono regolari. Ne segue come abbiamo visto, l'identità delle due funzioni  $\bar{\gamma}_1$  e  $\bar{\gamma}_2$  per  $\alpha$  e  $\beta$  variabili comunque nella stessa regione connessa  $\bar{B}$  in cui esse sono definite e regolari. Risultano quindi identici anche i due funzionali bilineari  $F_1$  e  $F_2$  che le hanno per indicatrici simmetriche, e resta con ciò verificata la terza proprietà per tutti gli operatori  $f(A)$  definiti mediante l'espressione (14).

6. Da ciò che precede vediamo dunque come si possa stabilire un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$  in modo che valgano le quattro proprietà del n. 2 adottando per essi la definizione (14), con la sola restrizione che siano verificate le ipotesi fatte al n. 4, e cioè:

1<sup>a</sup> convergenza dello sviluppo (11') in un intorno di  $\alpha = 0$  per ogni  $y$  in  $H$ ;

2<sup>a</sup> l'operatore  $\bar{L}_\alpha y$  definito da questo sviluppo e dai suoi prolungamenti analitici conservi l'analiticità rispetto ai parametri che compaiono analiticamente in  $y$ .

Queste ipotesi permettono di stabilire un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$  funzioni di un operatore fondamentale  $A$  anche quando non sia verificata l'ipotesi, fatta dal prof. Fantappiè nelle Memorie citate, che l'equazione fondamentale (1) abbia una e una sola soluzione  $\gamma$  in  $H$  da cui poter ricavare, con la (7), la funzione  $\bar{\gamma}$ . Può infatti accadere che questa funzione  $\bar{\gamma}$ , essenziale per la definizione (14), ottenuta direttamente in questo lavoro mediante lo sviluppo (11') sia prolungabile analiticamente, come funzione di  $\alpha$ , a una regione ricoprentesi, risulti cioè una funzione analitica di  $\alpha$  *polidroma* restando sempre, come funzione di  $t$ , nel campo  $H$ . In questo caso si avrebbero, per qualche valore di  $\alpha$ , più valori distinti, cioè più funzioni di  $H$  che, com'è facile verificare, soddisfano all'equazione fondamentale (1), e non sarebbe quindi applicabile il metodo del prof. Fantappiè. Col metodo esposto in questo lavoro noi possiamo invece limitare opportunamente la definizione della funzione  $\bar{\gamma}$  ai soli valori di  $\alpha$  variabili in una regione  $\bar{B}$  connessa ma non ricoprentesi che sia una parte del campo naturale di esistenza di  $\bar{\gamma}$  e stabilire poi ancora, come abbiamo visto, un calcolo rigoroso degli operatori  $f(A)$ .

**Meccanica.** — *Influenza di piccole viscosità di un fluido nella determinazione della pressione in regioni singolari.* Nota di MARIA PASTORI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

Se un fluido, che si può ritenere incomprimibile, viene rappresentato schematicamente come perfetto, e lo si suppone in moto stazionario irrotazionale, si ha, in assenza di forze di massa, la nota soluzione delle equazioni indefinite data dal teorema di Bernoulli:

$$(1) \quad p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2.$$

Essa esprime la pressione in ogni punto del campo di moto come differenza tra una costante, la pressione idrostatica, e un termine variabile col modulo della velocità. Se quindi nel campo di moto ci sono regioni N in cui la velocità diviene abbastanza grande così che il secondo termine della (1) superi il primo, in esse la soluzione matematica (1) non ha significato fisico perchè  $p$  diviene negativa.

In una Nota recente <sup>(2)</sup> ho determinato in diversi casi di moto piano le regioni N limitate della linea  $\lambda$  dove si annulla  $p$ . Essendomi in essa proposta il problema del calcolo delle azioni dinamiche esercitate dal fluido sopra un ostacolo il cui contorno fosse, almeno in parte, immerso nella regione N, ho osservato che per risolverlo andrebbe tenuto conto, nella regione N, della viscosità del fluido, anche se il coefficiente di viscosità è molto piccolo <sup>(3)</sup>, così come avviene nella teoria dello strato limite di Prandtl. Il fluido sarebbe rappresentato, nel caso più generale, come perfetto solo esternamente a una regione, in parte di spessore infinitesimo e in parte finita, formata dallo strato limite e da quella porzione del campo di moto dove non è valida la (1).

Internamente a tale regione andrebbero integrate le equazioni dei fluidi viscosi, con condizioni al contorno espresse dall'adesione del fluido all'ostacolo e da un raccordo, almeno approssimato, delle velocità attraverso  $\lambda$ , che salvi, nell'ordine di approssimazione stabilito, la continuità degli sforzi specifici relativi alla normale a  $\lambda$ .

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) *Azioni dinamiche in un fluido che non può considerarsi ovunque perfetto.* (« Rend. Ist. Lombardo », vol. LXIX, 1936, pp. 1-17).

(3) Ved. B. FINZI e G. BOZZA. *Resistenza idro ed aerodinamica.* Milano, 1935, cap. IV, § 16, p. 73.

Nella Nota ricordata, ho portato a termine il problema così impostato solo in un caso particolare, mentre negli altri casi ho fatto il calcolo delle azioni dinamiche introducendo un'ipotesi semplificatrice <sup>(1)</sup>.

Ritorno ora sull'argomento per mostrare come si possa fare il calcolo della pressione nella regione N servendosi delle soluzioni delle equazioni dei fluidi viscosi date dall'Hamel, soluzioni che permettono di conservare le stesse linee di flusso di un fluido perfetto <sup>(2)</sup>. L'Hamel si è proposto infatti di integrare le equazioni dei fluidi viscosi, in moto piano stazionario, nell'ipotesi che le linee di flusso siano quelle di un moto potenziale, essendo naturalmente diversa la distribuzione delle velocità. Egli ha trovato che i soli moti, che possono così porsi in corrispondenza dei moti potenziali, sono quelli per spirali logaritmiche, e in particolare per raggi uscenti da un punto e per circonferenze concentriche, immagini quindi di vortici spirali, di sorgenti e vortici circolari.

Considero dapprima in questa Nota il caso della sorgente. In esso, servendomi della soluzione dell'Hamel, e poste attraverso  $\lambda$  le condizioni sopra ricordate, faccio nella regione N il calcolo della pressione, che risulta positiva.

Quanto alle condizioni di raccordo, trovo che fissato un puro numero  $\epsilon$  come misura dell'approssimazione che si vuol conseguire, basta che il rapporto tra il coefficiente cinetico di viscosità e la portata non superi una certa frazione di  $\epsilon$  perchè non ci siano discontinuità di velocità e di sforzi rilevabili nell'ordine di approssimazione stabilito.

Vengo così a constatare l'influenza della viscosità, sia pur piccola, nella determinazione della pressione dove la (1) perde significato.

A questa conclusione giungo pure nel caso del vortice circolare. Per il caso del vortice spirale, la trattazione andrebbe condotta diversamente dai due casi precedenti <sup>(3)</sup>.

## § I. — SORGENTE LIBERA.

Se si rappresenta nel piano della variabile complessa  $z = x + iy$  il moto indotto da una sorgente puntiforme di portata  $q$  posta nell'origine,

(1) Precisamente l'annullarsi della pressione nella regione N. È questa una ipotesi che permette di sfruttare il più possibile la rappresentazione del fluido come perfetto, salvando la continuità della pressione attraverso  $\lambda$ .

(2) G. HAMEL, *Spiralförmige Bewegung zäher Flüssigkeiten*. (« Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung », 1916, pp. 34-60).

(3) Ciò è dovuto al fatto che non è possibile in questo caso il vortice spirale libero, ma solo tra pareti rigide. (Cfr. HAMEL, loc. cit., § 9). La condizione di adesione alle pareti porta allora all'annullarsi della velocità nella rappresentazione viscosa in punti dove non si annulla la velocità per la rappresentazione perfetta. Le due soluzioni, viscosa e perfetta, si possono allora accordare solo completando la prima con lo strato limite aderente alle pareti.

si ha per la velocità complessa:

$$(2) \quad w = v_x - i v_y = \frac{q}{2\pi\zeta}.$$

La linea  $\lambda$  ove si annulla  $p$  si ottiene da (1) ponendovi  $p = 0$ ,  $v^2 = w\bar{w}$  (dove  $\bar{w}$  è la quantità complessa coniugata di (2)). Si trova:

$$(3) \quad x^2 + y^2 = \frac{\rho q^2}{8\pi^2 p_0}.$$

La regione N è quindi il cerchio di raggio:

$$(3') \quad R = \frac{q}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}}.$$

In esso vanno integrate le equazioni dei fluidi viscosi che, coll'eliminazione della pressione danno luogo alla:

$$(4) \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} = \Delta \Delta \Psi$$

essendo  $\Psi$  la funzione di corrente:

$$(5) \quad v_x = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Le soluzioni della (4) date dall'Hamel sono quelle per cui

$$(6) \quad \Psi = F(\varphi)$$

con  $\varphi$  funzione armonica (e naturalmente non armonica la  $\Psi$ ), per cui cioè le linee di flusso  $\Psi = \text{cost.}$  sono le stesse di un moto potenziale. Si trova che le linee di flusso non possono essere che spirali logaritmiche, e in particolare raggi e circonferenze <sup>(1)</sup>.

Posto:

$$(7) \quad F' = u$$

si ha, introducendo le coordinate polari  $r$  e  $\theta$ , e nel caso di raggi uscenti dall'origine, che ora ci interessa:

$$(8) \quad \varphi = \theta - \theta_0, \quad v = \frac{u}{r}$$

e per  $u$  l'equazione:

$$(9) \quad u'' + \frac{1}{v} u^2 + 4u + c = 0$$

(1) G. HAMEL, loc. cit., §§ 1-2-3.

dove  $c$  è una costante di integrazione e  $\nu$  il coefficiente cinetico di viscosità. La (9) si integra per funzioni ellittiche. Si ha infatti:

$$(10) \quad u' = \sqrt{\frac{2}{3\nu}} \sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)} \quad , \quad e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu$$

o, introducendo la  $p$  di Weierstrass:

$$(10') \quad u = -2\nu + p\left(\frac{i(\theta - \theta_0)}{\sqrt{6\nu}}; g_2, g_3\right).$$

La (10') rappresenta  $\infty^3$  soluzioni, che sostanzialmente si riducono a  $\infty^2$  (poichè il valore di  $\theta_0$  è inessenziale).

Trattandosi di una sorgente libera, dovrà  $u$  essere funzione periodica di  $\varphi$  con periodo  $2\pi$  o  $\frac{2\pi}{n}$  ( $n$  intero), e potremo sempre supporla compresa tra due quantità finite positive (il caso dell'annullarsi di  $u$  è necessario solo se ci sono pareti a cui il fluido deve aderire). Potremo quindi porre <sup>(1)</sup>:

$$(11) \quad e_2 \leq u \leq e_1 \quad , \quad e_1 > e_2 > e_3 \quad , \quad e_1 > 0, e_2 > 0, e_3 < 0 \quad , \\ e_1 + e_2 + e_3 = -6\nu$$

e per il semiperiodo avremo:

$$(11') \quad \frac{\omega'}{i} = \sqrt{\frac{3\nu}{2}} \int_{e_2}^{e_1} \frac{du}{\sqrt{(e_1 - u)(e_2 - u)(e_3 - u)}} = \frac{\pi}{n}.$$

Determiniamo ora la pressione mediante l'equazione <sup>(2)</sup>:

$$(12) \quad d\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \Delta\Psi d\Psi + \nu\left(\frac{1}{r} \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial\theta} dr - \frac{\partial\Delta\Psi}{\partial r} r d\theta\right)$$

e cioè, per (6) (7) e l'espressione in coordinate polari dell'operatore  $\Delta$  di Laplace:

$$(12') \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \frac{1}{r^2} F'' F' + \frac{2\nu}{r^2} F'' = \frac{\partial}{\partial\theta} \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2}u^2 + 2\nu u\right) \right\} \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2\right) = \frac{\nu}{r^3} F''' = \frac{\nu}{r^3} u'' \end{cases}$$

Si ha quindi integrando:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2}u^2 + 2\nu u\right) + \frac{\gamma}{r^2} + C$$

(1) Oltre alla citata Memoria dell'HAMEL, cfr. pure W. MÜLLER, *Einführung in die Theorie der zähen Flüssigkeiten*. (Leipzig, 1932, p. 87).

(2) Cfr. G. HAMEL, loc. cit., § 10.



con:

$$(13) \quad \gamma = - \left( \frac{1}{2} u^2 + 2 \nu u + \frac{\nu}{2} u'' \right)_{\theta = \theta_0}$$

e C costante arbitraria. E, per la seconda delle (8) (indicando con le stesse notazioni le costanti moltiplicate per  $\rho$ ):

$$(14) \quad p = 2 \mu \frac{u}{r^2} + \frac{\gamma}{r^2} + C.$$

Determiniamo gli sforzi specifici relativi alla normale a  $\lambda$ ; indicando con  $\mathbf{n}$  un vettore unitario orientato come il generico raggio, con  $\mathbf{k}$  un vettore unitario normale al piano del moto, con  $\Phi_n$  lo sforzo specifico relativo ad  $\mathbf{n}$ , si ha:

$$(15) \quad \Phi_n = p \mathbf{n} - 2 \mu \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} + \mu \operatorname{rot} \mathbf{v} \wedge \mathbf{n}$$

dove

$$\mathbf{v} = \frac{u}{r} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dP} \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{v}}{dr} = - \frac{u}{r^2} \mathbf{n}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = - \Delta \Psi \mathbf{k} = - \frac{u'}{r^2} \mathbf{k}.$$

Quindi:

$$(15') \quad \Phi_n = \left( p + 2 \mu \frac{u}{r^2} \right) \mathbf{n} - \mu \frac{u'}{r^2} (\mathbf{k} \wedge \mathbf{n}).$$

Si tratta ora di imporre, attraverso  $\lambda$ , la continuità della velocità e degli sforzi relativi alla normale, a meno di quantità da reputarsi *piccole* rispetto alle altre che dovremo considerare. Osserviamo intanto che la velocità che compete al fluido nei punti di  $\lambda$ , nelle due rappresentazioni di fluido perfetto e viscoso, è rispettivamente, per (i) (3') e (8):

$$v_1 = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \quad \text{e} \quad v_2 = \frac{2\pi u}{q} \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}.$$

Teniamo poi presente che con R dato da (3') la pressione del fluido rappresentato come perfetto si annulla, e per avere la condizione relativa alla continuità degli sforzi in forma adimensionale, facciamo il rapporto tra (15') e una pressione caratteristica, la pressione idrostatica  $p_0$ .

Indicando con  $\varepsilon$  un puro numero da reputarsi *piccolo*, dovremo avere:

$$(16) \quad 1 - \frac{2\pi u}{q} \leq \varepsilon.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{32\pi^2 \mu u}{\rho q^2} + \frac{\gamma}{R^2 p_0} + \frac{C}{p_0} \leq \varepsilon \\ \frac{8\pi^2 \mu u'}{\rho q^2} \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Queste ultime, disponendo della costante  $C$  in modo che sia:

$$(18) \quad \frac{\gamma}{R^2} + C = 0$$

si trasformano in:

$$(17') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{32 \pi^2 \nu u}{q^2} \leq \varepsilon \\ 8 \pi^2 \nu u' / q^2 \leq \varepsilon. \end{array} \right.$$

Dal punto di vista qualitativo, osserviamo che la (16) esige che  $u$  sia sensibilmente costante, e cioè che anche la distribuzione delle velocità non differisca sensibilmente dalla corrispondente relativa al fluido perfetto. Quanto alle (17'), poichè  $u$  varia tra limiti finiti, e per (10) anche  $u'$  si mantiene finita, esse saranno soddisfatte quando sia abbastanza piccolo il coefficiente cinetico di viscosità in confronto della portata della sorgente.

Da (18) discende poi che nella regione  $N$  dove  $r < R$  la pressione data da (14) sarà positiva. Mentre dunque il tener conto di piccole viscosità non modifica sensibilmente le circostanze cinematiche del moto, ciò ha influenza nella determinazione delle pressioni laddove non è più valida la (1).

## § 2. - UNA CONDIZIONE SUFFICIENTE PER IL RACCORDO DELLE SOLUZIONI.

Veniamo ora a precisare le condizioni espresse da (16) e (17'), determinando, tra le  $\infty^2$  soluzioni viscosi, quella che si raccorda con una soluzione perfetta di portata assegnata.

Caratterizziamo nel modo seguente la soluzione viscosa:

$$(19) \quad e_1 = \frac{q}{2\pi}$$

$$(20) \quad e_2 = \frac{q}{2\pi} - 8\nu$$

risulterà allora per l'ultima delle (11)

$$(21) \quad e_3 = 2\nu - \frac{q}{\pi}.$$

Chiamiamo  $\varepsilon_1$  il puro numero che si ottiene dal primo membro della prima (17') in cui si ponga  $u = e_1$ , dato da (19); poniamo cioè:

$$(22) \quad \frac{16 \pi \nu}{q} = \varepsilon_1.$$

Risulterà allora, per (20):

$$(23) \quad 1 - \frac{2 \pi e_2}{q} = \varepsilon_1.$$

Consideriamo ora il primo membro della seconda (17') e, indicato con  $\bar{u}'$  il massimo valore di  $u'$ , mentre  $u$  varia tra  $e_2$  ed  $e_1$  <sup>(1)</sup>, poniamo:

$$(24) \quad \frac{8 \pi^2 \nu \bar{u}'}{q^2} = \varepsilon_2.$$

Le condizioni di raccordo saranno soddisfatte quando nessuno dei due numeri  $\varepsilon_1$  ed  $\varepsilon_2$  superi  $\varepsilon$ .

È facile trovare un'unica condizione, sotto una forma semplice che si presti alla immediata verifica, sufficiente per il raccordo delle soluzioni secondo una data approssimazione.

Si trova infatti facilmente <sup>(2)</sup>:

$$(25) \quad \bar{u}' < \frac{4 q}{\pi}$$

e da (22) (24) discende, come unica condizione sufficiente per il raccordo delle soluzioni:

$$(26) \quad \frac{32 \pi \nu}{q} \leq \varepsilon.$$

In conclusione, fissato il puro numero  $\varepsilon$  come misura dell'approssimazione che si vuol raggiungere, e date le costanti fisiche  $\nu$  e  $q$ , basterà verificare che il puro numero  $\frac{32 \pi \nu}{q}$  non superi  $\varepsilon$ , per essere sicuri che la soluzione delle equazioni dei fluidi perfetti nella regione esterna ad N si accorda con quella (10') dei fluidi viscosi, determinata da (19) (20) senza discontinuità di velocità e di sforzi rilevabili nell'ordine di approssimazione stabilito.

### § 3. — CORRENTE CIRCOLATORIA INTORNO AD OSTACOLO CIRCOLARE. VORTICE CIRCOLARE.

Il caso della corrente circolatoria intorno ad ostacolo circolare è quello da me già preso in considerazione nella Nota ricordata <sup>(3)</sup>. La regione N è

(1) Esso è il valore che assume (10) per

$$u = -2 \nu + \sqrt{4 \nu^2 + 2 \nu (e_1 + e_2) + \frac{1}{3} (e_1^2 + e_2^2 + e_1 e_2)}.$$

(2) Tenendo presente che  $e_1$  ed  $e_2$  sono entrambi positivi ed  $e_2 < e_1$ , si trova in primo luogo  $\bar{u}'^2 < \frac{2}{\nu} \{ 4 \nu (e_1^2 - e_2^2) + e_1^2 - e_2^2 \}$  e, per (19) (20)  $\bar{u}'^2 < 2 \left\{ \left( \frac{2 q}{\pi} - 16 \nu \right)^2 + \frac{2 q^2}{\pi^2} \right\}$  e quindi ancora  $\bar{u}'^2 < \frac{16 q^2}{\pi^2}$ , da cui la (25).

(3) M. PASTORI, loc. cit., § 6.

una corona circolare, compresa tra l'ostacolo e un cerchio di raggio  $R$  dato dalla (3') dove alla portata si sostituisca la circolazione. Naturalmente il raggio del disco deve essere  $< R$  perchè ci sia la regione  $N$ .

Nella regione  $N$  si può sfruttare la soluzione data dall'Hamel delle (4) (6), con le linee di flusso circonferenze concentriche e che corrisponde alle rotazioni viscosi<sup>(1)</sup>. Si può imporre, attraverso  $\lambda$ , la continuità rigorosa della velocità, pur di immaginare il disco ruotante uniformemente con opportuna velocità angolare, la continuità rigorosa della pressione e quella approssimata della componente tangenziale degli sforzi normali. La pressione entro  $N$  è sempre positiva.

E poichè la trattazione vale per qualunque raggio del disco uniformemente ruotante, purchè  $< R$ , rientra in questo caso la rappresentazione del vortice circolare<sup>(2)</sup>.

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Ricerche sperimentali sul liquido seminale*. — I. *Sul valore del pH del liquido seminale umano normale*<sup>(3)</sup>. Nota di V. ZAGAMI, presentata<sup>(4)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In questi ultimi anni la letteratura si è senza dubbio notevolmente arricchita di pregevoli lavori, che tendono a precisare e a definire la organizzazione chimica e chimico-fisica del protoplasma e dei diversi liquidi dell'organismo. Numerosi ed autorevoli Autori hanno orientato in questo senso le loro ricerche; ma pochissimi sono quelli che hanno preso il liquido seminale come oggetto di studio per le loro indagini. Di conseguenza, oggi sono ancora relativamente molto scarse e frammentarie le nozioni, che possediamo in merito alla composizione e alla costituzione chimica di questo liquido, e sembrano mancare del tutto quelle riflettenti l'organizzazione chimico-fisica di esso.

Dalla letteratura che abbiamo potuto esaminare non appare, infatti, che alcuno si sia finora occupato di accertare nel liquido seminale, con ricerche metodiche e sistematiche, le varie costanti fisico-chimiche normali (pressione osmotica, concentrazione in ioni  $H^+$ , equilibrio ionico-salino, viscosità, tensione superficiale, ecc.), nonchè le possibili variazioni di ordine fisiologico, patologico e sperimentale.

(1) Esse vennero studiate dal prof. U. CISOTTI, *Rotazioni viscosi*. (Questi « Rendiconti », vol. XXXIII, serie 5<sup>a</sup>, 1924, pp. 161-167). *Sull'integrazione dell'equazione delle rotazioni viscosi*. (Ibidem, pp. 253-257). Ved. anche B. CALDONAZZO, *Una osservazione a proposito dei moti vorticosi simmetrici rispetto a un asse*. (Ibidem, vol. V, serie 6<sup>a</sup>, 1927, pp. 152-156).

(2) Cfr. FINZI e BOZZA, loc. cit., cap. V, § 2.

(3) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(4) Nella seduta del 21 marzo 1937.

Eppure tali nozioni, oltre a presentare notevole importanza scientifica, ne presenterebbero certo una, non meno notevole, nel campo pratico: solo una esatta conoscenza delle nozioni sopra ricordate potrebbe permettere infatti la realizzazione delle condizioni più adatte ad assicurare perfetta mobilità e prolungata vitalità degli spermatozoi fuori dell'organismo, con indiscutibile ed evidente vantaggio, specie nei riguardi della fecondazione artificiale; e potrebbe, forse, eventualmente, essere anche di ausilio nell'accertamento etiologico e nella cura di alcune forme di sterilità.

L'assenza di ogni dato sperimentalmente acquisito spiega il nostro proposito di voler condurre tutta una serie di sistematiche e metodiche ricerche sul liquido seminale, dirette precisamente ad accertare tutte quelle nozioni di ordine fisico-chimico di cui, come dicevamo, si è completamente ignari.

In questo periodo, in cui la nozione e la misura della concentrazione in ioni  $H^+$  è andata assumendo una importanza sempre più grande, lo svolgimento del nostro programma di lavoro sul liquido seminale non poteva iniziarsi, se non con indagini intorno al valore e al significato del pH.

I valori del pH, e le possibili fluttuazioni di essi in condizioni varie, sono stati più o meno ampiamente studiati in quasi tutti i liquidi dell'organismo. Come è noto, le indagini più numerose sono state eseguite finora sul sangue, ma non mancano ricerche sulla linfa, sul liquido cerebro-spinale, sul liquido della camera anteriore dell'occhio, sugli essudati e transudati, sulla saliva, sul succo gastrico, sul succo duodenale, sulla bile, sul latte, sull'urina, sul sudore, sul liquido amniotico; mancano invece del tutto, o quasi del tutto, ricerche eseguite sul liquido spermatico come tale e sui singoli secreti delle glandole sessuali accessorie. C'è stato, infatti, chi si è proposto lo scopo di accertare il pH *optimum* del mezzo, in cui la mobilità e la vitalità degli spermatozoi possa rimanere meglio assicurata; ma non chi si sia imposto il programma di uno studio esauriente sul pH del liquido seminale come tale e del secreto delle singole glandole sessuali accessorie.

Così, con ricerche eseguite sugli spermatozoi di invertebrati marini (echinodermi) è stato dimostrato, che la concentrazione dei vari ioni nel liquido ambiente rappresenta una condizione di primaria importanza per le proprietà biologiche degli spermatozoi (Lillie<sup>(1)</sup>, Loeb<sup>(1)</sup>, ecc.). Particolarmente Fuchs<sup>(2)</sup> ha dimostrato, che i movimenti degli spermatozoi di *Ciona*, *Strongilocentrotus*, *Sphaerechinus*, *Echinus*, sono aumentati da un leggero aumento della concentrazione in ioni  $H^+$  dell'acqua di mare. Cohn<sup>(3-4)</sup>

(1) LILLIE, LOEB, cit. da G. AMANTEA e K. KRZYSZKOWSKY, *Ricerche fisiologiche sugli spermatozoi*. « Rivista di Biologia », 1921, 3, 1.

(2) H. M. FUCHS, *Studies in the physiology of fertilization*. « Journ. Genetics », 1915, 4, 78.

(3) E. J. COHN, *The relation between the hydrogen ion concentration of spermatozoa suspension and their fertilizing power*. « Anat. Rec. », 1917, 11, 530.

(4) E. J. COHN, *Studies in the physiology of spermatozoa*. « Biol. Bull. », 1918, 34, 167.



ha stabilito, che l'attività degli spermatozoi di animali marini è una funzione della concentrazione in ioni  $H^+$ , e che in un'acqua di cui il pH è stato leggermente diminuito lo sperma vive più a lungo ed è capace di fecondare un maggior numero di uova. Gray <sup>(1)</sup> ha messo in evidenza, che gli spermatozoi di *Echinus miliaris* presentano movimenti energici o flocculano nell'acqua di mare, secondo la concentrazione in ioni  $H^+$  di essa. Wolf <sup>(2)</sup> ha dimostrato, che gli spermatozoi di coniglio possono rimanere « in vitro » mobili fino a nove giorni, se il liquido spremuto dal testicolo viene conservato in ghiacciaia, in soluzione di Tyrode opportunamente modificata e con un pH optimum di 7,4. Anderson <sup>(3)</sup> e Hearly e Anderson <sup>(4)</sup> riferiscono, che il valore medio normale del pH di sette esemplari di sperma di cavallo era di 7,51, e quello di cinque esemplari contenenti spermatozoi non mobili era di 7,58. Yamane e Kato <sup>(5)</sup> trovarono, che il pH di 26 campioni di liquido seminale di cavallo, accertato con il metodo elettrometrico, variava da 7,26 a 7,67, e che la vitalità degli spermatozoi di cavallo e di coniglio era meglio assicurata da liquidi a pH 7,2-7,4. Muschat <sup>(6)</sup> asserisce, che l'optimum di mobilità per gli spermatozoi umani sta tra pH 8,5 e 9,5; che variazioni verso l'acidità inibirebbero; che sotto il valore di 6,0 e al disopra di 10,0 non si avrebbe più mobilità; e che gli spermatozoi resi inattivi da un mezzo a pH uguale a 4,0 riprenderebbero la loro attività ristabilendo l'alcalinità. Grodzinski e Marchilewski <sup>(7)</sup> studiarono le condizioni optimume di conservazione dello sperma di gallo, osservando la mobilità degli spermatozoi in funzione del tempo, della temperatura e della concentrazione in ioni  $H^+$  del liquido di conservazione. In merito a questa ultima questione trovarono, che rispondono meglio i liquidi, il cui pH è compreso tra 7,2 e 8,0.

Più numerosi e più coordinati sono invece i dati accumulati in questi ultimi anni sulle uova, specie nel campo dei viventi marini, e ciò, sia per quanto riguarda le variazioni interne del pH durante la maturazione, la fecondazione, la partenogenesi, la divisione e moltiplicazione cellulare, la crescita, sia per quanto riguarda l'azione del pH del mezzo esterno. Dai

(1) J. GRAY, *The relation of spermatozoa to certain electrolytes*. «Proc. of the Roy. Soc.», Ser. B, 1920, 91, 147.

(2) C. G. L. WOLF, *The survival motility in mammalian spermatozoa*. «Journ. Physiol.» 1921, 55, 246; «Journ. agricult. science», 1921, 11, 310.

(3) W. S. ANDERSON, *Vitality of spermatozoa*. «Kentucky Agric. Exp. Stat.», 1922, Bull. 239.

(4) D. J. HEARLY e W. S. ANDERSON, *The hydrogen ion concentration of horse semen*. «Cornell Veterinarian», 1922.

(5) J. YAMANE e K. KATO, *The hydrogen ion concentration of horse semen and the optimum for vitality of spermatozoa of the horse and rabbit*. «Ztschr. Tierzüchtung u. Züchtungsbiol.», 1928, 12, 347.

(6) M. MUSCHAT, *The effect of variation of hydrogen ion concentration on the motility of human spermatozoa*. «Surg. Gynecol., Obstet.», 1926, 35, 778.

(7) Z. GRODZINSKI e J. MARCHILEWSKI, *Studies on the motility of spermatozoa of the domestic cock outside the organism*. «Bull. intern. Acad. Sc., Cracovie», 1935, 2, 347.

dati riferiti dalla letteratura risulta l'enorme importanza del pH, sia interno sia del mezzo esterno, per tutti i fenomeni della riproduzione su riferiti.

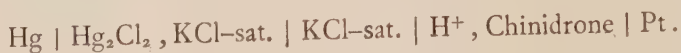
Queste prime nostre ricerche sono state dirette, come abbiamo già accennato, ad accertare il valore normale della concentrazione in ioni  $H^+$  del liquido seminale umano.

Mancando in merito ogni precedente ricerca, non eravamo per nulla informati sulla necessità o meno di preservare il liquido in esame dal contatto con l'aria ambiente; non eravamo neppure informati sul metodo di determinazione, che meglio rispondesse allo scopo, nè, volendo servirci del metodo elettrometrico, sul tipo di elettrodi, che fosse preferibile adoperare. Facemmo quindi le prime determinazioni orientative (esp. 1-3 della Tab. II) sul liquido seminale (raccolto nell'accoppiamento normale in un comune guanto di gomma — *condom* — previamente lavato con acqua distillata ed asciugato, senza usare alcuna precauzione a che il liquido stesso non venisse in contatto con l'aria), servendoci del metodo elettrometrico, e adoperando sia elettrodi a chinidrone a vaso aperto, sia elettrodi a corrente di idrogeno; nell'un caso e nell'altro si usava un elettrodo di paragone a « calomelano KCl sat. ». Ma sia per i valori piuttosto elevati ottenuti in ogni caso, sia per i notevoli scarti osservati su uno stesso campione di liquido, fummo subito convinti della necessità assoluta di operare, anche per questo liquido, al riparo dall'aria, e con tutte quelle precauzioni di raccolta e di determinazione, che si sono mostrate necessarie per il sangue. Insufficienti quindi erano le precauzioni di raccolta accennate, e completamente inadatti i tipi di elettrodi adoperati.

Edotti di ciò, nelle prove successive il liquido seminale in esame è stato raccolto ed esaminato con le modalità seguenti, che si sono finora dimostrate le più adeguate allo scopo.

Il liquido seminale veniva al solito raccolto in un guanto di gomma, previamente lavato con acqua distillata ed asciugato. Nell'applicarlo si aveva cura a che non vi rimanesse affatto aria nell'interno; ciò si otteneva facilmente premendo ed avvolgendo momentaneamente su se stesso (con movimenti di torsione e iniziati dalla parte apicale) il suo piccolo serbatoio. L'applicazione si faceva come di norma, coll'avvertenza di mantenere l'avvolgimento e di ottenere la perfetta aderenza coll'organo, senza che rimanessero spazi morti. Solo allora veniva lasciato libero il serbatoio. Subito dopo l'eiaculazione si legava strettamente il guanto attorno alla sua parte libera più prossima all'organo. Quindi esso veniva tolto, e immediatamente se ne premeva e avvolgeva su se stessa (sempre con movimenti di torsione, ma diretti questa volta verso l'apice del serbatoio) tutta la porzione sottostante alla legatura, in modo da spingere tutto il contenuto verso il serbatoio. Si applicava infine una seconda salda legatura *immediatamente* al disopra del livello del liquido. Variazioni sensibili del pH si possono avere per omissione di una qualsiasi delle precauzioni su riferite.

Il liquido seminale così raccolto veniva aspirato con una comune siringa a perfetta tenuta d'aria e contenente un po' di olio di vasellina, e portato in un piccolo tubo di vetro sotto olio di vasellina. Da questo poi si attingeva con una siringa-elettrodo di Mislowitzer, contenente un po' di chinidrone, e si eseguiva la determinazione del pH, adoperando sempre come elettrodo di riferimento quello a « calomelano - KCl sat. », e servendo da ponte di legame una soluzione satura di KCl. In definitiva quindi la pila di concentrazione si presentava come segue:



Le determinazioni sono state eseguite sempre a 18° C. di temperatura e sono state fatte il più presto possibile dopo la emissione del liquido: se infatti il contatto e l'esposizione all'aria del liquido seminale è causa di notevole variazione del suo pH, determinando — come vedremo — un rapido spostamento verso l'alcalinità, d'altra parte la conservazione per lungo tempo sotto olio di vasellina è causa pure di sensibili variazioni, determinando uno spostamento verso l'acidità.

In alcune esperienze, contemporaneamente alla determinazione del pH e alle variazioni di questo valore nei diversi tempi successivi alla eliminazione, abbiamo pure raccolto ed annotato dati relativi alla mobilità e vitalità degli spermatozoi.

Nelle annesse Tabelle (Tabella I e II) sono presentati schematicamente i valori finora ottenuti sperimentando sul liquido seminale di tre soggetti normali, rispettivamente dell'età di 35 (sogg. n. 1), di 32 (sogg. n. 2), e di 22 (sogg. n. 3) anni, in perfette condizioni dal punto di vista delle funzioni sessuali, e che non hanno mai sofferto di malattie veneree o dell'apparato uro-genitale. Nella Tab. I sono riferiti i valori normali del pH a 18° C., nonchè le variazioni per effetto della conservazione per lungo tempo (alla temperatura di 16-18° C.) del liquido seminale sotto olio di vasellina. Nella stessa tabella è annotato inoltre il riposo sessuale precedente alla raccolta, ossia lo intervallo di tempo trascorso dalla precedente eliminazione di sperma, e la quantità (approssimativa) di liquido eliminato. Nella Tab. II sono invece messe in evidenza le variazioni del pH per effetto del contatto con l'aria. In entrambe le tabelle sono annotati infine anche i dati relativi alla mobilità degli spermatozoi nelle due diverse condizioni di conservazione del liquido.

Appare dalla Tab. I, che il valore normale del pH del liquido seminale di tre soggetti normali, raccolto e conservato al riparo dall'aria, e determinato con le stesse precauzioni nelle prime quattro ore dalla emissione, ha oscillato, a 18° C. di temperatura, tra un minimo di 7.50 e un massimo di 7.74, presentando una media di 7.58; il liquido seminale umano

TABELLA I.

Numero progressivo esperienza	Data	Soggetto	Riposo sessuale (approssimativo)	Quantità di liquido seminale (approssimativa)	Periodo di tempo (approssimativo) trascorso dalla eliminazione, e valore del pH (a 18° C.) del liquido seminale raccolto, conservato (a 16-18° C.) ed esaminato al riparo dall'aria									
					1° esame		2° esame		3° esame		4° esame		5° esame	
					ore	pH	ore	pH	ore	pH	ore	pH	ore	pH
4	18-II	1	48	3.0	4 <sup>h</sup>	7.62	—	—	—	—	—	—	—	—
5	21-II	1	72	3.0	1 <sup>h</sup>	7.57	—	—	—	—	—	—	—	—
6	23-II	1	48	3.0	14 <sup>h</sup>	7.60	15 <sup>h</sup>	7.62	—	—	—	—	—	—
7	25-II	1	48	3.0	3 <sup>h</sup>	7.74	4 <sup>h</sup>	7.76	—	—	—	—	—	—
8	26-II	1	30	2.5	1 <sup>h</sup>	7.55	3 <sup>h</sup>	7.56	—	—	—	—	—	—
9	27-II	1	20	2.0	1 <sup>h</sup>	7.50	10 <sup>h</sup>	7.48	—	—	—	—	—	—
10	2-III	1	72	4.0	2 <sup>h</sup>	7.60	7 <sup>h</sup>	7.67	28 <sup>h</sup>	7.27	52 <sup>h</sup>	7.12	60 <sup>h</sup>	7.10
11	4-III	1	48	4.0	2 <sup>h</sup>	7.55 (1)	7 <sup>h</sup>	7.48 (1)	9 <sup>h</sup>	7.43 (1)	28 <sup>h</sup>	7.47 (3)	52 <sup>h</sup>	7.19 (4)
13	6-III	1	48	3.0	2 <sup>h</sup>	7.70 (1)	5 <sup>h</sup>	7.68 (1)	8 <sup>h</sup>	7.71 (2)	20 <sup>h</sup>	7.55 (2)	41 <sup>h</sup>	7.40 (3)
14	6-III	2	30	4.0	1 <sup>h</sup>	7.61 (1)	3 <sup>h</sup>	7.61 (1)	7 <sup>h</sup>	7.65 (2)	19 <sup>h</sup>	7.45 (2)	43 <sup>h</sup>	7.20 (3)
15	7-III	1	24	2.0	3 <sup>h</sup>	7.50 (1)	6 <sup>h</sup>	7.50 (1)	8 <sup>h</sup>	7.48 (2)	28 <sup>h</sup>	7.46 (2)	35 <sup>h</sup>	7.48 (2)
16	8-III	1	16	2.0	10 <sup>h</sup>	7.41 (1)	17 <sup>h</sup>	7.41 (1)	35 <sup>h</sup>	7.47 (2)	40 <sup>h</sup>	7.48 (2)	60 <sup>h</sup>	6.85 (3)
17	8-III	3	72	5.0	15 <sup>h</sup>	7.57 (2)	39 <sup>h</sup>	7.36 (3)	64 <sup>h</sup>	7.27 (4)	80 <sup>h</sup>	7.26 (4)	86 <sup>h</sup>	7.25 (4)
18	9-III	1	24	3.0	10 <sup>h</sup>	7.49 (1)	16 <sup>h</sup>	7.49 (2)	41 <sup>h</sup>	7.31 (2)	60 <sup>h</sup>	6.72 (4)	84 <sup>h</sup>	6.61 (4)
19	9-III	1	8	2.0	2 <sup>h</sup>	7.50 (1)	8 <sup>h</sup>	7.52 (2)	52 <sup>h</sup>	6.70 (4)	60 <sup>h</sup>	6.70 (4)	72 <sup>h</sup>	6.65 (4)
20	11-III	1	48	3.0	11 <sup>h</sup>	7.44 (1)	38 <sup>h</sup>	7.26 (2)	62 <sup>h</sup>	6.65 (2)	69 <sup>h</sup>	6.48 (3)	93 <sup>h</sup>	6.27 (4)
21	12-III	3	96	4.0	15 <sup>h</sup>	7.41 (2)	39 <sup>h</sup>	7.35 (2)	46 <sup>h</sup>	7.11 (3)	70 <sup>h</sup>	7.11 (4)	94 <sup>h</sup>	7.02 (4)
22	13-III	1	48	3.0	12 <sup>h</sup>	7.41 (1)	20 <sup>h</sup>	7.17 (2)	36 <sup>h</sup>	6.99 (2)	41 <sup>h</sup>	6.64 (3)	66 <sup>h</sup>	6.61 (4)
23	13-III	1	10	2.0	1 <sup>h</sup>	7.55 (1)	10 <sup>h</sup>	7.40 (2)	26 <sup>h</sup>	7.11 (2)	34 <sup>h</sup>	6.79 (3)	58 <sup>h</sup>	6.52 (4)
24	16-III	1	70	4.0	12 <sup>h</sup>	7.37 (1)	18 <sup>h</sup>	7.34 (2)	36 <sup>h</sup>	6.98 (2)	42 <sup>h</sup>	6.92 (3)	60 <sup>h</sup>	6.66 (4)
25	16-III	1	10	3.0	1 <sup>h</sup>	7.56 (1)	7 <sup>h</sup>	7.55 (1)	25 <sup>h</sup>	7.42 (2)	33 <sup>h</sup>	7.35 (3)	49 <sup>h</sup>	7.32 (3)
26	17-III	2	58	4.0	1 <sup>h</sup>	7.61 (1)	8 <sup>h</sup>	7.52 (1)	25 <sup>h</sup>	7.49 (2)	33 <sup>h</sup>	7.42 (3)	49 <sup>h</sup>	7.21 (3)

(1) Spermatozoi mobilissimi, in massima parte.

(2) Spermatozoi mobili, in gran parte.

(3) Spermatozoi mobili, in piccola parte.

(4) Spermatozoi immobili, in totalità.



TABELLA II.

Numero progressivo esperienza	Data	pH (a 18° C.) del liquido seminale raccolto, conser- vato ed esaminato al ri- paro dall'aria	Tempo di esposizione del liquido seminale all'aria e valore del pH (a 18° C.)							
			1° esame		2° esame		3° esame		4° esame	
			tempo	pH	tempo	pH	tempo	pH	tempo	pH
1	10-II	—	4 <sup>h</sup>	8.91	—	—	—	—	—	—
2	14-II	—	3 <sup>h</sup>	8.42	—	—	—	—	—	—
3	15-II	—	2 <sup>h</sup>	8.69	—	—	—	—	—	—
4	18-II	7.62	3 <sup>h</sup>	8.96	—	—	—	—	—	—
5	21-II	7.57	1 <sup>h</sup>	8.32	—	—	—	—	—	—
6	23-II	7.60	5'	7.77	15'	7.86	30'	8.06	1 <sup>h</sup>	8.30
7	25-II	7.74	1'	7.79	3'	7.88	10'	8.14	1 <sup>h</sup>	8.41
8	26-II	7.55	1'	7.56	4'	7.65	12'	7.92	1 <sup>h</sup>	8.31
9	27-II	7.50	1'	7.50	4'	7.54	10'	7.97	1 <sup>h</sup>	8.70
10	2-III	7.60	1'	7.62	2'	7.64	3'	7.67	10'	7.74
10	2-III	7.60	30'	7.96	1 <sup>h</sup>	8.22	2 <sup>h</sup>	8.52	5 <sup>h</sup>	8.92
11	4-III	7.55 (1)	4 <sup>h</sup>	8.61 (3)	6 <sup>h</sup>	8.64 (4)	—	—	—	—
12	5-III	—	24 <sup>h</sup>	9.15 (4)	48 <sup>h</sup>	9.18 (4)	72 <sup>h</sup>	9.15 (4)	80 <sup>h</sup>	9.15
15	7-III	7.50 (1)	3 <sup>h</sup>	8.38 (3)	5 <sup>h</sup>	8.70 (4)	—	—	—	—
17	8-III	7.57	2'	7.72	5'	7.76	30'	8.17	60'	8.30
19	9-III	7.50 (1)	2 <sup>h</sup>	8.58 (4)	5 <sup>h</sup>	8.60 (4)	24 <sup>h</sup>	8.66 (4)	36 <sup>h</sup>	8.84 (4)
22	13-III	7.41 (1)	3 <sup>h</sup>	8.59 (2)	7 <sup>h</sup>	8.62 (4)	—	—	—	—

(1) Spermatozoi mobilissimi, in massima parte.

(2) Spermatozoi mobili, in gran parte.

(3) Spermatozoi mobili, in piccola parte.

(4) Spermatozoi immobili, in totalità.



presenterebbe quindi (a 18° C.) una concentrazione media in ioni  $H^+$ :  $[H^+] = 2.63 \times 10^{-8}$  con oscillazioni tra  $[H^+] = 3.16 \times 10^{-8}$  e  $[H^+] = 1.82 \times 10^{-8}$ ; ossia valori molto prossimi a quelli corrispondenti del sangue alla stessa temperatura.

Più interessante sarebbe conoscere il valore del pH alla temperatura di 37.5–38° C. Se anche per lo sperma fosse applicabile la formula di correzione di Cullen trovata per il sangue umano:

$$pH\ 38^\circ = pH\ t^\circ + 0.01\ (t^\circ - 20^\circ) - 0.22,$$

i valori su riferiti, riportati a 38° C., diminuirebbero di 0.24, per cui a 38° si avrebbe, per il liquido seminale umano, un valore medio di  $pH = 7.34$  e di  $[H^+] = 4.57 \times 10^{-8}$ .

È noto però, che la variazione della concentrazione in ioni  $H^+$  di una soluzione per effetto della temperatura è assai differente a seconda della natura del liquido, e che il coefficiente di temperatura – ossia la variazione del pH per grado centigrado – è inoltre variabile per uno stesso liquido, secondo la temperatura alla quale si studia il valore di questo coefficiente. La temperatura è infatti capace di influenzare diversi fattori e la variazione del pH, che si osserva, è una risultante di questi effetti. Di conseguenza per lo sperma può avvenire diversamente che per il sangue, e perciò siamo convinti della necessità di ricercare sperimentalmente, per lo stesso liquido seminale, i coefficienti di temperatura nonchè le formule, che permettono di calcolare i valori in funzione degli scarti di temperatura. A tale intento precisamente sono dirette nostre esperienze in corso.

Nel caso di conservazione del liquido seminale, a temperatura ambiente (16–18° C.), sotto olio di paraffina, il pH si mantiene costante o quasi nelle prime ore, poi si comincia a delineare una diminuzione, che si va presentando sempre più netta, per diventare abbastanza marcata dopo 50–60 ore; la mobilità e la vitalità degli spermatozoi si conserva quasi perfettamente entro i suddetti limiti di tempo.

Come appare dalla Tab. II, è netta invece e rapida la variazione del pH, che si ha allorquando il liquido seminale viene in contatto con l'aria. Si può dire che, in linea generale approssimativa, in tal caso si ha una variazione del pH in ragione di + 0.02 circa per ogni minuto di esposizione durante i primi dieci minuti, e in ragione di + 0.01 per minuto durante la prima ora. Si ha un pH massimo di 8.91 circa dopo 3–5 ore di esposizione, e tale valore rimane poi pressochè costante nelle ore successive. In qualche caso si è notato anche un valore di pH 9.15 circa dopo 24 ore, ossia quel valore limite, che ci permette di pensare a liquidi pressochè privi di acido carbonico libero.

Per effetto dell'esposizione all'aria, a mano a mano che il pH va aumentando, va di contro diminuendo la mobilità e la vitalità degli spermatozoi, per arrestarsi del tutto dopo 3–5 ore.

I dati riferiti sono quelli ricavati, come abbiamo detto, sperimentando sul liquido seminale di tre soggetti: per quanto essi si corrispondano da un soggetto all'altro, tuttavia le osservazioni saranno ancora estese al liquido seminale di altri soggetti normali, o eventualmente tarati da pregresse malattie sessuali o dell'apparato uro-genitale. I valori riportati inoltre sono stati ottenuti finora sperimentando con il metodo elettrometrico, e adoperando l'elettrodo a chinidrone a vaso chiuso (siringa-elettrodo Mislowitzer); saranno successivamente controllati, adoperando altri tipi di elettrodi, ed eventualmente con altri metodi, diretti o indiretti, di determinazione del pH. Notiamo per intanto, che i valori superiori a pH 8,50 sono dati con l'errore noto, che l'elettrodo a chinidrone apporta, operando su liquidi così alcalini.

La spiegazione più facile, e forse più ovvia, delle variazioni del pH osservate nei due casi diversi di conservazione (al riparo o non dall'aria) va ricercata in un giuoco di  $\text{CO}_2$ , ovvero in una variazione della sua pressione parziale nel liquido in parola, e di prodotti provenienti dall'attività degli spermatozoi. Nei campioni esposti all'aria si avrebbe cioè una perdita continua, ossia una diminuzione progressiva della pressione parziale di  $\text{CO}_2$  (il cui valore normale nel liquido seminale è da accertare, ma molto verosimilmente pari a quella del sangue): di conseguenza, aumento del pH. Nei campioni invece raccolti e mantenuti al riparo dall'aria, sotto olio di vasellina, noi determinavamo il pH a pressione parziale di  $\text{CO}_2$  sconosciuta, ma sempre costante e presumibilmente corrispondente, o quasi, a quella esistente « in vivo ». Prolungando la conservazione si avrebbe aumento della pressione parziale di  $\text{CO}_2$  del liquido, e aumento di prodotti acidi per continuata attività degli spermatozoi: di conseguenza, diminuzione del pH. Le lievi variazioni in aumento notate in qualche caso nelle prime ore di conservazione potrebbero rimanere spiegate dalle piccole quantità di  $\text{CO}_2$  che passano in soluzione nell'olio di vasellina.

Si impone piuttosto di accertare fino a che punto il comportamento della mobilità e della vitalità degli spermatozoi, a seconda del modo di conservazione del liquido, dipenda dalle possibili suaccennate variazioni della pressione parziale di  $\text{CO}_2$  in seno al liquido stesso.

Per intanto ci limitiamo a rilevare, che queste prime osservazioni già da sole ci sembrano sufficienti a suggerire numerosi problemi connessi, che meritano tutti di essere esaminati, e di cui ci proponiamo in seguito lo studio.

Riflettendo poi su quanto è stato indagato per il sangue, ci pare che tutto possa essere ripetuto per il liquido seminale, allo scopo di accertare fino a che punto i due liquidi presentino analogie di organizzazione chimico-fisica: sarà perciò importante indagare anche per il liquido seminale il valore del potere tampone, quello della riserva alcalina, la costante di Henderson-Hasselbalch ecc.

Preliminari osservazioni già eseguite ci permettono intanto di poter affermare, che diluizioni da 1 a 4 del liquido seminale con soluzione neutra di NaCl a 0.9 % non hanno alcun effetto sul valore del pH. Ma su ciò ritorneremo più diffusamente in una prossima Nota.

Per concludere, rimane per ora fissato, che il liquido seminale umano, per la determinazione della sua concentrazione in ioni  $H^+$ , va raccolto, conservato ed esaminato al riparo assoluto dall'aria; che in tali condizioni il valore medio del pH, a 18° C., è di 7.58; che il contatto con l'aria modifica notevolmente e rapidamente questo valore, spostandolo verso l'alcalinità e determinando la morte degli spermatozoi entro le prime cinque ore, e che la conservazione sotto olio di vasellina modifica invece solo lievemente e lentamente lo stesso valore, spostandolo verso l'acidità, e permettendo nel frattempo la conservazione della mobilità e vitalità degli spermatozoi anche per 50-60 ore alla temperatura ambiente di 16-18° C.

**Fisiologia.** — *Ricerche sulle variazioni istologiche della tiroide nella cavia durante il ciclo dell'estro.* Nota di T. PERRI, pres. dal Corrisp. S. BAILIONI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

## **Commemorazione dell'Astronomo Dalmata Ruggero Giuseppe Boscovich.**

tenuta dal Socio EMILIO BIANCHI nella Seduta del 7 marzo 1937.

Diremo alla fine il perchè di questa commemorazione.

Ruggero Giuseppe Boscovich nacque il 18 maggio 1711, a Ragusa, allora da tempo repubblica indipendente. Padre suo fu Niccolò, ragusèo di origine e che, dopo vicende diverse, era ritornato in patria onde esercitarvi la mercatura. Madre sua fu Paola Bettera, di famiglia oriunda bergamasca.

Ultimo di cinque fratelli maschi che, con tre sorelle, avevano allietata l'unione di Niccolò con la Bettera, Ruggero Giuseppe Boscovich a 15 anni passò a Roma ove vestì l'abito di gesuita il 31 ottobre 1726, dedicando il quadriennio di noviziato a studi severi così nelle letterarie come nelle teologiche discipline e nelle filosofiche. Ventura volle che Egli avesse come suo primo maestro al Collegio Romano quel Padre Carlo Nocetti che certo non fu uomo di singolare rinomanza, ma che a quei tempi era noto a tutti specialmente quale autore di due poemetti: sull'« Iride » l'uno, e sull'« Aurora boreale » l'altro. È da qui che il Boscovich inizia i suoi primi studi di questioni fisiche; studi ai quali associò poi quelli delle matematiche non appena divenne maestro suo di tali discipline, sempre al Collegio Romano, il Padre Borgondio.

E così rapido fu il progresso dell'intelligentissimo alunno che, dopo aver con facilità singolare appreso i fondamenti della geometria e dell'algebra, potè senz'altro passare all'analisi differenziale e di lì allo studio di quella che allora era per tutti, e giustamente, l'opera somma fra le somme, i « Principia » di Isacco Newton, dal Boscovich subito e tanto bene compresi e sviscerati da meravigliare colleghi e maestri. È sino da allora (certo generate specialmente dalla straordinaria facilità che Egli aveva di imparare le cose più difficili e di esse discutere originalmente) che sorsero in Lui, e man mano si fissarono come caratteristiche precipue dell'animo Suo, quel grande concetto di sè e quella costante aspirazione alla nomèa ed alla gloria che mai più lo abbandonarono nella lunga vita e che d'altra parte, associati alla focosità del carattere ed alla sempre scarsa misura del linguaggio, furono cause non ultime di molti suoi dolori.

Stando col Noceti, ecco il Nostro indurlo ad una ristampa de' suoi due poemetti già ricordati, ma porgendogli una collaborazione che in realtà fu un rifacimento della teoria dei due fenomeni ivi illustrati; rifacimento com-



piuto dal Boscovich con tanta semplicità di mezzi analitici e con tale profondità e chiarezza di conclusioni da richiamare anche per questo su di sè l'attenzione di tutto il mondo fisico-matematico dell'epoca.

E ancor più tale attenzione si accese e si riconfermò allor quando il Boscovich, ultimato il corso di filosofia e mentre insegnava grammatica e lettere (dal 1734 el 1739), incominciò, sino dal 1736, a tenere in Roma, ed a pubblicare, quel ciclo di dissertazioni su argomenti diversissimi che, se danno oggi a noi l'impressione di una attività forse eccessivamente tumultuosa e talora quindi non abbastanza profonda, non potevano non causare impressione straordinaria nei contemporanei, a tutto beneficio del giovane gesuita.

Incominciò Egli con la dissertazione sulle Macchie solari, cui seguì quella sul passaggio di Mercurio sul disco del Sole nel 1737; poi ancora sull'Aurora Boreale, sul Telescopio diottrico nelle osservazioni celesti, sulla figura della Terra, argomento a quei tempi discusso assai, come necessariamente doveva essere per la già avvenuta enunciazione dell'ipotesi ellissoidica e la contemporanea debolezza ed incertezza delle prove dimostrative di essa.

Il Boscovich, infatti, esaminate acutamente le due teorie, la sferica, cioè, e la ellissoidica, conclude appunto col dichiarare immatura una decisione, causa la insufficienza degli argomenti presentati dai fautori della seconda.

E di tante altre dissertazioni si potrebbe qui far cenno, se il tempo non ci urgesse a proseguire rapidamente.

Da tutto quanto precede ben facilmente si comprende come il Boscovich, all'atto di iniziare il suo quarto anno di teologia, ne fosse senz'altro dispensato perchè ritenuto già più che provetto in tale studio; e contemporaneamente (1740) venisse senz'altro nominato successore del Borgondio nello insegnamento delle matematiche al Collegio Romano.

È da allora che completa si sviluppa la genialissima e potente personalità sua, sorta all'orizzonte della speculazione naturalistica proprio nell'epoca in cui si sentiva immancabile, sì, ma non ancora assicurata, una rapida maturazione delle nuove verità.

A quei tempi, infatti, tutti i grandi precursori avevano già parlato e da molti decenni ormai; ultimo fra essi Isacco Newton il quale attraverso i ricordati suoi « Principia » aveva, per così dire, compiuta definitiva la consacrazione del nuovo indirizzo scientifico promosso ed affermato dal Rinascimento. Tuttavia lo studio filosofico di allora, in Roma specialmente, era ancora estraneo ad una completa accettazione delle nuove direttive di pensiero; ed i riformatori dell'Astronomia, ad esempio, ancora vi erano considerati come dei ribelli che a torto avevano voluto ed osato rivoluzionare la Scienza del Cielo.

È vero che tutto faceva ormai presagire vicina la vittoria definitiva; ma insomma il tempio della libertà di pensiero scientifico ancora non aveva del tutto spalancate le sue porte.



Nessuna meraviglia quindi che una tale situazione spirituale abbia finito per riflettersi un poco su taluna delle prime opere del Boscovich; ad esempio su quella che tratta del flusso e riflusso del mare (1747-48), che appunto per ciò non è certo delle più degne di encomio. Ma, dopo di aver detto questo, giustizia vuole si soggiunga subito che Egli, dotato com'era di una mente e di un carattere eminentemente conclusivi, non fu più nemmeno sfiorato dal pericolo di perdersi in oziose, inconcludenti e vane discussioni ed elucubrazioni; ma obbedì invece alla natura intrinseca del suo spirito che non poteva condurlo se non a fatti concreti ed a concrete realizzazioni. E ciò anche quando la via da lui battuta parve, e fu, quella di una troppa, anzi eccessiva, ed oscura prolissità.

Prolisso è certamente il suo poema in versi latini sulle eclissi, pubblicato a Londra nel 1760 col titolo « *De Solis et Lunae Defectibus* », da taluno forse troppo lodato e che nel 1779 ebbe anche una edizione francese, curata da Padre Baruel, e dal Boscovich dedicata al Re di Francia Luigi XVI.

Ma prolisse non sono di certo le numerose note relative al calcolo delle orbite cometary iniziate sino dal 1746. Qui il Boscovich fu anzi un vero precursore; perchè, se dopo di lui fu concluso in un completo sistema analitico tutto quanto concerne la soluzione del problema, nella numerosissima serie di coloro che diedero contributi concreti ad esso, il Boscovich occupa il posto ben onorevole di terzo, dopo Isacco Newton e Leonardo Eulero, con un suo metodo di determinazione delle orbite cometary che fu senza dubbio il migliore fra quelli escogitati ai tempi suoi, ma di cui è inutile dire qui per esteso.

Quest'uomo, che per assolvere incarichi diversi ed importantissimi (frutto della grande considerazione che lo circondava) intraprese numerosi viaggi in quasi tutte le capitali europee; e che, pur mantenedosi fedele ai vincoli del suo abito sacerdotale, non disdegnò una vita tutta di movimento e di incessante adesione alle più notevoli manifestazioni religiose, culturali e sociali del tempo suo; che, mentre disserta di metafisica, accetta nel contempo, ed a più riprese cura con grande attenzione ed energia, il patrocinio di Ragusa, accusata dall'Inghilterra di favoritismi marittimi alla Francia, e poi strenuamente la difende ancora, facendo giungere la sua voce a Vienna, Pietroburgo e Varsavia, allorchè fu minacciata dalla Russia, e che poi ancora a Vienna difende la repubblica di Lucca contro il governo di Toscana in controversie per lo scolo delle acque del lago di Biéntina; che poeta, in nobili versi, per nozze, per inaugurazioni, per lodi a principi e per cose di scienza, mentre scrive di ville antiche, di bufere e di viaggi; che indaga sui danni e sulla stabilità della cupola di S. Pietro, della Biblioteca di Vienna e della guglia del Duomo di Milano, mentre tratta di idraulica, studiando la corrosione degli argini dei fiumi e disputando sul regime del Tevere,

del Panaro, del Tidone, dell'Adige, del Po e di altri; che disputa sulla riforma dei porti di Ancona, Brindisi, Magnavacca e Savona, nonchè sul prosciugamento delle Paludi Pontine, mentre incessantemente detta di Matematica, di Geometria, di Fisica-Matematica, di Ottica e di Astronomia; e che così facendo dimostrasi ad un tempo acuto analista, fisico profondo e critico ed esecutore sicuro delle più delicate osservazioni e misure, sì geodetiche che astronomiche, nonchè valoroso conoscitore dei pregi e dei difetti dei più delicati apparati e strumenti; quest'uomo, dicevo, che dimostrava una mente atta ad ogni più difficile indagine in un'epoca nella quale le ricerche matematiche, fisiche ed astronomiche presentavano problemi insoluti numerosissimi e di importanza fondamentale, non poteva non apparire addirittura eccezionale.

E noi, che abbiamo la ventura di vivere invece in tempi nei quali molti dei problemi ora accennati sono da tempo vinti per soluzioni radicali, possiamo, sì, rilevare, diciamo pure anche con disappunto, che il Boscovich non abbia saputo circoscrivere almeno un poco l'amplissima cerchia delle sue attività; ma ciò facendo non dobbiamo dimenticare quanto Egli, frutto del suo ingegno acutissimo, abbia saputo concretamente conquistare, e come d'altra parte, l'operosità sua non potesse non essere inesorabilmente guidata anche dall'altra caratteristica peculiare del suo pensiero e dell'animo suo; da quella sempre insoddisfatta aspirazione, cioè, alla notorietà per la quale Egli fu sempre attratto a segnalarsi in quanti più campi gli fosse possibile di autorevolmente ed autoritariamente intervenire.

Tutto ciò ho desiderato di dire, anzitutto per tentare di dar subito almeno un'idea globale e complessivamente esatta della personalità del Boscovich; poi anche per giustificare sino da ora me stesso se ulteriormente mi riferirò sopra tutto al Geodeta ed all'Astronomo con particolare riferimento all'opera sua in vantaggio della Specola di Brera di cui Egli fu il fondatore.

Non posso tuttavia passare sotto silenzio un cenno almeno dell'opera del Boscovich stampata a Vienna nel 1758 dal titolo *Theoria Philosophiae Naturalis redacta ad unicam legem virium in natura existentium* e che ebbe una ristampa a Londra nel 1922, con l'aggiunta della traduzione in inglese del testo.

Il Boscovich dice di averla stesa in soli trenta dì, perchè già in possesso di molto materiale da tempo accumulato.

Certo trattasi di opera vastissima, ma disordinata assai e di non facile lettura.

Quale ne è il valore intrinseco? Può essa considerarsi veramente, come taluno vorrebbe, quale preludio alle idee che si maturarono più tardi circa la natura delle forze e della materia?

Io penso che qualche cultore di Storia della Scienza dovrebbe affrontare il non lieve problema di uno studio approfondito di essa, onde giungere in merito ad un giudizio sereno, fondato e definitivo.

E ciò tanto più in quanto è veramente impressionante il leggere cosa ne pensasse lo stesso Autore; ecco infatti quanto Egli ne scrisse:

« Nella prima parte io espongo la mia legge delle forze, che nelle gran distanze s'accostano infinitamente all'attrazione Newtoniana, ma che nelle piccole elleno sono quando attrattive quando repulsive, di maniera che diminuendo le distanze all'infinito, la repulsione per lo contrario s'accresce all'infinito. Io esprimo queste forze con una curva, che ne pone sotto gli occhi la legge, e con una equazione algebrica, che ne fa vedere l'unità e la regolarità. Io dimostro positivamente l'esistenza di questa legge, il che fa vedere che la mia teoria non è un'ipotesi arbitraria: rispondo all'obiezioni; ne deduco la natura dei primi elementi della materia, che nella mia teoria sono per necessità punti semplici e indivisibili, collocati in piccole distanze fra loro in modo che non vi ha estensione continua ne' corpi. Questi sono per così dire formati in miniatura e non a tratti di pennello; la materia è dispersa nel vuoto e non il vuoto nella materia. Nella seconda parte, o sia libro dell'opera, applico la mia teoria a tutta la meccanica, e nella terza a tutta la fisica generale, e ai fondamenti di tutta la fisica sperimentale ».

È vero che siamo in un'epoca nella quale ancora dominava il prolisso discorrere a lungo assai di metafisica; ma, dato l'uomo, non posso che rinnovare il voto di una chiarificazione circa l'efficienza intrinseca di quest'opera.

Come desiderabile sarebbe che da qualche competente venisse riesaminata tutta l'opera del Boscovich concernente l'Ottica, onde precisare qual parte di essa debba considerarsi tra le ricerche originali e di priorità in tale disciplina.

Passiamo ora a dire del geodeta e dell'astronomo con particolare riferimento a Brera.

Come ho già accennato, verso la metà del secolo XVIII si agitava fra i dotti la questione della forma della Terra, questione che li teneva ancora divisi fra la concezione sferica e quella ellissoidica.

Il Boscovich giustamente pensava che solo da misure di molti archi di meridiano, diversamente posti non solo in latitudine ma anche rispetto alle molteplici accidentalità della superficie terrestre, si sarebbero potuti dedurre dati definitivi per la risoluzione pratica del problema.

Ed era Egli di tal pensiero, allorchè seppe che il Re del Portogallo, Giovanni V, aveva incaricato il suo Ministro a Roma di far ricerche di alcuni Padri Gesuiti, abili nei rilievi geodetici, onde affidare loro la esecuzione della carta del Brasile.

Il Boscovich, che pare avesse allora ragione di dolersi di taluni suoi amici romani, desideroso di lasciare Roma, offerse senz'altro l'opera sua, alla sola condizione che gli venisse concesso di rilevare, in Brasile, qualche arco meridiano.

E le trattative erano già concluse, allorchè ne ebbe sentore il Cardinal



Silvio Valenti Gonzaga, Segretario di Stato di Benedetto XIV, il quale dispose senz'altro che il Boscovich non si movesse da Roma e si preparasse invece ad eseguire in Italia, sotto gli auspici della Santa Chiesa, la desiderata indagine geodetica astronomica.

Fu così che lo Stato Pontificio si assicurò il privilegio di organizzare per primo in Italia operazioni astronomiche-geodetiche in grande stile, con programma non solo di ordine generale scientifico (la figura della Terra), ma altresì di ordine pratico, in quanto si vide nella progettata ricerca un'ottima occasione anche per procedere a quella radicale revisione cartografica dell'Italia Centrale che da tutti era ritenuta di urgente necessità.

E poichè modesta assai doveva ritenersi ad ambedue gli scopi la efficienza delle poche misure sino allora compiute nello Stato della Chiesa; nè potendosi pensare a rilievi di archi di parallelo, causa la grande deficienza di precisione dei metodi allora in uso per le longitudini, ritenne giustamente il Boscovich di doversi riferire alla misura di un arco di meridiano, scegliendo quello ampio circa due gradi che da Roma sale su sino a Rimini; arco che misurò assieme al Padre Cristoforo Maire, pur esso valoroso cultore dell'Astronomia e della Geodesia.

Le operazioni, iniziate nel 1750, compresero:

1° La misura di due basi, una all'inizio ed una alla fine dell'arco; la prima sulla Via Appia, dalla Tomba di Cecilia Metella al Casale delle Frattocchie, di 11.966 metri; l'altra sul litorale adriatico dalla foce dell'Ausa verso Pesaro, di 11.767 metri; basi misurate con pertiche campioni opportunamente controllate;

2° La esecuzione di una rete trigonometrica fondamentale di 9 triangoli, compresi fra le due basi e definiti angolarmente con tanta bontà di misure che attraverso ad essi la lunghezza della base romana, calcolata per controllo partendo da quella adriatica, risultò di appena 1,89 metri diversa da ciò che aveva dato la misura diretta (due metri su dodicimila; si pensi all'epoca dell'operazione);

3° La misura dell'ampiezza angolare dell'arco meridiano mediante la determinazione della latitudine di Roma (Collegio Romano) e Rimini (casa Carampi); ampiezza che risultò di  $2^{\circ} 9' 46'', 1$ . E poichè la triangolazione aveva dato, fra gli estremi dell'arco, la distanza di metri 240.163 se ne dedusse il valore medio dell'arco di un grado a quella latitudine (fra  $42^{\circ} 30'$  e  $43^{\circ} 30'$ ) di metri 111.054; notevolmente minore del vero e di quanto indicavano le misure in Francia del Cassini; e ciò causa la non lieve influenza perturbatrice esercitata sulle verticali estreme dalla catena montuosa dell'Appennino posta in mezzo, e che, come il Boscovich aveva previsto, doveva provocare un eccesso nell'ampiezza angolare dell'arco, e quindi una attenuazione, rispetto al vero, nel valore lineare dell'arco di 1°;

4° Una fitta rete di triangoli di 2° ordine inseriti fra i 9 della triangolazione fondamentale, donde la posizione sicura di ben 84 località; rife-

rendosi alle quali il Padre Maire dedusse e disegnò la nuova Carta dello Stato Pontificio che vide la luce nel 1755 e che riscosse lode incondizionata da tutti, ben dimostrando quanto fosse urgente la revisione profonda con essa attuata.

Basterebbe questa opera con le considerazioni teoriche e strumentali di cui il Boscovich ne ha ornata la relazione per dare fama imperitura a questo uomo veramente singolare anche nel campo geodetico.

Circa sessanta anni dopo, la verifica del lavoro del Boscovich, eseguita dagl'ingegneri geografi francesi addetti al governo di Milano e da Barnaba Oriani, diede piena conferma dell'anomalia prevista e constatata dal Nostro; al quale si deve anche riconoscere il grande merito di una ben larga visione del problema per aver promosso altre imprese simili in Austria ed in Piemonte.

È stato il Boscovich infatti a indurre il Re di Sardegna, Carlo Emanuele III, a far eseguire la misura di un arco di meridiano nel suo Stato, quello compreso tra Mondovì ed Andrate, onde precisare anche colà, ancor meglio, cioè con ammontare ancora più accentuato, ed in senso opposto a quanto avvenne per l'arco dello Stato Pontificio, l'anomalia nella direzione delle verticali estreme dell'arco, causata dalla maggior entità delle masse montuose alpine e dalla disposizione di esse e dell'Appennino Ligure rispetto alle verticali stesse.

Fu così che il Padre Beccaria, fra il 1760 ed il 1764 eseguì la misura dell'arco anzidetto, dando piena conferma anche qui alle idee del Boscovich; misura che, come è noto, generò dibattiti e discussioni (specie per la accentuatissima entità della deviazione della verticale riscontrata dal Beccaria) delle quali non è qui il luogo di riferire se non per dichiarare che il tempo galantuomo finì col restituire al Beccaria la fama cui egli aveva preciso diritto.

Nel 1763 la personalità scientifica del Boscovich era così universalmente nota ed apprezzata, assieme alla sua eccezionale e multiforme attività, che, reduce da un viaggio a Costantinopoli e Varsavia, gli fu offerto dal Senato di Milano il posto di professore di matematica all'Università di Pavia.

Quale valore assegnasse il Boscovich a tale invito e come lo accettasse volentieri, può rilevarsi dalle seguenti parole sue, con le quali, in verità senza troppa modestia, dà annunzio della cosa ai reggitori della Repubblica Ragusea il 27 dicembre 1763:

« Sentiranno forse anche altronde che essendo stato con acclamazione spontanea, che è senza esempio, e con un annuo assegnamento, pur senza esempio, di 330 zecchini di primo ingresso invitato dal Senato di Milano ad una lettura di matematica in Pavia, coll'approvazione del mio Padre Generale, ho accettata l'offerta, onde da qui innanzi dovrò fare ivi il mio soggiorno ecc. ecc. ».

Or bene: a quell'epoca il Palazzo di Brera in Milano era occupato dai



Padri Gesuiti, che dalla metà del secolo vi tenevano non solo il loro ritiro, ma altresì un floridissimo Collegio di studi superiori, una specie di Università, comunemente nota, poi, sotto il nome di Scuole Palatine di Milano, dove si insegnava filosofia e teologia, comprendendo allora gli studi filosofici anche il campo delle discipline matematiche e fisiche.

Erano poi alcuni di quei Padri, se non degli astronomi veri, però dei buoni dilettanti; e come tali, desiderosi d'iniziare a Brera lo studio del cielo, vi avevano chiamato nel 1762 dalla Specola di Marsiglia il collega loro Padre Luigi Lagrange. A capo del Collegio stava il Rettore Padre Pallavicini.

Il Boscovich, venuto a Brera da Pavia per le vacanze del 1764, preceduto com'era da fama non solo di valoroso matematico, fisico ed astronomo, ma altresì di valentissimo ingegnere, fu dal Pallavicini richiesto di consiglio circa l'erezione in Brera di quell'osservatorio astronomico che i Padri desideravano avere. Consiglio che il Boscovich diede subito, scegliendo quale sede l'angolo sud-est del Palazzo e compilando un progetto nel quale tutte le questioni relative alle caratteristiche delle volte, degli archi, delle legature per dare robustezza sicura all'edificio, furono così felicemente risolte che il progetto stesso, approvato e lodato dal Duca di Modena, Governatore della Lombardia, e dal Ministro conte di Firmian, passò rapidamente all'inizio dell'esecuzione; tanto rapidamente che tutto era già portato a quasi finale compimento in poco più di un anno, sulla fine del 1765. E ciò (è bene dirlo) non ostante gli ostacoli frapposti da quelli fra i Padri di Brera che non vedevano di buon occhio tanto dispendio di tempo e di denaro a servizio di una scienza da loro giudicata profana; ma grazie invece alle cure del Boscovich, non solo ma anche al suo personale contributo alle spese che, per le prime costruzioni, fu di 1000 scudi, con l'aggiunta di altre 4000 lire milanesi, sborsate del suo nella nobile ansia di far tutto progredire rapidamente, specie per quanto concerneva il montaggio e la rettifica dei primi istrumenti installati.

Ma se gli inizi del nuovo Istituto furono tutt'altro che facili, la vita di esso divenne addirittura critica col dicembre del 1765, allorquando, contro le speranze e i desideri di tutti, in ispecie del Boscovich, fu decretato il cambiamento del Rettore del Collegio, subentrando al Pallavicini, caldo fautore della nuova specola, il Padre Ignazio Venini, di essa assai meno entusiasta.

La fabbrica era quasi ultimata, molti istrumenti erano già comperati, altri in ordinazione, e tuttavia poco mancò che l'impresa corresse grave pericolo, se a salvarla non fosse intervenuto il grande interesse a Brera sempre dimostrato dal governo di Vienna,

\* \* \*

Il nuovo Osservatorio comprendeva una grande sala per i Quadranti Murali (istrumenti a quei tempi tenuti in grande considerazione); e di un'altra sala ottagonale per gli istrumenti minori, con terrazze e con due piccole cupole

mobili, che più tardi diventavano quattro, collocate ai quattro angoli di nord-est, nord-ovest, sud-est e sud-ovest della grande sala ottagonale anzidetta.

Il complesso, che nel suo insieme ricordava molto quello che poi si disse l'Osservatorio di Greenwich e che allora ancor si chiamava col nome di « Flamsteed House », riscosse lodi universali anche per la sua dotazione strumentale che, alla fine del 1766, comprendeva: un sestante di Canivet costruito a Parigi sotto le cure dirette del Lalande, una piccola macchina parallattica, uno strumento dei passaggi, un conta secondi e un pendolo compensazione. In più, parecchi telescopi minori, montati nella sala ottagonale per la determinazione del tempo, per le osservazioni solari ecc. In lavorazione a Parigi presso lo stesso Canivet, vi era poi un Quadrante Murale di 6 piedi di raggio, che però giunse a Milano solo nel 1769.

Questo nelle linee generali l'inizio dell'Osservatorio di Brera fondato dai Padri Gesuiti fra il 1764-65 sul progetto del Boscovich.

A proposito dei primi anni di vita del nuovo Istituto, è da dirsi che, se possediamo in merito notizie assai scarse (causa specialmente il fatto che il P. Lagrange, che vi funzionava da Direttore, al momento del suo ritorno in Francia del 1777, asportò e tenne seco la maggior parte delle sue carte), tutto invece conosciamo di ciò che vi operò il Boscovich e possiamo dire che in quei primi anni (dal 1766 al 1772) sua cura precipua fu una rigorosa ed originalissima serie di operazioni dirette alla rettifica e disamina di tutti gli strumenti, nonchè la compilazione di quello che avrebbe dovuto essere il programma di lavoro della nuova Specola.

Nel quarto dei cinque volumi costituenti la grandiosa edizione delle Opere del Boscovich di Ottica e d'Astronomia (« Opera pertinentia ad optican et astronomiam ») uscita per sua cura a Bassano nel 1785, egli ribadisce il principio fondamentale (che enunciato a quei tempi designò in lui un precursore anche nel campo della tecnica strumentale) secondo il quale vero astronomo è solo chi abbia anche fatto dei suoi strumenti uno studio così profondo ed esauriente, non solo da essere sicuro di conoscerne tutti i pregi e tutti i difetti, ma altresì da saper concretare, per ogni ricerca, quel complesso di prove e misure atte a permettere di concludere le correzioni da apportarsi ai dati strumentali, onde liberarli dalla influenza degli errori intrinseci e dei difetti di rettifica.

« Illud conatus sum, ut proponerem methodum, qua Astronomus in sua Specula possit per se ipse videre omnia, et cognoscere vim instrumentorum suorum » ecc.

Non possiamo qui dilungarci nella descrizione delle tante e tante operazioni eseguite dal Boscovich e dal Lagrange per lo studio del sestante di Canivet, allora strumento principale dell'Osservatorio; qui basterà dire che esso fu dal Boscovich indagato circa gli errori di divisione del lembo di grado in grado e circa la reciproca postura dei due assi strumentali. Così pure passo sotto silenzio lo studio ch'egli fece degli altri strumenti minori,

per accennare in poche parole alle lunghe e minuziose operazioni da lui dedicate con fervido entusiasmo sempre e sempre con originalità di vedute davvero magistrale al nuovo Quadrante Murale del Canivet; operazioni anch'esse descritte nel ricordato Vol. 4 delle Opere sue.

Ad esempio: per esaminare se tutto il lembo del quadrante giacesse rigorosamente in uno stesso piano, tenta egli un procedimento affidato ad un indice portato da un galleggiante che percorre un canale d'acqua disposto lungo il bordo e lungo i due raggi estremi di esso; con risultati infelici, causa la diversa flessione del complesso metallico a seconda dei diversi punti di appoggio di esso.

Ripresa poi la ricerca con Quadrante verticale e seguendo altri criteri, precisa l'errore costruttivo indagato e lo rettifica, così come ne studia gli errori della divisione. Infine indaga il modo migliore per equilibrare in ogni posizione sua il peso del cannocchiale del Quadrante imperniato al centro nei pressi dell'obbiettivo, giungendo alla conclusione che, onde ottenere identico equilibramento per tutte le posizioni del cannocchiale a mezzo di un peso attaccato ad una fune avvolta su di una puleggia, duopo si era che detto peso scorresse lungo una certa curva che egli calcola, che gli risulta dell'ottavo grado, che egli fa costruire ed applicare allo strumento con risultati quanto mai felici. L'originalità e la indipendenza del pensiero suo si affermano in ogni circostanza!

Di molte altre ricerche, di molti altri progetti del Boscovich, tutti diretti a dare maggior efficienza alla nuova Specola, io dovrei dire; ma passo oltre; desideroso come sono di accennare almeno a due circostanze dell'opera sua a Brera di particolare importanza; intendo alludere alle indagini che egli si era proposto di compiere intorno all'aberrazione delle fisse, donde i suoi reiterati sforzi per ottenere che l'Osservatorio fosse dotato di un settore zenitale con due cannocchiali, uno comune e l'altro da riempirsi d'acqua; ed intendo alludere anche, come ho già accennato, al programma generale di lavoro da lui concretato per il nuovo Osservatorio.

Quale fosse la ricerca che il Boscovich intendeva eseguire col doppio cannocchiale è detto in una sua lettera del 1766 al Padre Beccaria; e poi ampiamente illustrata nel tomo II° delle già citate sue Opere.

Una lunga serie di distanze zenitali meridiane eseguite su determinate stelle al momento di più accentuato importo aberrazionale in declinazione, dovevano servire, al cannocchiale comune, per una nuova determinazione della latitudine di Brera, della comune costante dell'aberrazione e della nutazione. Il paragone poi di esse con quelle simultaneamente ottenute col cannocchiale ad acqua avrebbe illuminato circa la teoria newtoriana della luce.

Poichè il Boscovich conduceva i suoi ragionamenti nel campo della teoria dell'emissione, giustamente diceva che la propagazione della luce doveva avvenire con velocità maggiore nell'acqua che nell'aria; e che quindi l'effetto aberrazionale osservato col cannocchiale pieno d'acqua avrebbe dovuto



risultare minore di quello dedotto dalle osservazioni normali. Possiamo anche aggiungere che il Boscovich giustamente ammetteva, sempre nella teoria dell'emissione, che le particelle luminose una volta entrate nell'acqua del secondo cannocchiale, non partecipassero con l'acqua stessa al moto della Terra. Solo nell'ipotesi contraria (ben ardua ad ammettersi nella teoria dell'emissione) le osservazioni coi due cannocchiali avrebbe dovuto condurre ad identici risultati. L'attesa sua era dunque del tutto logica.

Altrimenti è da dirsi e da aspettarsi, si capisce, se si ragiona sulla base della teoria ondulatoria; allora, ovviamente, le due aberrazioni date dai due cannocchiali sopra accennati devono coincidere, ed infatti così trovò l'Airy a Greenwich attuando il programma del Boscovich con osservazioni fatte su  $\gamma$  Draconis nel 1871-72, esattamente un secolo dopo, dunque, della proposta del ragusèo. Proposta che noi oggi, imbevuti come siamo della teoria ondulatoria della luce, dobbiamo considerare e valutare solo dopo aver forzato il pensiero nostro riportandolo al clima scientifico di quei tempi. Così facendo, si arriva ovviamente alla conclusione che se il Boscovich fosse stato allora ascoltato, molta e molto grave materia di meditazione circa la natura della luce sarebbe stata offerta alla speculazione dei fisici di quell'epoca.

Ma il Boscovich non fu seguito anche perchè già incominciavano a Brera le prime ostilità verso di lui; quelle ostilità di cui dovremo dire subito sotto forma di note dolenti assai ed assai dolorose, specie nei riflessi delle fortune del nuovo Osservatorio.

Per quanto concerne il programma di lavoro a questo assegnato dal suo fondatore, può ben dirsi che esso dimostra quanto Egli fosse padrone assoluto di tutto lo studio astronomico di allora. Tale programma, consacrato in un memoriale che il Boscovich consegnò al Ministro conte di Firmian nel 1772, proprio all'atto di abbandonare (come vedremo) Brera, comprendeva una vastissima serie di osservazioni, nelle quali:

I. Osservazioni di eclissi di Sole, di occultazioni di stelle per la Luna e di eclissi dei satelliti di Giove, ovviamente per le tavole lunari e per quelle del massimo pianeta.

II. Una serie grande di osservazioni della rifrazione astronomica diretta ad una radicale revisione delle tavole refrazionali allora usate a Brera, nonchè della latitudine locale.

III. Osservazioni differenziali di posizione di tutte le stelle sino alla quarta grandezza, onde dedurne le costanti dell'aberrazione e della nutazione e gli eventuali moti propri.

IV. Misure dirette alla ricostruzione della teoria del Sole attraverso osservazioni degli equinozi e dei solstizi in collegamento alla posizione di talune delle principali stelle fisse; in più, continuate osservazioni meridiane del Sole onde aver cenno delle perturbazioni esercitate dalla Luna, Venere e Giove; in più ancora continuate misure del diametro solare; infine misure della rotazione del Sole dall'osservazione delle sue macchie.

V. Osservazioni meridiane della Luna congiunte a misure del suo diametro, nonchè studio della librazione lunare da rilievi su talune macchie del disco.

VI. Osservazioni sistematiche dei pianeti maggiori onde migliorarne le teorie orbitali; indicazione, quale oggetto particolare di studio, delle scambievoli azioni perturbatrici fra Giove e Saturno.

VII. Osservazioni accurate di tutte le comete visibili e pronta applicazione, non appena possibile, del suo metodo di calcolo delle relative orbite.

VIII. Osservazioni di posizione di stelle meno lucenti ed in particolare dei satelliti di Giove.

Il memoriale finisce invocando per l'Osservatorio l'organico di due astronomi con un calcolatore, in più dell'opera sua e di quella di Padre Lagrange.

In quanto precede non è chi non veda prospettato un programma di lavoro esattamente in armonia con le più urgenti ed immediate necessità dello Studio astronomico di allora; necessità riassumibili nel principio di una ricostruzione dell'intera astronomia dalle fondamenta.

Ed eccoci prossimi alla fine con le dolenti note di cui avemmo già a far cenno.

Direttore dell'Osservatorio sino dal 1763 era il Padre Lagrange, ma costruttore e dominatore effettivo di esso era sempre stato ed era il Boscovich. Sfortuna volle che due caratteri come quelli del Lagrange e del Boscovich non potessero non venire a conflitto. Abile il primo nelle minuzie, il secondo fatto invece per ideare e creare grandi imprese; il primo prudente, minuzioso, non esigente; il secondo invece aggressivo, ardente e ben conscio di sè e di quanto il Collegio gli doveva per la creazione del nuovo Osservatorio e per la fama che il nome suo ad esso conferiva. Nell'inevitabile dissidio (nè è da meravigliarsi) i Padri Gesuiti opinarono per il Lagrange; anche perchè preoccupati del grande dispendio di mezzi che sarebbe stato richiesto dall'attuazione di tutti i programmi del Boscovich e, d'altra parte, non certo fautori dell'irrequietezza del raguseo, sempre bramoso di mettersi in vista, sempre in cerca ovunque di lodi per sè.

Il dissidio scoppiò nel 1770 quando il Boscovich, nominato alla cattedra di Ottica e d'Astronomia nelle Scuole Palatine di Milano, finì per installarsi a Brera e giungere così a contatto diretto con Lagrange. Fu, sì, diviso fra i due l'Osservatorio, assegnando all'uno alcuni strumenti e gli altri all'altro; ma insomma, dopo vicende diverse che per brevità passiamo sotto silenzio, ed in seguito ad esplicita dichiarazione dei Padri di Brera di voler per direttore il Lagrange e non il Boscovich, il Governo di Milano finì per comunicare che «benignamente e con modi assai onorevoli S. M. sollevò il P. Boscovich del pensiero e delle cure della Specula».

Ed il Boscovich abbandonata, per protesta, anche la cattedra alle Scuole Palatine, che in verità nulla aveva a che fare coll'Osservatorio, passò nel 1773



a Venezia con la intenzione di ridursi poi subito in patria. Avvenuta però nell'estate la soppressione dell'Ordine dei Gesuiti, poté Egli liberamente indirizzare le mète sue fuori d'Italia, a Parigi; dove ebbe la nomina di Direttore di Ottica al servizio della Marina francese.

Ma anche in Francia il carattere suo non valse a creargli troppi amici, sebbene potesse godervi della benevolenza del Lalande e del Messier, il famoso cacciatore di comete. Partito poi da Brera il Lagrange nel 1777, riprese il Boscovich corrispondenza scientifica coi vecchi amici della Specola milanese, specie coi prediletti discepoli suoi Reggio e Cesaris; infine è del 1782 il suo ritorno in Italia per stabilirsi, dopo talune peregrinazioni, a Bassano, dove curò personalmente, presso i Remondini, quella grande edizione delle Opere sue di Ottica e d'Astronomia, già da noi due volte citate, e che videro la luce nel 1785.

Ed è dello stesso anno un altro fatto che dev'essere stato ben caro al Boscovich: il suo ritorno a Milano, cioè, ed il suo reingresso a Brera, alla cara Brera, al caro Osservatorio da Lui fondato. Non fu possibile dargli alloggio in Palazzo dove Egli avrebbe desiderato di vivere vicino alla Biblioteca di cui aveva gran bisogno onde condurre a fine il suo Commento fisico-matematico al Poema latino di Benedetto Stuv sulla filosofia di Newton, opera cui egli pensava sarebbe stata consacrata la massima gloria sua.

Ma se non poté alloggiare in Brera, alla Specola sua fece visite frequenti e procurò benefici ancora, ottenendo per essa nuovi apparecchi, come il grande Quadrante Murale di Ramsden ed altri.

Tutto pareva dunque disposto per assicurargli finalmente una vecchiaia calma e serena, allorquando taluni contrasti, dall'animo suo e dal suo carattere forse giudicati ben più gravi della realtà, alterarono talmente il suo spirito che, dopo alcune giornate di accentuata depressione morale, divenne pazzo; anzi, pare, pazzo furioso.

Abitava Egli allora in via Brera, vicino al Palazzo di Brera, in casa del conte Trotti (oggi casa Gavazzi), che già aveva messo a disposizione dell'insigne Uomo anche una sua villa a Vimercate. Ed in via Brera rimase sino a circa il novembre del 1786, quando fu ritenuto opportuno affidarlo alla sorveglianza di un medico, il chirurgo Giuseppe Bossi, abitante nella Parrocchia di S. Maria Podone.

Al male della mente si aggiunse presto quello del corpo; chè un attacco polmonare lo condusse a morte il 13 febbraio 1787. Fu inumato nella Chiesa parrocchiale anzidetta.

Ed avrei finito se non mi corresse l'obbligo di dare la giustificazione dell'odierno elogio del Boscovich; essa sarà insieme un ammonimento a tutti per l'avvenire.

Dal dì della sua morte, che cosa ha fatto l'Italia in memoria di questo suo grande scienziato ed umanista?

Per questo illustre Uomo che svolse tutta la sua prodigiosa opera in Italia o in terre latine; che fu latino chiarissimo nell'intimità del suo spirito e dell'animo suo ed in ogni estrinsecazione della sua vita; che sempre scrisse il suo nome e il suo cognome in istile e scrittura esclusivamente italiani; per quest' Uomo, dicevo, che cosa ha fatto l'Italia?

Monsignor Angelo Fabroni, suo contemporaneo, Presidente della R. Università di Pisa e Priore nell'inclito Ordine di S. Stefano di Toscana, nella sua biografia del Boscovich, stampata nel tono IV delle « Memorie della Società Italiana », concluse il suo scritto con queste parole:

« Tale fu l'esito di questo genio sublime che Roma onorò come suo maestro, e che l'Italia tutta riguarda come un suo ornamento, e a cui la Grecia avrebbe inalzata una statua quando ancora fosse stata costretta, per darle luogo, di abbatterne qualcuna de' suoi conquistatori ».

Ecco come la pensavano i dotti di quei tempi, anche se tanto lontani ancora dall'epoca dell'unificazione della patria nostra; Roma e Italia, sicuro; ecco la città ed il paese cui deve riconoscersi il diritto di fare l'esaltazione patriottica di Ruggero Boscovich.

Allorquando nella seconda metà del secolo XVIII il Senato Veneto decretò l'erezione dell'Osservatorio Astronomico di Padova ed assegnò ad esso per sede la Torre che Ezelino III aveva costruita nel 1242 quale prigione di Stato e fortezza, il Direttore Abate Giuseppe Toaldo chiese al Boscovich un motto augurale per la nuova Specola. Ecco le parole dettate dal raguseo nel 1767, quali ancor oggi si leggono scolpite sulla Torre:

QUAE QUONDAM INFERNAS TURRIS DUCEBAT AD UMBRAS  
NUNC VENETUM AUSPICIIS PANDIT AD ASTRA VIAM

Si chiedo pure consulto nelle alte sfere della poesia e della letteratura internazionale; tutti diranno che è impossibile immaginare una testimonianza di purissima latinità ed italianità più nobile ed irrevocabile di questo meraviglioso distico che nella sua incomparabile bellezza ritmica e letteraria dice da solo più di mille argomentazioni e cavilli.

Ma insomma, che cosa abbiamo fatto noi e che cosa hanno fatto gli altri per il Boscovich?

Dobbiamo rispondere con il riconoscimento di fatti che speriamo non si debbano più ripetere nell'avvenire. È questa, al postutto, la significazione conclusiva che vorrei dare al presente atto di devozione verso il nostro grande gesuita.

Il Boscovich nasce nel 1711 e muore nel 1787.

Nel 1811 si verificò, dunque, il primo centenario della nascita; e nessuno in Italia se ne accorse.

Per fortuna, nel 1831, sebbene i nemici dell'Ordine di Gesù avessero persino tentato di minare la fama del Boscovich, il fido discepolo suo Ce-

saris e gli altri astronomi di Brera eressero in Palazzo quel monumento in omaggio alla memoria del fondatore della Specola, che ancor oggi sta degnamente ad onorarlo in Milano.

Poi viene il 1887 ed ha luogo il primo centenario della morte.

L'Accademia Jugoslava di Zagabria prende l'iniziativa di una solenne commemorazione del Boscovich, ed in tale incontro l'Italia non seppe far di meglio che inviare a Zagabria il prof. Giovanni Celoria, secondo astronomo di Brera, per portarvi l'adesione della R. Accademia dei Lincei, della R. Commissione Geodetica Italiana e della R. Specola di Brera. Sicuro! Nessuno pensò di onorare da noi quel grande Uomo. I Lincei, che pur avevano avuto rapporti col Boscovich e che già da tempo ne tenevano onorato un busto in marmo; la R. Commissione Geodetica Italiana, già detta Commissione del Grado, di quel grado che primo in Italia era stato misurato proprio dal Boscovich; e la R. Specola di Brera, che al Boscovich doveva la sua fondazione ed organizzazione, nel 1887 non seppero fare di meglio che accodarsi a Zagabria per onorare, non italiano, il celebre italianissimo scienziato.

Erano i tempi quelli, è vero, in cui, per un nonnulla, da Palazzo Chigi o da Palazzo Farnese, a seconda dei casi, potevano facilmente partire melliflue osservazioni od anche alteri rimbrotti ad ogni nostro anche minimo vagito di sia pur tiepida indipendenza di pensiero politico.

Ma non basta ancora; se si vuol leggere lo scritto dello Schiaparelli in elogio dell'opera del Boscovich a Brera, è ancora alle Memorie dell'Accademia Jugoslava di Zagabria che bisogna ricorrere; esso vi è stampato naturalmente in italiano, come lo dettò l'autore, ma col cognome del Boscovich scritto non all'italiana, ma corretto da accenti e consonanti di stampo non certo nostro. Vide la luce in occasione del bicentenario della nascita, nel 1911; da noi, anche allora silenzio assoluto!

Orbene: a Milano, come a Roma, c'è già una bellissima via intitolata a Ruggero Boscovich; e prestissimo Brera pubblicherà tutte le lettere del suo fondatore che essa possiede e che, per il centenario del 1887, già erano state concesse a Zagabria quale altro nostro concorso a quella solennità. Ce ne sono di interessantissime ed è bene che gl'italiani le possano leggere in una pubblicazione italiana, edita in onore dell'illustre raguseo. Per di più poi Brera ha in animo, d'accordo colla Soprintendenza dei Monumenti per la Lombardia, di fare indagini per tentar di identificare la tomba del Boscovich che si sa murata in un locale della Chiesa di S. Maria Podone, e, se mai, renderla nota al pubblico con opportuna iscrizione.

Noi desideriamo una cosa soltanto: contrapporre ad altre affermazioni e rivendicazioni, ricorrenti in questo 150° anniversario della morte del Boscovich, il verdetto sereno, composto e solenne della storia.

E tutto ciò ricordino gli italiani pel 1961 e pel 1987, e sin oltre sempre.

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Seduta del 4 aprile 1937 — Anno XV

Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Meccanica.** — *Sulle derivate tangenziali della funzione potenziale di superficie.* Nota <sup>(1)</sup> del Socio G. A. MAGGI.

§ 1. Mi permetto riprendere l'argomento della mia Nota *Dimostrazione di una proprietà attinente alla teoria della funzione potenziale di superficie* <sup>(2)</sup>, per una riforma che concerne particolarmente le derivate tangenziali, e che mi ha dimostrato occorrente una recente applicazione <sup>(3)</sup>.

Fondamento di quella Nota è, con

$$(1) \quad V = \int_{\sigma} \frac{k d\sigma}{r},$$

e con  $s$  indicando l'eventuale orlo di  $\sigma$ , la formola

$$(2) \quad \frac{\partial V}{\partial x} = \int_{\sigma} \frac{S ds}{r} + \int_{\sigma} \frac{k d\sigma}{r} - \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} k \alpha d\sigma$$

che io deduco nella mia *Teoria fenomenologica del campo elettromagnetico* <sup>(4)</sup>; nell'ipotesi che  $k$  ammetta derivate prime limitate e continue rispetto a coordinate curvilinee ortogonali  $u, v$  del punto corrente della superficie  $\sigma$ .

(1) Presentata nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) «Rendiconti della R. Accademia dei Lincei», vol. XIII, 1931.

(3) *Sulla rappresentazione matematica della tensione elettrostatica* in «Rendiconti del R. Istituto Lombardo», 1937.

(4) § 49.



Ivi  $\alpha$  indica il coseno dell'angolo che l'asse delle  $x$  forma colla normale alla superficie nel punto corrente  $(u, v)$ , presa col senso rappresentato da  $n$ , ed è

$$(3) \quad S = k \left( \alpha_1 \frac{ds_v}{ds} + \alpha_2 \frac{ds_u}{ds} \right),$$

dove  $\alpha_1, \alpha_2$  indicano i coseni degli angoli che lo stesso asse delle  $x$  forma colle tangenti alle linee  $u, v$  relative al punto corrente  $(u, v)$  dell'orlo, anche prese con un certo senso.

Nell'accennata Nota è omissso in (3) il fattore  $k$ . Ma, per questo, come non tarderemo a vedere, non cessa di reggere il discorso tenuto nella stessa Nota, potendoci ricondurre, in ogni caso, al caso di  $k$  costante.

Difatti, la ricerca ha per oggetto il limite di

$$(4) \quad \int_{s'} \frac{S' ds'}{r},$$

esteso all'orlo di un intorno del punto  $P_\sigma$  della superficie, collo svanire dell'intorno medesimo, dove  $S'$  deve dedursi da (3). Lo annullarsi del qual limite, indipendentemente dalla forma dell'intorno, essendo la condizione necessaria e sufficiente perchè, rappresentando  $V'$  la funzione potenziale relativa alla superficie residua  $\sigma'$ , il limite di  $\frac{\partial V'}{\partial x}$  sia il così detto valore nella superficie, in  $P_\sigma$ , del secondo membro della (2), che, per darvi un nome, potremo chiamare l'espressione formale della  $\frac{\partial V}{\partial x}$  (col termine del Morera, usato nella Nota, valore rappresentato dall'integrale proprio relativo all'espressione medesima).

Ora, in primo luogo, per essere  $k$  limitata e continua, indicando con  $k_\sigma$  il valore di  $k$  in  $P_\sigma$ , sarà

$$k = k_\sigma + \delta,$$

dove  $\delta$  svanisce uniformemente collo svanire dell'intorno. Quindi, posto

$$\Omega = \alpha_1 \frac{ds_v}{ds} + \alpha_2 \frac{ds_u}{ds},$$

si avrà

$$\int_{s'} \frac{S' ds'}{r} = k_\sigma \int_{s'} \frac{\Omega' ds'}{r} + \int_{s'} \frac{\delta \Omega' ds'}{r},$$

$$\lim \int_{s'} \frac{S' ds'}{r} = k_\sigma \lim \int_{s'} \frac{\Omega' ds'}{r},$$

che riconduce la ricerca al caso di  $k$  costante.



In secondo luogo, trascurando l'aggiunta di quantità che si annullano al limite — inteso sempre un punto regolare della superficie — si potrà, per agevolare il discorso, trasportare la costruzione, dalla superficie, sul piano tangente in  $P_\sigma$ .

Concepito questo trasporto, si riconosce senz'altro come il limite di (4) sarà lo zero, *indipendentemente dalla forma dell'intorno*, nell'ipotesi che l'asse della  $x$  abbia la direzione  $n_\sigma$  della normale alla superficie nel punto  $P_\sigma$ .

Così, il valore nella superficie, in  $P_\sigma$ , della espressione formale di  $\frac{\partial V}{\partial n_\sigma}$ , è il valore nella superficie, in  $P_\sigma$ , di  $\frac{\partial V}{\partial n_\sigma}$ .

Esaurita questa ipotesi, non resta più che da esaminare quella dell'asse delle  $x$  tangente alla superficie nel punto  $P_\sigma$ .

Usando l'accennato trasporto sul piano tangente in  $P_\sigma$ , si trova immediatamente

$$\Omega' = \cos \widehat{x s'},$$

Quindi

$$\int_{s'} \frac{\Omega' ds'}{r} = \int_{s'} \frac{\cos \widehat{x s'}}{r} ds'.$$

L'integrale è nullo nel caso che la linea — nel piano tangente — si riduca ad un cerchio, che significa una linea della superficie sferica con centro in  $P_\sigma$  come effettivo orlo dell'intorno. Ma si possono facilmente immaginare figure per le quali l'integrale non può annullarsi, e riceve un valore diverso dallo zero, dipendente da questa figura.

Così, sussistono le formole

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^+ = X_\sigma - 2\pi k\alpha, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^- = X_\sigma + 2\pi k\alpha$$

del § 51 del citato mio libro, con  $X_\sigma$  valore, in  $P_\sigma$ , nella superficie di quella che abbiamo denominato espressione formale di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , ma questo non

è il valore nella superficie, propriamente detto, di  $\frac{\partial V}{\partial x}$  — cioè colla condizione della indipendenza dalla forma dell'intorno — che nell'ipotesi dell'asse delle  $x$  normale alla superficie in  $P_\sigma$ .

Le suddette formole, per essere  $V$  continua nei punti della superficie, da ambedue le parti, rappresentano, per una nota proprietà, ad un tempo, i limiti di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , col tendere del punto esterno ad un punto della superficie,

dalle due parti, e il valore di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , nel punto, da una parte e dall'altra della superficie. Così per l'asse tangenziale ( $\alpha = 0$ ),  $X_\sigma$  rappresenta il valore comune di queste due derivate.

§ 2. Nella mia Memoria *Sulle proprietà fondamentali della funzione potenziale nell'immediata prossimità e nell'estensione dell'agente* del « Nuovo Cimento » del 1893, riprodotta, per la parte attinente alla funzione potenziale di superficie, in « Selecta », p. 273, io trovo il limite di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ , col tendere del punto P esterno alla superficie potenziente ad un punto  $P_\sigma$  di essa, nelle due ipotesi dell'asse della  $x$  tangente e dell'asse della  $x$  normale alla superficie in  $P_\sigma$ , colla condizione che  $\frac{|k - k_\sigma|}{r}$ , indicando con  $r$  la distanza da  $P_\sigma$  del punto in cui la densità ha per valore  $k$ , sia limitato e integrabile uniformemente secondo ogni raggio uscente da  $P_\sigma$  <sup>(1)</sup>. Ritrovo con questo, nell'ipotesi dell'asse normale, le suddette formole, con  $X_\sigma$  valore nella superficie di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ . Mentre, nell'ipotesi dell'asse tangente, un procedimento simile a quello usato per la determinazione dell'accennato limite, col tendere di P esterno a  $P_\sigma$ , permette di riconoscere la dipendenza dalla forma dell'intorno del limite di  $\frac{\partial V'}{\partial x}$ , collo svanire dell'intorno, per mezzo di un integrale analogo al precedente, nel piano tangente in  $P_\sigma$ .

**Meccanica.** — *Trasformazioni di Laplace e operatori funzionali.* Nota del Corrisp. G. GIORGI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Condizione conforme a quella usata dal Morera nelle sue Note sulla funzione potenziale dei « Rendiconti del R. Istituto Lombardo » del 1887.

**Astronomia** (Meccanica Celeste). — *Il problema ridotto dei due corpi di masse variabili*. Nota<sup>(1)</sup> del Socio G. ARPELLINI.

1. Come abbiamo già visto altre volte, scegliendo le unità di misura in modo da rendere eguali all'unità il coefficiente attrattivo  $f$  e la costante delle aree  $c$ , il problema dei due corpi di masse variabili si riconduce alle equazioni:

$$(1) \quad r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = 1$$

$$(2) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{1}{r^3} - \frac{m(t)}{r^2}$$

dove ovviamente  $r, \vartheta, t$  ed  $m(t)$  indicano il raggio vettore, l'angolo di posizione, il tempo e la massa del sistema variabile in funzione di  $t$ . È evidente che, dopo integrata la (2), la (1) si riduce ad una quadratura; ma, come vedemmo<sup>(2)</sup>, l'integrazione della (2) può farsi assai raramente.

2. Vi sono però due casi particolari, in cui il problema si semplifica e cioè:

a) Quando la massa del sistema varia molto lentamente in funzione del tempo, giacchè allora le derivate  $\frac{dm}{dt}, \frac{d^2 m}{dt^2}$  sono trascurabili rispetto ad  $m$  e quindi le quantità  $\frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$  e  $\frac{1}{m} \frac{d^2 m}{dt^2}$  sono molto prossime a zero. Chiameremo tal caso col nome di « problema astronomico », giacchè esso si verifica appunto per le masse stellari;

b) Quando si suppone che l'eccentricità istantanea si mantenga sempre piccolissima; caso che indicheremo col nome di « problema ridotto ».

Ovviamente le due ipotesi possono anche verificarsi simultaneamente ed allora, come ora vedremo, il problema si riconduce ad un'equazione differenziale lineare omogenea, di secondo ordine.

3. Ciò premesso, indicando con  $p, e, v$  il parametro, l'eccentricità e l'anomalia vera nella conica istantanea (che qui supporremo ellittica) de-

(1) Presentata nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) Cfr. G. ARPELLINI, *Sopra l'integrabilità del problema dei due corpi di masse variabili*. « Rend. Lincei », 1° sem. 1922.

scritta da uno dei due corpi B intorno all'altro A, abbiamo per cose note

$$(3) \quad \dot{p} = \frac{1}{m(t)}$$

$$(4) \quad r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{1}{m(1 + e \cos v)}.$$

Prendiamo ora una variabile ausiliare  $x$  definita dall'equazione:

$$(5) \quad x = - \frac{e \cos v}{1 + e \cos v}.$$

Paragonando (4) con (5), risulta allora immediatamente:

$$(6) \quad r = \frac{1 + x}{m}$$

e quindi la (2) diviene con facili calcoli:

$$(7) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} - 2 \left( \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right) \frac{dx}{dt} + 2(1 + x) \left( \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \right)^2 - \\ - (1 + x) \left( \frac{1}{m} \frac{d^2 m}{dt^2} \right) + \frac{m^4 x}{(1 + x)^3} = 0$$

la quale — essendo per ipotesi le derivate di  $m$  trascurabili rispetto ad  $m$  — si riduce immediatamente a:

$$(8) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{x m^4(t)}{(1 + x)^3} = 0$$

che possiamo considerare come l'equazione fondamentale del problema dei due corpi di masse variabili, nel caso astronomico.

4. Supponiamo ora che le derivate di  $m$  non siano trascurabili rispetto ad  $m$ , ma che invece si sappia che l'eccentricità  $e$  resta sempre piccolissima.

Eseguiamo allora la trasformazione analoga a quella già fatta:

$$(9) \quad y = - \frac{e \cos v}{m(1 + e \cos v)} = \frac{x}{m}$$

onde la (4) diverrà:

$$(10) \quad r = \frac{1}{m} + y$$

e quindi la (2) si trasforma facilmente in:

$$(11) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{y m^4(t)}{(1 + m y)^3} + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \right) = 0$$

Ora, se l'eccentricità  $e$  rimane sempre piccolissima, la (9) indica che il prodotto  $my$  sarà sempre trascurabile rispetto all'unità; in conseguenza la (11) diviene:

$$(12) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + ym^4(t) + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \right) = 0$$

la quale, riponendo al posto di  $r$  il suo valore tratto dalla (10), ci dà:

$$(13) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} + rm^4(t) = m^3(t)$$

che è un'equazione differenziale lineare, di secondo ordine, non omogenea.

Come è notissimo, adoperando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie e per mezzo di sole quadrature, la sua integrazione si riconduce a quella dell'equazione lineare omogenea:

$$(14) \quad \frac{d^2 r}{dt^2} + rm^4(t) = 0$$

dalla quale ponendo:

$$(15) \quad \log r = \int \chi(t) dt$$

otteniamo:

$$(16) \quad \frac{d\chi}{dt} + \chi^2 + m^4(t) = 0$$

che è un'equazione di Riccati.

5. Notiamo che, se l'eccentricità si conserva sempre piccolissima e se inoltre le derivate di  $m$  sono sempre molto piccole rispetto ad  $m$  — vale a dire se il problema è insieme « astronomico » e « ridotto » — non vi è bisogno di adoperare il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, giacchè si giunge subito ad un'equazione differenziale lineare omogenea.

Infatti, in tal caso, poichè  $x$  è trascurabile di fronte all'unità, la (8) si riduce immediatamente a:

$$(17) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + xm^4(t) = 0$$

e quindi ad un'equazione di Riccati.

Possiamo dunque concludere che, nel caso di piccolissime eccentricità, il problema dei due corpi di masse variabili si riconduce al primo ordine e precisamente ad un'equazione di Riccati.

Ricordiamo ancora che, in virtù di un teorema<sup>(1)</sup> da noi dimostrato, l'integrale generale della (17) tende a zero quando  $t$  tende ad  $\infty$ , se  $m(t)$  tende all'infinito in modo non saltuario.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra un'equazione differenziale della Dinamica*. « Rend. Lincei », 1° sem. 1935.



6. Per terminare studiamo il caso in cui si abbia

$$(18) \quad m(t) = (a + bt)^n$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti.

Ponendo per semplicità

$$(19) \quad a + bt = \tau$$

la (17) diviene:

$$(20) \quad \frac{d^2 x}{d\tau^2} + \frac{x}{b^2} \tau^{4n} = 0$$

la quale, ponendo

$$(21) \quad i = \frac{1}{2 + 4n} \quad ; \quad u = \frac{2i}{b} \tau^{\frac{1}{2i}} \quad ; \quad v = \frac{x}{\sqrt{\tau}}$$

si trasforma nella nota equazione di Bessel

$$(22) \quad \frac{d^2 v}{du^2} + \frac{1}{u} \frac{dv}{du} + \left(1 - \frac{i^2}{u^2}\right) v = 0$$

che ha come integrale generale

$$(23) \quad v = C J_i(u) + C' J_{-i}(u)$$

dove  $C$  e  $C'$  sono costanti arbitrarie e dove le  $J(u)$  indicano le note funzioni di Bessel.

Dei due indici  $i$  e  $-i$ , uno sarà certamente positivo: per fissare le idee, supponiamo che sia  $i$ .

Ora  $J_i(u)$  è sviluppabile in una serie, sempre convergente, la quale procede secondo potenze di  $u$  ed i cui esponenti hanno la forma  $i + 2p$ , dove  $p$  indica un intero positivo, variabile da zero ad infinito. Ponendo al posto di  $u$  il suo valore, dato dalla (21), troviamo allora che questa serie procederà secondo potenze di  $\tau$  con esponenti eguali ad  $\frac{1}{2} + (2 + 4n)p$  e quindi secondo le stesse potenze di  $a + bt$ , in virtù della (19).

Analogamente si trova che  $J_{-i}(u)$  procede secondo le potenze  $-i + 2p$  di  $u$  e cioè secondo le potenze  $-\frac{1}{2} + (2 + 4n)p$  di  $\tau$ ; quindi, per la (21),  $x$  sarà sviluppabile in una serie di potenze procedente secondo le potenze  $(2 + 4n)p$  di  $\tau$  ed infine, per la (6),  $r$  procederà secondo la stessa serie, divisa per  $\tau^n$ .

Aggiungiamo in ultimo che, se si ha:

$$(24) \quad n = -\frac{p}{2p \pm 1}$$

dove  $p$  indica sempre un intero *positivo o nullo*, non v'è nemmeno bisogno di ricorrere alle funzioni di Bessel, giacchè allora, come insegna il calcolo, l'equazione di Riccati (16), si riconduce direttamente alle quadrature.

7. Un caso particolarmente interessante si ha poi per  $n = -1$ . Allora risulta:

$$(25) \quad \frac{1}{m} = a + bt \quad ; \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{m} \right) = 0$$

e quindi la (11) ammette la soluzione particolare  $y = 0$ , a cui corrisponde:

$$(26) \quad r = \frac{1}{m} = a + bt.$$

Riotteniamo così una nuova dimostrazione <sup>(1)</sup> del teorema di Mestschersky.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Su di un'equazione integro-differenziale.*  
Nota di U. CASSINA, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

In questa Nota mi propongo di studiare l'equazione integro-differenziale:

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \int_0^1 k(t, x, y) f(t, y) dy + h(t, x),$$

che è simile a quella che ha incontrato V. Volterra <sup>(3)</sup> nel caso ereditario del problema della sfera elastica isotropa.

Nella (1),  $k(t, x, y)$  ed  $h(t, x)$  sono funzioni (reali di variabile reale) *continue* assegnate, ed  $f(t, x)$  è una funzione incognita da determinarsi. Si può supporre che  $t$  vari in un intervallo finito  $T$  e che  $x$  ed  $y$  varino nell'intervallo  $0 \leq x, y \leq 1$ .

1. Comincerò col riferirmi all'equazione omogenea:

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial t} f = \int_0^1 k \cdot f \cdot dy.$$

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra la variazione dell'eccentricità nel problema dei due corpi di masse variabili*. « Rend. Lincei », 1926, sem. II.

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) V. VOLTERRA, *Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa*. « Rend. Acc. Lincei » (5), 191 (1910), 6 febbraio, p. 107.

Allora, ragionando come Eulero, pongo:

$$(3) \quad f(t, x) = \varphi_0(t, x) + \varphi_1(t, x) + \varphi_2(t, x) + \dots$$

L'equazione (2) diventa:

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \dots = \int_0^1 k \varphi_0 dy + \int_0^1 k \varphi_1 dy + \int_0^1 k \varphi_2 dy + \dots,$$

che sarà soddisfatta se pongo:

$$(5) \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \int_0^1 k \varphi_0 dy, \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \int_0^1 k \varphi_1 dy, \dots;$$

ossia se prendo:

$$(6) \quad \varphi_0(t, x) = \varphi x,$$

ove  $\varphi$  è una funzione di  $x$  indipendente da  $t$ , e poi calcolo  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$  mediante successive integrazioni secondo le formole:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_1(t, x) = \int_{t_0}^t dt \int_0^1 k(t, x, y) \varphi(y) dy, \\ \varphi_2 = \varphi_2(t, x) = \int_{t_0}^t dt \int_0^1 k(t, x, y) \varphi_1(t, y) dy, \\ \varphi_3 = \varphi_3(t, x) = \int_{t_0}^t dt \int_0^1 k(t, x, y) \varphi_2(t, y) dy, \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

Quindi la serie (3) rappresenta una funzione  $f(t, x)$ , che per  $t = t_0$  coincide con la funzione arbitraria  $\varphi x$ , e che soddisfa all'equazione (2). Per completare la dimostrazione basta provare la convergenza equabile delle serie (3) e (4).

Allora, supposto  $k$  continua come pure  $\varphi$ , detti  $p$  e  $q$  i massimi valori di  $|k|$  e  $|\varphi|$ , e supposto  $t_0 < t$ , si ha:

$$(a) \quad \begin{aligned} |\varphi_0(t, x)| &\leq q, & |\varphi_1(t, x)| &< q(t - t_0)p, \\ |\varphi_2(t, x)| &< q(t - t_0)^2 p^2/2, \dots \end{aligned}$$

$$(b) \quad \begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_1(t, x) \right| &\leq pq, & \left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_2(t, x) \right| &< pq(t - t_0)p, \\ \left| \frac{\partial}{\partial t} \varphi_3(t, x) \right| &< pq \frac{(t - t_0)^2}{2} p^2, \dots \end{aligned}$$

Ora, i secondi membri di  $(\alpha)$  e di  $(\beta)$  sono rispettivamente i termini degli sviluppi in serie di  $qe^{(t-t_0)t}$  e di  $pqe^{(t-t_0)t}$ ; quindi le serie (3) e (4) sono veramente di convergenza equabile e tutto è giustificato.

Rimane da riconoscere che la  $f(t, x)$ , data dalla (3), ove i termini sono calcolati mediante le (6) e (7), è l'unica soluzione dell'equazione (2), che, per  $t = t_0$ , assume il valore  $\varphi x$ . Non si ha bisogno di un calcolo nuovo; la cosa è implicita nelle cose dette: e si può dimostrare con un ragionamento analogo a quello relativo all'integrazione dell'equazioni differenziali ordinarie, e che vale anche per l'equazione (1).

Infatti siano  $f(t, x)$  ed  $f_1(t, x)$  due soluzioni dell'equazione (1) tali che:

$$(\gamma) \quad f_1(t_0, x) = f(t_0, x) = \varphi x.$$

Allora, posto:

$$(\delta) \quad g(t, x) = f_1(t, x) - f(t, x),$$

si ha:

$$(\epsilon) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) = \int_0^1 k(t, x, y) g(t, y) dy,$$

che è del tipo (2). Quindi una soluzione di  $(\epsilon)$  è data da:

$$(\zeta) \quad g(t, x) = \psi x + \psi_1(t, x) + \psi_2(t, x) + \dots,$$

ove  $\psi_1, \psi_2$ , ecc. si ottengono dalle (7) ponendo  $\psi x$  al posto di  $\varphi x$ , e  $\psi x$  è il valore che assume  $g(t, x)$  per  $t = t_0$ . Ma allora, per l'ipotesi  $(\gamma)$ , si ha:

$$\psi x = g(t_0, x) = f_1(t_0, x) - f(t_0, x) = 0.$$

Quindi, dalla  $(\zeta)$ , si deduce che, per ogni valore di  $t$ ,  $g(t, x) = 0$ , ossia che:

$$f(t, x) = f_1(t, x) \quad \text{c. d. d.}$$

2. Per fare lo studio dell'equazione non omogenea (1) è necessario premettere alcune proprietà generali della serie (3) i cui termini sono definiti dalle (6) e (7), ove ora suppongo che  $\varphi$  possa anche essere funzione di  $t$ .

Precisamente, se  $t_0, t_1, t_2$  sono tre valori (distinti o no) della variabile  $t$  e, per brevità di scrittura, si pone:

$$(8) \quad K_t \varphi(t, x) = \int_0^1 k(t, x, y) \varphi(t, y) dy,$$

$$(9) \quad \begin{cases} \varphi_1 = \int_{t_0}^{t_1} K_t \varphi_t dt, & \varphi_2 = \int_{t_0}^{t_1} K_t dt \int_{t_0}^t K_t \varphi_t dt, \\ \varphi_3 = \int_{t_0}^{t_1} K_t dt \int_{t_0}^{t_1} K_t dt \int_{t_0}^t K_t \varphi_t dt, \text{ ecc.} \end{cases}$$

$$(9') \quad \begin{cases} \varphi' = \int_{t_1}^{t_2} K_t \varphi_t dt, & \varphi'' = \int_{t_1}^{t_2} K_t dt \int_{t_1}^t K_t \varphi_t dt, \text{ ecc.} \\ (\varphi_1)' = \int_{t_1}^{t_2} K_t dt \int_{t_0}^{t_1} K_t \varphi_t dt, & (\varphi_1)'' = \int_{t_1}^{t_2} K_t dt \int_{t_1}^{t_1} K_t dt \int_{t_0}^{t_1} K_t \varphi_t dt, \text{ ecc.} \end{cases}$$

$$(10) \quad \begin{cases} E_{t_0}^{t_1} \varphi = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \\ E_{t_1}^{t_2} \varphi = \varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots \\ E_{t_1}^{t_2} \varphi_1 = \varphi_1 + (\varphi_1)' + (\varphi_1)'' + \dots, \text{ ecc.} \end{cases}$$

allora, per quanto ho dimostrato nel numero precedente, se  $k(t, x, y)$  e  $\varphi(t, x)$  si suppongono *continue*, le serie (10) convergono assolutamente.

Inoltre, posto:

$$\begin{aligned} F &= |\varphi| + |\varphi'| + |\varphi''| + \dots \\ F' &= |\varphi_1| + |(\varphi_1)'| + |(\varphi_1)''| + \dots \\ F'' &= |\varphi_2| + |(\varphi_2)'| + |(\varphi_2)''| + \dots, \text{ ecc.,} \end{aligned}$$

dico che la serie:

$$(\alpha) \quad F + F' + F'' + \dots$$

è convergente.

Infatti, indicati ancora con  $p$  e  $q$  i massimi dei valori assoluti di  $k$  e di  $\varphi$ , per le  $(\alpha)$  e  $(\beta)$  del n. 1, si ha:

$$F < q e^{(t_2 - t_1)p}, \quad F' < q(t_1 - t_0) p e^{(t_2 - t_1)p},$$

$$F'' < q \frac{(t_1 - t_0)^2}{2} p^2 e^{(t_2 - t_1)p}, \text{ ecc.,}$$

quindi i termini della serie  $(\alpha)$  sono rispettivamente minori di quelli della serie:

$$q e^{(t_1 - t_0)p} e^{(t_2 - t_1)p} = q e^{(t_2 - t_0)p}.$$

Ma allora, per proprietà note delle serie doppie<sup>(1)</sup>, la serie doppia:

(1) Cfr. F. D'ARCAIS, *Analisi infinitesimale*. 3ª ed., 1, Padova, 1912, p. 455. Vedi anche: F. SEVERI, *La teoria elementare delle serie doppie*. «Period. Matem.» (4), 3 (1923), p. 219.



$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi + \varphi' + \varphi'' + \dots \\ \varphi_1 + (\varphi_1)' + (\varphi_1)'' + \dots \\ \varphi_2 + (\varphi_2)' + (\varphi_2)'' + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

è incondizionatamente convergente, quindi può anche essere rappresentata dalla serie semplice:

$$(\beta') \quad \varphi + (\varphi_1 + \varphi') + [\varphi_2 + (\varphi_1)' + \varphi''] + \dots$$

Dico che il valore delle  $(\beta)$  o  $(\beta')$  è:  $E_{i_0}^{i_2} \varphi$ , ossia, sotto forma simbolica:

$$(11) \quad E_{i_1}^{i_2} E_{i_0}^{i_1} \varphi(t, x) = E_{i_0}^{i_2} \varphi(t, x).$$

Infatti, dalle (8), (9) e (9') si ha:

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi' &= \int_{i_0}^{i_1} K_t \varphi_t dt + \int_{i_1}^{i_2} K_t \varphi_t dt = \int_{i_0}^{i_2} K_t \varphi_t dt, \\ \varphi_2 + (\varphi_1)' + \varphi'' &= \int_{i_0}^{i_1} K_t dt \int_{i_0}^t K_t \varphi_t dt + \int_{i_1}^{i_2} K_t dt \int_{i_0}^{i_1} K_t \varphi_t dt + \\ &+ \int_{i_1}^{i_2} K_t dt \int_{i_1}^t K_t \varphi_t dt = \int_{i_0}^{i_2} K_t dt \int_{i_0}^t K_t \varphi_t dt + \int_{i_1}^{i_2} K_t dt \int_{i_0}^t K_t \varphi_t dt = \\ &= \int_{i_0}^{i_2} K_t dt \int_{i_0}^t K_t \varphi_t dt, \text{ ecc.}; \end{aligned}$$

così la (11) è dimostrata.

Casi particolari di essa sono le seguenti:

$$(12) \quad E_{i_0}^{i_0} \varphi(t, x) = \varphi(t, x),$$

$$(13) \quad E_{i_1}^{i_0} E_{i_0}^{i_1} \varphi(t, x) = \varphi(t, x).$$

3. Supposto ora di nuovo  $\varphi$  costante, rispetto ad  $t$ , allora dico che:

$$(14) \quad \frac{\partial}{\partial t} (E_{i_0}^{i_1} \varphi x) = K_t E_{i_0}^{i_1} \varphi x,$$

$$(15) \quad \frac{\partial}{\partial t} (E_{i_1}^{i_0} \varphi x) = - E_{i_1}^{i_0} K_t \varphi x.$$

*Dimostrazione.* — La (14) è conseguenza immediata delle definizioni (8), (9) e (10). La (15) può essere dedotta mediante calcolo diretto dei termini

della serie  $E_i^0 \varphi$  e successiva derivazione. Ma il modo più rapido per ottenere la (15) è quello di fare uso dei primi elementi di calcolo funzionale <sup>(1)</sup>.

Infatti, poichè  $K_t$  ed  $E_{t_0}^t$ , definiti dalle (8) e (10), sono funzionali lineari reali, cioè operatori lineari per le funzioni di variabile reale, allora, derivando rapporto a  $t$ , l'identità:

$$E_i^0 E_{t_0}^t \varphi x = \varphi x,$$

si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_i^0 (E_{t_0}^t \varphi x) + E_i^0 \frac{\partial}{\partial t} (E_{t_0}^t \varphi x) = 0,$$

da cui, per la (14):

$$\frac{\partial}{\partial t} E_i^0 (E_{t_0}^t \varphi x) = - E_i^0 K_t (E_{t_0}^t \varphi x),$$

ossia infine:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_i^0 = - E_i^0 K_t,$$

e quindi la (15).

4. Supposto invece che  $\varphi(t, x)$  sia funzione di  $t$  e di  $x$ , allora vale la formola:

$$(16) \quad \frac{\partial}{\partial t} [E_i^0 \varphi(t, x)] = E_i^0 \left[ \frac{\partial}{\partial t} \varphi(t, x) - K_t \varphi(t, x) \right].$$

*Dimostrazione.* — Per la regola di derivazione del prodotto funzionale si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} (E_i^0 \varphi) = \left( \frac{\partial}{\partial t} E_i^0 \right) \varphi + E_i^0 \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

da cui, per la (15), si deduce immediatamente la (16).

5. Si è ora in grado di integrare l'equazione (1). Infatti vale il teorema seguente:

*Supposto  $k(t, x, y)$ ,  $h(t, x)$  e  $\varphi x$  funzioni continue, esiste una ed una sola soluzione dell'equazione:*

$$(17) \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = \int_0^1 k(t, x, y) f(t, y) dy + h(t, x),$$

*che per  $t = t_0$ , assume il valore  $\varphi x$ .*

(1) Fra le moderne opere di calcolo funzionale, al cui sviluppo ha tanto contribuito la scuola italiana, mi limito a citare il trattato di V. VOLTERRA e J. PÉRÈS, *Théorie générale des fonctionnelles*, I, Paris, 1936.

Precisamente la soluzione si può rappresentare con la seguente serie doppia incondizionatamente convergente:

$$(\beta) \quad \left\{ \begin{array}{l} f = \varphi + \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \\ \quad \eta + \eta_1 + \eta_2 + \dots \\ \quad \eta' + (\eta')_1 + (\eta')_2 + \dots \\ \quad \eta'' + (\eta'')_1 + (\eta'')_2 + \dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

i cui termini sono calcolati mediante successive integrazioni secondo le formole:

$$(\gamma) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \varphi_1(t, x) = \int_{t_0}^t dt \int_0^1 k(t, x, y) \varphi(y) dy, \\ \varphi_2 = \varphi_2(t, x) = \int_{t_0}^t dt \int_0^1 k(t, x, y) \varphi_1(t, y) dy, \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

$$(\delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} b' = b'(t, x) = \int_{t_0}^{t_0} du \int_0^1 k(u, x, y) h(u, y) dy, \\ b'' = b''(t, x) = \int_{t_0}^{t_0} du \int_0^1 k(u, x, y) b'(u, y) dy, \text{ ecc.} \\ \eta = \eta(t, x) = \int_{t_0}^t b(t, x) dt, \quad \eta' = \eta'(t, x) = \int_{t_0}^t b'(t, x) dt, \\ \eta'' = \eta''(t, x) = \int_{t_0}^t b''(t, x) dt, \text{ ecc.} \end{array} \right.$$

ed  $\eta_1, \eta_2$  ecc.,  $(\eta')_1, (\eta')_2$ , ecc.,  $(\eta'')_1, (\eta'')_2$ , ecc. sono ottenute dalle  $(\gamma)$  sostituendo a  $\varphi$  rispettivamente  $\eta, \eta', \eta''$ , ecc.

Col simbolo  $E$ , definito dalle (10), la serie  $(\beta)$  può essere scritta così:

$$(\epsilon) \quad f(t, x) = E_{t_0}^t \varphi x + E_{t_0}^t \int_{t_0}^t [E_{t_0}^{t'} h(t', x)] dt'.$$

*Dimostrazione.* — Introdotta la funzione ausiliaria  $g(t, x)$  definita dalla:

$$(\zeta) \quad g(t, x) = E_{t_0}^t f(t, x),$$

allora, per la (13), si ha:

$$(\zeta) \quad f(t, x) = E_{t_0}^t g(t, x).$$

Ora, dalla (ε), derivando rapporto a  $t$ , tenendo presenti le (16) e (8), si ha:

$$(7) \quad \frac{\partial}{\partial t} [E_{t_0}' f(t, x)] = E_{t_0}' \left[ \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) - \int_0^x k(t, x, y) f(t, y) dy \right];$$

quindi la (α) può essere scritta così<sup>(1)</sup>:

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial t} g(t, x) = E_{t_0}' h(t, x),$$

da cui tenendo conto del valore iniziale:

$$g(t, x) = \int_{t_0}^t E_{t_0}' h(t, x) dt + \varphi x,$$

ed infine, per la (ζ), la (ε). c. d. d.

6. OSSERVAZIONE. — Sia ora  $K_t$  un qualunque funzionale lineare, funzione integrabile della variabile  $t$ , definita in un intervallo finito  $T$ . Allora, posto:

$$(9) \quad \mathbf{E}_{t_0}' K_t = 1 + \int_{t_0}^t K_t dt + \int_{t_0}^t K_t dt \int_{t_0}^t K_t dt + \int_{t_0}^t K_t dt \int_{t_0}^t K_t dt \int_{t_0}^t K_t dt + \dots,$$

si ha che  $\mathbf{E}_{t_0}' K_t$  è un funzionale lineare, ed  $\mathbf{E}_{t_0}'$  è un operatore per i funzionali lineari, che può chiamarsi *esponenziale generalizzato*.

Infatti se  $K$  è costante, dalla (9), si ottiene:

$$(10) \quad \mathbf{E}_{t_0}' K = 1 + (t - t_0) K + \frac{(t - t_0)^2}{2!} K^2 + \frac{(t - t_0)^3}{3!} K^3 + \dots = e^{(t - t_0)K},$$

che è l'ordinario *esponenziale* esteso ai funzionali lineari.

L'esponenziale ordinario e l'esponenziale generalizzato vennero introdotti da G. PEANO<sup>(2)</sup>, nel 1887, per le sostituzioni lineari sui complessi ad  $n$  unità. In particolare l'esponenziale generalizzato gli ha servito per l'integrazione dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie lineari. Essi sono utili in numerose altre questioni.

(1) Cosicché  $E_{t_0}'$  figura come *fattore integrante* dell'equazione (9).

(2) G. PEANO, *Integrazione per serie delle equazioni differenziali lineari*. «Atti Acc. Torino», 22 (1887), 20 febbraio, p. 437; versione francese in «Math. Ann.», 32 (1888), p. 450.

In questi lavori si trovano, senza dimostrazione, le formole date nei nn. 2 e 3, nel caso in cui  $K_t$  sia un operatore lineare per i complessi ad  $n$  unità. L'estensione dell'operatore  $E$  ai complessi infiniti e continui è stato fatto da un'allieva di G. PEANO, la signorina M. GRAMEGNA: *Serie di equazioni differenziali lineari* ecc. «Atti Acc. Torino», 45 (1910), 13 marzo. Però anche nel lavoro di M. GRAMEGNA non figurano le dimostrazioni delle proprietà di  $E$ .

**Matematica.** — *Un aspetto formale della derivazione tensoriale.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Rappresentiamo con  $\Gamma_{ik}^l$  e  $G_{ik}^l$  i parametri che definiscono il trasporto, in una qualsiasi connessione affine: essendo  $\Gamma_{ik}^l$  quelli del trasporto controvariante e  $G_{ik}^l$  quelli del trasporto covariante. Così, le componenti della derivata covariante del tensore  $(T_i^k)$ , per esempio, saranno

$$(1) \quad T_{i|l}^k = \frac{DT_i^k}{Dx^l} = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^l} + T_p^k G_{il}^p + T_i^p \Gamma_{pl}^k.$$

[In un trasporto puramente riemanniano, come si sa, è

$$G_{il}^p = - \left\{ \begin{matrix} i & l \\ p \end{matrix} \right\} \quad \text{e} \quad \Gamma_{pl}^k = \left\{ \begin{matrix} p & l \\ k \end{matrix} \right\}.$$

Sia  $(a_i^k)$  il tensore misto unitario e si rappresentino con

$$\left\{ \begin{aligned} a_{i|l}^{(k)} &= \frac{Da_i^{(k)}}{Dx^l} = \frac{\partial a_i^k}{\partial x^l} + G_{il}^p a_p^k = G_{il}^k \\ a_{(i)|l}^k &= \frac{Da_{(i)}^k}{Dx^l} = \frac{\partial a_{(i)}^k}{\partial x^l} + \Gamma_{pl}^k a_i^p = \Gamma_{il}^k \end{aligned} \right.$$

le derivate *parziali* covarianti rispettive<sup>(2)</sup>. (Evidentemente queste derivate parziali, come i parametri di definizione, non sono tensori).

Se alla componente  $T_i^k$  diamo la forma

$$(2) \quad T_i^k = T_p^q a_i^p a_q^k,$$

e consideriamo  $T_i^k$  come funzione *composta* delle variabili  $(x^l)$  [per mezzo dei  $T_p^q$  (direttamente) e degli  $a_i^p, a_q^k$ , supposti funzioni delle  $(x^l)$ ]; la *derivazione ordinaria* di  $T_i^k$  conduce alla sua derivata covariante, quando, invece delle derivate parziali ordinarie di  $a_i^p$  e  $a_q^k$ , si prendano le loro derivate parziali covarianti, in  $i$  e  $k$ , rispettivamente.

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) MARIA PASTORI, questi « Rendiconti », *passim*.



Infatti, dalla (2) risulta

$$(3) \quad \frac{\partial T_i^k}{\partial x^l} + \frac{\partial T_i^k}{\partial a_i^p} \frac{D a_i^{(p)}}{D x^l} + \frac{\partial T_i^k}{\partial a_q^k} \frac{D a_{(q)}^k}{D x^l} = \frac{\partial T_p^q}{\partial x^l} a_i^p a_q^k + T_p^q a_q^k \frac{D a_i^{(p)}}{D x^l} +$$

$$+ T_p^q a_i^p \frac{D a_{(q)}^k}{D x^l} = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^l} + T_p^k \frac{D a_i^{(p)}}{D x^l} + T_i^q \frac{D a_{(q)}^k}{D x^l} = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^l} + T_p^k G_{il}^p + T_i^q \Gamma_{ql}^k = \frac{D T_i^k}{D x^l}.$$

È facile vedere che la regola è generale. Per esempio, da

$$(4) \quad T_{ik}^{..l} = T_{pq}^{..r} a_i^p a_k^q a_r^l$$

risulta

$$(5) \quad \frac{\partial T_{ik}^{..l}}{\partial x^h} + \frac{\partial T_{ik}^{..l}}{\partial a_i^p} \frac{D a_i^{(p)}}{D x^h} + \frac{\partial T_{ik}^{..l}}{\partial a_k^q} \frac{D a_{(q)}^k}{D x^h} + \frac{\partial T_{ik}^{..l}}{\partial a_r^l} \frac{D a_{(r)}^l}{D x^h} =$$

$$= \frac{\partial T_{pq}^{..r}}{\partial x^h} a_i^p a_k^q a_r^l + T_{pq}^{..r} a_k^q a_r^l \frac{D a_i^{(p)}}{D x^h} + T_{pq}^{..r} a_i^p a_r^l \frac{D a_{(q)}^k}{D x^h} + T_{pq}^{..r} a_i^p a_k^q \frac{D a_{(r)}^l}{D x^h} =$$

$$= \frac{\partial T_{ik}^{..l}}{\partial x^h} + T_{pk}^{..l} G_{ih}^p + T_{iq}^{..l} G_{kh}^q + T_{ik}^{..r} \Gamma_{rh}^l = \frac{D T_{ik}^{..l}}{D x^h}.$$

Se s'avessero indici uguali, la regola non cade in difetto. Infatti da

$$(6) \quad T_{ii} = T_{pq} a_i^p a_i^q,$$

che è una forma quadratica negli  $(a_i^p)$ , risulta

$$(7) \quad \frac{\partial T_{ii}}{\partial x^h} + \frac{\partial T_{ii}}{\partial a_i^p} \frac{D a_i^{(p)}}{D x^h} = \frac{\partial T_{pq}}{\partial x^h} a_i^p a_i^q + (T_{pq} + T_{qp}) a_i^q \frac{D a_i^{(p)}}{D x^h}$$

$$= \frac{\partial T_{ii}}{\partial x^h} + (T_{pi} + T_{ip}) G_{ih}^p = \frac{D T_{ii}}{D x^h}.$$

La stessa legge sussiste ancora per gli *invarianti* della geometria intrinseca. Così, data un'ennupla ortogonale di congruenze  $(\lambda_i^\alpha)$  (dove  $i$  è un indice d'ordine), facendo

$$(8) \quad T_{ij} = T_{\alpha\beta} \lambda_i^\alpha \lambda_j^\beta$$

e

$$(9) \quad T_{ij/k} = \frac{\partial T_{ij}}{\partial s^k} + T_{\alpha jk} \gamma_{\alpha i} + T_{i\beta k} \gamma_{\beta j}$$

(dove  $\gamma_{aik}$  sono i coefficienti di rotazione di Ricci) e supponendo  $\frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial s^k} = 0$ , sarà

$$(10) \quad \lambda^{(\alpha)}_{i/k} = \frac{\partial \lambda^\alpha}{\partial s^k} + \gamma_{lik} \lambda^\alpha_l = \gamma_{lik} \lambda^\alpha_l.$$

Usando la notazione

$$\lambda^{(\alpha)}_{i/k} = \frac{\Delta \lambda^{(\alpha)}}{\Delta s^k},$$

avremo (partendo dalla (8))

$$(11) \quad \frac{\partial T}{\partial s^k} \frac{i j}{i} + \frac{\partial T}{\partial \lambda^\alpha} \frac{i j}{i} \frac{\Delta \lambda^{(\alpha)}}{\Delta s^k} + \frac{\partial T}{\partial \lambda^\beta} \frac{i j}{j} \frac{\Delta \lambda^{(\beta)}}{\Delta s^k} = \frac{\partial T}{\partial s^k} \frac{i j}{i} + T_{\alpha\beta} \lambda^\beta_j \frac{\Delta \lambda^{(\alpha)}}{\Delta s^k} + T_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_i \frac{\Delta \lambda^{(\beta)}}{\Delta s^k} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial s^k} \frac{i j}{i} + T_{\alpha\beta} \lambda^\beta_j \lambda^\alpha_l \gamma_{lik} + T_{\alpha\beta} \lambda^\alpha_i \lambda^\beta_l \gamma_{ljk} = \frac{\partial T}{\partial s^k} \frac{i j}{i} + T_{lj} \gamma_{lik} + T_{il} \gamma_{ljk} = \frac{\Delta T}{\Delta s^k} \frac{i j}{i}.$$

Ciò che desidero mettere in evidenza, in questa breve Nota, è solo che, a mezzo di un artificio di rappresentazione (2 o 4), la derivazione tensoriale può prender l'aspetto della *derivazione ordinaria* d'una funzione composta; di fatto, le derivate tensoriali parziali  $\frac{Da^{(p)}_i}{Dx^h}$ , ecc., delle formole (3) e (5), sono *dati della connessione lineare: parametri che servono ad individuarla*. Allo stesso modo, in (11), gli elementi  $\frac{\Delta \lambda^{(\alpha)}}{\Delta s^k} = \gamma_{lik} \lambda^\alpha_l$  sono *dati*, poichè i coefficienti di Ricci si esprimono nei parametri  $(\lambda^\alpha_i)$  delle congruenze e nelle sue derivate covarianti <sup>(1)</sup>. Dipendono, quindi, dal trasporto e dall'ennupla di congruenze.

La derivazione tensoriale assume così la veste della derivazione classica.

(1) Ved. LEVI-CIVITA, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto*, p. 287.

**Matematica.** — *Trasformazioni lineari funzionali ed equazioni integrali singolari.* Nota di E. FROLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

In una Memoria, di prossima pubblicazione sugli « Annali di Matematica », esporrò dettagliatamente intorno alle trasformazioni funzionali lineari ed alle equazioni integrali loro connesse, mettendo in rilievo come proprietà caratteristiche delle trasformazioni lineari, quale l'involutorietà, si ripercuotano sul comportamento delle equazioni integrali singolari loro connesse; qui enuncierò solo i risultati principali, rimandando il lettore, e per i particolari, e le dimostrazioni, ed i riferimenti ai molteplici lavori già da altri pubblicati in proposito, alla preannunciata Memoria.

Le trasformazioni funzionali di cui mi occupo, sono quelle del seguente tipo:

$$g(x) = \int_0^{\infty} A(xy) f(y) dy$$

dove  $A(xy)$  è funzione del solo prodotto  $xy$ . Definisco precisamente trasformata di una funzione  $f(x)$  data in  $(0, +\infty)$ , secondo il nucleo  $A(\chi)$ , il:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{e^{-a}}^{e^a} A(\chi) f\left(\frac{\chi}{x}\right) \frac{d\chi}{\chi},$$

ove detto limite esista per ogni  $x$  in  $(0, +\infty)$ ; detta trasformata indico brevemente con  $A[f(x)]$ .

Le ipotesi che voglio soddisfatte dal nucleo  $A(\chi)$  sono le seguenti:  $A(\chi)$  funzione reale della variabile reale  $\chi$  in  $(0, +\infty)$ .

Esiste per ogni  $a$  positivo ed ogni  $m$  reale in  $(-\infty, +\infty)$

$$\Omega(m/a) = \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} \frac{A(\chi)}{\sqrt{\chi}} \chi^{im} d\chi,$$

funzione limitata nel campo di definizione, e continua come funzione di  $m$  per ogni  $a$ .

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

Il limite

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \Omega(m/a) = \Omega(m) \neq 0$$

esiste per ogni  $m$  ed è una funzione continua di  $m$ , avente al più un insieme numerabile di punti  $\{m_a\}$  di discontinuità di prima specie, non condensantisi al finito; la convergenza è uniforme in ogni pluriintervallo tutto al finito, escludente anche gli  $\{m_a\}$ .

Il campo funzionale da me scelto (i motivi della scelta e le proprietà del campo, il lettore potrà trovare nella mia Memoria citata al principio di questa Nota), chiamato  $M$ , è così definito:

detta  $V(m)$  una funzione a variazione limitata in  $(-\infty, +\infty)$ , qualunque, purchè soddisfacente alla:

$$V(m) = \frac{V(m+0) + V(m-0)}{2}$$

ogni funzione appartenente a  $M$  è data da:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} dV(m).$$

Ecco i principali risultati:

1° Ogni equazione integrale omogenea singolare di 2ª specie:

$$f(x) = \lambda A[f(x)]$$

ammette sempre le seguenti autofunzioni  $\varphi(x, m)$ , e relativi autovalori  $\lambda(m)$ :

$$\varphi(x, m) = k \left[ \sqrt{\Omega(-m)} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \pm \sqrt{\Omega(m)} \frac{x^{-im}}{\sqrt{x}} \right] ; \quad \lambda(m) = \frac{\pm 1}{\sqrt{\Omega(m)} \sqrt{\Omega(-m)}}$$

essendo  $m$  un qualunque numero reale,  $k$  una costante arbitraria, e le determinazioni dei radicali le stesse per autofunzioni e relativi autovalori.

2° Ogni funzione appartenente a  $M$ :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} dV(m)$$

ammette trasformata  $A[f(x)]$  appartenente pure ad  $M$  data da:

$$A[f(x)] = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} \Omega(-m) dV(-m).$$

Per questo secondo teorema è stata necessaria una generalizzazione del concetto di integrale di Stilties, generalizzazione che il lettore potrà trovare nella già più volte citata Memoria.

3° Condizione necessaria e sufficiente perchè il nucleo  $A(\lambda)$  sia involutorio in  $M$  (sia cioè per ogni  $f(x)$  appartenente a  $M$ ,  $A[A[f(x)]] = f(x)$ ) è che per ogni  $m$  reale sia:

$$|\Omega(m)| = 1.$$

4° Condizione necessaria e sufficiente, perchè  $A(\lambda)$  sia involutorio in  $M$  è che quivi non ammetta altri autovalori che  $\pm 1$  (si intende che l'equazione:

$$f(x) = \lambda A[f(x)]$$

non sia soddisfatta in  $M$  che da soluzioni identicamente nulle se non è  $\lambda = \pm 1$ ).

Definito poi quasi involutorio in  $M$  un nucleo tale che sia, per ogni  $f(x)$  appartenente a  $M$ :

$$A[A[f(x)]] = cf(x)$$

essendo  $c$  una costante indipendente da  $f(x)$  enuncio ancora;

5° Condizione necessaria e sufficiente perchè  $A(\lambda)$  sia quasi involutoria in  $M$  è che quivi possenga una autofunzione  $f(x)$  a quadrato integrabile in  $(0, \infty)$ , soddisfacente alla condizione

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{e^{-a}}^{e^{+a}} f(x) \frac{x^{im}}{\sqrt{x}} dx = \lambda(m) \neq 0 \quad [m \text{ in } (-\infty, +\infty)].$$



**Matematica.** — *Sugli spazi metrici a connessione affine.*  
Nota di M. HAIMOVICI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Secondo le vedute del prof. E. Cartan<sup>(2)</sup>, uno spazio di Riemann con parallelismo di Levi-Civita può essere considerato come uno spazio non olonomo, senza torsione, con gruppo fondamentale euclideo. Ad ogni punto dello spazio è subordinato uno spazio euclideo *tangente* e fra gli spazi associati a due punti infinitamente vicini si stabilisce una corrispondenza euclidea che permette di raccordare gli spazi tangenti in due punti qualunque lungo una curva passante per essi. La trasformazione associata a un ciclo infinitesimo coll'origine in un punto qualunque lascia invariante questo punto.

Una generalizzazione immediata si ottiene considerando gli spazi non olonomi senza torsione di cui il gruppo fondamentale è quello delle similitudini. Si arriva così agli spazi di Weyl<sup>(3)</sup>.

Se ora passiamo dagli spazi di Riemann a quelli più generali di Finsler, la cui metrica è data da una espressione  $ds = \mathcal{L}(x^i, dx^i)$ ,  $\mathcal{L}$  essendo una funzione omogenea delle  $dx^i$ , si può chiedere di determinare quelli fra loro che ammettono una connessione del tipo di Levi-Civita. Di questo problema ci occupiamo altrove<sup>(4)</sup>. Ora vogliamo accennare come il punto di vista di Weyl possa essere trattato in modo più generale.

1. Lo spazio tangente in un punto ha come gruppo fondamentale un gruppo  $\Gamma$  di trasformazioni affini che lasciano invariante nel piano all'infinito una varietà  $W$  (nel senso di Klein-Lie) a  $n - 2$  dimensioni. Sia  $G$  il sottogruppo centro-affine di  $\Gamma$ , e siano

$$X_{\sigma} f = \sum_{i,j=1}^n a_{\sigma j}^i \xi^j \frac{\partial f}{\partial \xi^i} \quad , \quad U f = \sum_{i=1}^n \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \quad (a_{\sigma j}^i = \text{cost.}) \quad (\sigma = 1, 2, \dots, r)$$

le sue trasformazioni infinitesime. I vettori dello spazio si trasformano secondo il gruppo  $G$ .

Consideriamo in ogni punto  $P$  dello spazio, con coordinate  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), un sistema di riferimento  $\Xi$  coll'origine in  $P$  e tale che l'equazione del cono col vertice nello stesso punto e di cui la direttrice è la varietà  $W$  nel piano all'infinito abbia la forma

$$L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) = 0$$

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) Ved., p. es., « Ann. de l'Ec. norm. sup. », to. 40, pp. 325-412, 1923.

(3) *Raum, Zeit, Materie*, Berlin, 1921, p. 109.

(4) « C. R. de l'Acad. Sc. de Paris », to. 204, 1937, pp. 837-839.

L essendo una funzione omogenea delle  $\xi^i$ , diciamo del primo grado. Le trasformazioni del gruppo G moltiplicano L per un fattore costante.

Le componenti  $\xi^i$  di un vettore  $\xi$  in questo sistema di riferimento si esprimono in funzione delle componenti  $l^i$  nel sistema di coordinate  $x$  con equazioni della forma

$$(1) \quad \xi^i = \sum_{j=1}^n a_j^i l^j,$$

dove le  $a_j^i$  sono funzioni del punto.

Quando il punto P si sposta portandosi in un punto infinitamente vicino P' con le coordinate  $x^i + dx^i$ , gli incrementi  $\xi^i$  del vettore  $\xi$  trasportato per parallelismo sono dati dal gruppo G, cioè sono della forma

$$(2) \quad d\xi^i = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{j=1}^n \lambda_{\sigma}^i a_{\sigma j}^i \xi^j dx^{\sigma} + \sum_{s=1}^n \xi^j \lambda_s dx^s,$$

dove  $\lambda_{\sigma}^i$  e  $\lambda_s$  sono funzioni di  $x^1, x^2, \dots, x^n$ . Tenendo conto delle (1), queste equazioni si scrivono

$$\sum_{j,s=1}^n \frac{\partial a_j^i}{\partial x^s} l^j dx^s + \sum_{j=1}^n a_j^i dl^j = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{j,k,s=1}^n \lambda_{\sigma}^i a_{\sigma k}^i a_j^k l^j dx^{\sigma} + \sum_{s=1}^n \xi^j \lambda_s ds^s.$$

Siccome il vettore si trasporta per parallelismo e che questo trasporto è affine, si ha

$$dl^i = \sum_{j,k=1}^n G_{jk}^i \xi^j dx^k$$

dove  $G_{jk}^i$  sono le componenti della connessione. Si avrà dunque

$$\begin{aligned} \sum_{j,s=1}^n \frac{\partial a_j^i}{\partial x^s} l^j dx^s &= \sum_{j,k,s=1}^n a_k^i G_{js}^k l^j dx^s + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^r \sum_{j,k,s=1}^n \lambda_{\sigma}^i a_{\sigma k}^i a_j^k l^j dx^{\sigma} + \sum_{j,s=1}^n \lambda_s a_j^i l^j dx^s \end{aligned}$$

ovvero, poichè gli  $l^j$  e i  $dx^s$  sono arbitrari,

$$(3) \quad \frac{\partial a_j^i}{\partial x^s} = \sum_{k=1}^n a_k^i G_{js}^k + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k=1}^n \lambda_{\sigma}^i a_{\sigma k}^i a_j^k + \lambda_s a_j^i.$$

Se ora teniamo conto dell'ipotesi che lo spazio sia senza torsione, il che si esprime con l'uguaglianza  $G_{jk}^i = G_{kj}^i$ , ed eliminiamo i  $G_{jk}^i$  dalle (3), otteniamo

$$(4) \quad \frac{\partial a_j^i}{\partial x^s} - \frac{\partial a_s^i}{\partial x^j} = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k=1}^n a_{\sigma k}^i (\lambda_{\sigma}^k a_j^k - \lambda_j^{\sigma} a_s^k) + (\lambda_s a_j^i - \lambda_j a_s^i).$$

Determinare lo spazio metrico a connessione affine e senza torsione, equivale a risolvere il sistema (4) in  $\lambda_s^{\sigma}$ ,  $\lambda_s$  e  $a_j^i$ . Trovata una soluzione del sistema, le equazioni (3) determinano i  $G_{jk}^i$  della connessione affine. Lo spostamento per parallelismo moltiplicherà l'espressione  $L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n)$  con un fattore indipendentemente dalle  $\xi^i$ .

Se dunque adoperiamo come misura delle lunghezze dei vettori nella vicinanza di un punto, l'espressione

$$L = L(\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n) = L\left(\sum_{j=1}^n a_j^1 l^j, \sum_{j=1}^n a_j^2 l^j, \dots, \sum_{j=1}^n a_j^n l^j\right),$$

per spostamento in un punto infinitamente vicino, questa lunghezza, vista l'equazione (2) e l'omogeneità di  $L$ , subirà un incremento

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} d\xi^i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \left( \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k=1}^n \lambda_s^{\sigma} a_{\sigma k}^i \xi^k dx^s + \sum_{s=1}^n \xi^i \lambda_s dx^s \right) \\ &= \sum_{\sigma=1}^r \sum_{i,k=1}^n a_{\sigma k}^i \xi^k \frac{\partial L}{\partial \xi^i} \sum_{s=1}^n \lambda_s^{\sigma} dx^s + L \sum_{s=1}^n \lambda_s dx^s. \end{aligned}$$

Ma secondo le ipotesi fatte su  $L$ , abbiamo

$$\sum_{i,k=1}^n a_{\sigma k}^i \xi^k \frac{\partial L}{\partial \xi^i} = \rho_{\sigma} L$$

le  $\rho_{\sigma}$  essendo costanti. Ponendo dunque

$$\sum_{\sigma=1}^r \rho_{\sigma} \lambda_s^{\sigma} + \lambda_s = \varphi_s$$

ricaviamo

$$dL = L \sum_{s=1}^n \varphi_s dx^s.$$

Se invece di  $L$  avessimo preso per definizione della lunghezza  $\bar{L} = \varphi(x^1, \dots, x^n) L$ , l'incremento sarebbe stato  $d\bar{L} = \bar{L} \left( d \log \varphi + \sum_{s=1}^n \varphi_s dx^s \right)$ .

2. Ci occuperemo in altro lavoro più in dettaglio di questi spazi. Per ora ci limitiamo a dare un esempio del modo di trovarli. Consideriamo i gruppi lineari omogeni con tre variabili, con due trasformazioni infinitesime fra le quali  $Uf = \xi^1 \frac{\partial f}{\partial \xi^1} + \xi^2 \frac{\partial f}{\partial \xi^2} + \xi^3 \frac{\partial f}{\partial \xi^3}$ . Sono, come si sa <sup>(1)</sup>, i seguenti:

- I.  $\xi^1 p_1 + a \xi^2 p_2, U(a \neq 0, 1)$  ; II.  $\xi^3 p_1 + \xi^2 p_2, U$  ;  
III.  $\xi^3 p_1 + \xi^1 p_2, U$  ; IV.  $\xi^1 p_1, U$  ; V.  $\xi^3 p_2, U$ .

(1) LIE-SCHEFFERS, *Vorl. über kontinuierliche Gruppen*, Leipzig, 1893, p. 522.

Occupiamoci di ognuno separatamente.

I. Il gruppo

$$\xi^1 p_1 + a \xi^2 p_2, U \quad (a \neq 0, 1)$$

lascia invarianti le equazioni  $\xi^1 = 0$ ,  $\xi^2 = 0$ ,  $\xi^3 = 0$ . Per una trasformazione del gruppo, l'espressione

$$\xi_1^a \xi_3^{1-a} f\left(\frac{\xi^2}{\xi_1^a \xi_3^{1-a}}\right)$$

$f$  essendo una funzione arbitraria di un argomento viene moltiplicata per un fattore costante. Partendo dal fatto che  $G_{jk}^i = G_{kj}^i$ , si può dimostrare facilmente che le giaciture definite dalle equazioni  $\xi^1 = 0$ ,  $\xi^2 = 0$ ,  $\xi^3 = 0$  nello spazio metrico a connessione affine definiscono ciascuna una famiglia di superficie e che se prendiamo queste come superficie coordinate, si avrà  $a_j^i = 0$  se  $i \neq j$ . Le equazioni (4) danno allora ( $\sigma = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_1^1}{\partial x^2} &= \lambda_2^1 a_1^1 + \lambda_2 a_1^1 & \frac{\partial a_1^1}{\partial x^3} &= \lambda_3^1 a_1^1 + \lambda_3 a_1^1 \\ \frac{\partial a_2^2}{\partial x^3} &= a \lambda_3^1 a_2^2 + \lambda_3 a_2^2 & \frac{\partial a_2^2}{\partial x^1} &= a \lambda_1^1 a_2^2 + \lambda_1 a_2^2 \\ \frac{\partial a_3^3}{\partial x^1} &= \lambda_1 a_3^3 & \frac{\partial a_3^3}{\partial x^2} &= \lambda_2 a_3^3. \end{aligned}$$

Si può verificare che queste equazioni determinano tutti i  $\lambda$  se sono dati gli  $a_i^i$ . Possiamo dunque adoperare come elemento di lunghezza

$$ds = dx^1 a dx_3^{1-a} f\left[\frac{A(x^1, x^2, x^3) dx^2}{dx_1^a dx_3^{1-a}}\right].$$

Abbiamo supposto  $a_1^a a_3^{1-a} = 1$ ,  $a_1^{1-a} a_2^a a_3^{a-1} = A$ . Se calcoliamo la forma  $\Sigma \varphi_s dx^s$  come si è detto nel paragrafo precedente, troviamo

$$\Sigma \varphi_s dx^s = \frac{\alpha}{a} \frac{\partial \log A}{\partial x^1} dx^1 + \frac{1-\alpha}{1-a} \frac{\partial \log A}{\partial x^3} dx^3 \dots$$

II. Consideriamo ora il gruppo

$$\xi^3 p_1 + \xi^2 p_2, U.$$

Questo lascia invarianti i piani  $\xi^2 = 0$ ,  $\xi^3 = 0$  e moltiplica per un fattore costante l'espressione

$$\xi_2^a \xi_3^{1-a} f\left(\frac{\xi^2}{\xi_3} e^{-\frac{\xi^1}{\xi_3}}\right).$$

Si dimostra che si può scegliere il sistema di coordinate e il sistema di riferimento  $\Xi$ , in modo che  $a_j^i = 0$  se  $i \neq j$ . Scritte poi le equazioni (4),

si verifica che queste determinano i  $\lambda$  se  $\frac{a_1^1}{a_3^3} = \Phi(x^1, x^3)$ . Si trova dunque per la metrica dello spazio

$$ds = dx^{2\alpha} dx^{31-\alpha} f \left[ A(x^1, x^2, x^3) \frac{dx^2}{dx^3} e^{-\Phi(x^1, x^3) \frac{dx^1}{dx^3}} \right].$$

Abbiamo posto

$$a_2^{2\alpha} a_3^{31-\alpha} = 1 \quad ; \quad \frac{a_2^2}{a_3^3} = A(x^1, x^2, x^3) \quad ; \quad \frac{a_1^1}{a_3^3} = \Phi(x^1, x^3).$$

Per spostamento da P in P', la lunghezza di un vettore viene moltiplicata per

$$(1 - \alpha) \left[ \frac{\partial \log \Phi}{\partial x^3} + \frac{1}{\Phi} \frac{\partial \log A}{\partial x^1} \right] dx^3 - \alpha \frac{\partial \log A}{\partial x^2} dx^2.$$

III. Passiamo al gruppo

$$\xi_3 p_1 + \xi_1 p_2, U.$$

Questo lascia invariante il piano  $\xi_3 = 0$  e la direzione  $\xi_1 = \xi_3 = 0$  e moltiplica per un fattore costante l'espressione

$$\xi_3 f \left( \frac{\xi_1^2}{\xi_3^2} - 2 \frac{\xi_2}{\xi_3} \right).$$

Possiamo scegliere il sistema di coordinate e il sistema di riferimento  $\Xi$  in modo che  $a_2^1 = a_3^1 = 0$  e  $a_1^3 = a_2^3 = 0$ . Le equazioni (4) danno tutti i  $\lambda$  se

$$\frac{a_1^1}{a_3^3} = \Phi(x^1, x^3) \quad \sum_{i=1}^3 a_i^2 dx^i = a_3^3 (dP + H dx^3)$$

dove P e H sono funzioni del punto dello spazio. Se facciamo la sostituzione  $P = \bar{x}^2$ , possiamo adoperare per  $ds$  l'espressione

$$ds = dx^3 f \left[ \Phi^2(x^1, x^3) \left( \frac{dx^1}{dx^3} \right)^2 - 2 \frac{dx^2 + H dx^3}{dx^3} \right].$$

Abbiamo supposto  $a_3^3 = 1$ ,  $a_1^1 = \Phi(x^1, x^3)$ ,  $a_1^2 = 0$ ,  $a_2^2 = 1$ ,  $a_3^2 = H$ . Per spostamento da P in P', la lunghezza dei vettori si moltiplica per

$$- \frac{\partial H}{\partial x^2} dx^3.$$

IV. Il gruppo

$$\xi_1 p_1, U$$

può essere trattato nello stesso modo come il primo, soltanto che  $a = 1$ . Questo fatto dà per  $a_j^2$  la relazione  $\frac{a_2^2}{a_3^3} = \Phi(x^2, x^3)$  e  $\lambda_1^1$  risulta indeterminato. Avremo



$$ds = dx^1{}^\alpha dx^3{}^{1-\alpha} f \left[ A(x^2, x^3) \frac{dx^2}{dx^3} \right] ;$$

$$\sum_{s=1}^3 \varphi_s dx^s = \varphi_1 dx^1 + (1 - \alpha) \frac{\partial \log A}{dx^3} dx^3 ,$$

$\varphi_1$  essendo una funzione arbitraria.

V. Il gruppo

$$\xi^3 p_2, U$$

moltiplica per un fattore l'espressione

$$\xi^3 e^{\alpha \frac{\xi^2}{\xi^3}} f \left( \frac{\xi^1}{\xi^3} \right)$$

e lascia invarianti i piani  $\xi^1 = 0$ ,  $\xi^3 = 0$  e la direzione  $\xi^2 = \xi^3 = 0$ . Si può scegliere il sistema di coordinate e il sistema di riferimento  $\Xi$ , in modo che si abbia  $a_j^i = 0$  se  $i \neq j$ . Le equazioni (4) danno le relazioni

$$\frac{a_1^1}{\varphi(x^1)} = \frac{a_2^2}{\psi(x^2)} = \frac{a_3^3}{\chi(x^3)} .$$

Possiamo prendere  $a_1^1 = \varphi(x^1)$ ,  $a_2^2 = \psi(x^2)$ ,  $a_3^3 = \chi(x^3)$  e, se facciamo la sostituzione  $x'^1 = \int \varphi(x^1) dx^1$ ,  $x'^2 = \int \psi(x^2) dx^2$ ,  $x'^3 = \int \chi(x^3) dx^3$  e lasciamo gli accenti, troviamo per la metrica dello spazio

$$ds = dx^3 e^{\alpha \frac{dx^2}{dx^3}} f \left( \frac{dx^1}{dx^3} \right)$$

e per la forma differenziale lineare

$$\alpha \lambda_1^1 dx^1 + \alpha \lambda_3^1 dx^3$$

$\lambda_1^1$  e  $\lambda_3^1$  essendo funzioni arbitrarie.

**Matematica.** — *Espressioni della curvatura di una superficie.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due.* Nota di T. TURRI, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geofisica.** — *Ricerche sulla radiazione solare a Col d'Olen.* —

I. *Radiazione diretta, diffusa, globale.* Nota I di A. PUPPO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. CASSINIS.

Grazie ai mezzi posti a mia disposizione dal Comitato per la Geodesia e la Geofisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, e all'ospitalità concessami dall'Istituto Angelo Mosso al Monte Rosa, nell'estate del 1936 potei effettuare una serie di ricerche sulla radiazione solare al Col d'Olen (gruppo del Monte Rosa, Lat. N 45° 52'.6, m. 2902 s. m.). Poichè il programma di lavoro era piuttosto complesso, alla campagna feci partecipare il dott. Defendente Bidasio, la cui collaborazione fu particolarmente preziosa.

Le ricerche eseguite riflettono: *a)* la radiazione solare diretta, diffusa, globale; *b)* l'albedo delle nevi; *c)* l'infrarosso solare prossimo (fra 0.76 e 2 micron: regione delle grandi bande d'assorbimento del vapor d'acqua); *d)* l'esame comparativo di diversi strumenti attinometrici a quota elevata. Tali singoli gruppi di indagini formeranno oggetto di Note successive: in questa pertanto verrà riferito delle misure di radiazione solare diretta, diffusa, globale. In altra sede si provvederà alla pubblicazione integrale delle osservazioni, alla discussione dei risultati, alla documentazione bibliografica.

Le misure di radiazione che si poterono utilizzare ascendono a 164: esse furono eseguite durante il mese d'agosto, nelle condizioni più diverse. I valori medi desunti dalle osservazioni eseguite in tempo sereno (tutti espressi in unità della Scala di Upsala) sono riprodotti nella Tabella I (*h* = altezza del sole; *J* = radiazione diretta normale; *J* senh = radiazione diretta ridotta all'orizzonte; *D* = diffusione; *Q* = radiazione globale; *D/Q* = percentuale di diffusione; *J'* = radiazione normale ridotta al valor medio della distanza terra-sole; *m* = massa atmosferica;  $\alpha$  = coefficiente d'estinzione; *p* = fattore di trasmissione; *T* = fattore di torbidità secondo Linke. I valori relativi alle altezze 5°, 55°, 60°, 65° furono estrapolati).

La radiazione diretta normale non assunse mai quei valori eccezionalmente elevati che spesso si osservano nelle stazioni in quota: a prescindere dal fatto che dal punto di vista climatologico i valori eccezionali hanno un interesse relativo, è noto che durante il mese d'agosto si ha nelle stazioni alpine una deflessione notevole della radiazione, conseguente ai massimi di

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

tensione di vapore che in tale epoca si verificano, e alle particolari condizioni del tempo.

Singolarmente elevata appare la radiazione diffusa, di poco inferiore a quella che si riscontra in stazioni a bassa quota: ciò è da imputare sia alla trasparenza dell'atmosfera, che, per quanto ora detto, raggiunge in agosto valori minimi; sia al rilievo topografico; sia all'azione indiretta delle grandi masse riflesso-diffondenti sottostanti all'orizzonte (nevi, nubi).

TABELLA I.

$h$	$J$ cal $\text{cm}^{-2} \text{ m}^{-1}$	$J \text{ senh}$ cal $\text{cm}^{-2} \text{ m}^{-1}$	$D$ cal $\text{cm}^{-2} \text{ m}^{-1}$	$Q$ cal $\text{cm}^{-2} \text{ m}^{-1}$	$D/Q$ %	$J'$ cal $\text{cm}^{-2} \text{ m}^{-1}$	$m$	$\alpha$	$p$	$T$
(5°)	0.835	0.075	0.025	0.10	25	0.86	7.39	0.111	0.895	1.79
10°	0.995	0.175	0.045	0.22	20	1.025	3.98	0.161	0.851	2.11
15°	1.11	0.29	0.065	0.355	18	1.14	2.71	0.196	0.822	2.33
20°	1.195	0.41	0.08	0.49	16	1.23	2.06	0.222	0.801	2.50
25°	1.26	0.535	0.095	0.63	15	1.295	1.68	0.240	0.787	2.61
30°	1.315	0.66	0.105	0.765	14	1.35	1.42	0.255	0.775	2.72
35°	1.355	0.775	0.115	0.89	13	1.395	1.24	0.269	0.764	2.84
40°	1.385	0.89	0.125	1.015	12	1.425	1.10	0.282	0.754	2.93
45°	1.41	0.995	0.13	1.125	11.5	1.45	1.00	0.293	0.746	3.02
50°	1.43	1.095	0.135	1.23	11	1.47	0.92	0.302	0.739	3.09
(55°)	1.45	1.19	0.14	1.33	10.5	1.49	0.87	0.311	0.733	3.16
(60°)	1.46	1.265	0.14	1.405	10	1.50	0.82	0.317	0.728	3.21
(65°)	1.47	1.33	0.145	1.475	10	1.51	0.78	0.323	0.724	3.26

Il fattore di torbidità varia considerevolmente con la massa atmosferica. Esso può essere espresso in funzione della massa per mezzo della semplice relazione

$$T = 3.02 m^{-0.268}.$$

La fig. 1 mostra il notevole accordo fra i valori dati da questa relazione e quelli medi desunti dalle osservazioni.

I valori medi osservati consentono di determinare la radiazione globale ricevuta durante un giorno sereno, bastando a tal fine calcolare le altezze di sole corrispondenti ai singoli istanti della giornata. La conoscenza della radiazione globale è, dal punto di vista climatologico, di particolare interesse. L'andamento diurno di essa, relativo al giorno centrale del mese di agosto, è riportato in Tabella II. La radiazione globale ricevuta complessi-

vamente nella giornata ascende a  $690 \text{ cal cm}^{-2}$  (delle quali 605 dovute alla radiazione diretta, 85 alla diffusione). È presumibile che i valori della radiazione globale ora citati non siano troppo lontani dal rappresentare la media per tempo sereno corrispondente al mese d'agosto, anche se desunti da un breve periodo di osservazioni. Infatti, come ho altra volta mostrato, i valori della radiazione globale per tempo sereno relativi a una determinata epoca dell'anno fluttuano (salvo casi eccezionali), entro limiti abbastanza ridotti; e questo in dipendenza delle variazioni opposte che la radiazione diretta e quella diffusa presentano, con tendenza alla compensazione, al mutare delle condizioni di trasparenza dell'atmosfera.

mm Hg.

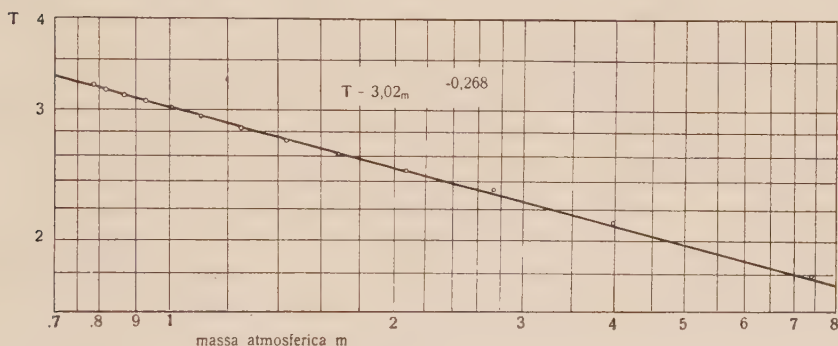


Fig. 1.

Le misure effettuate con gradi di nebulosità diversi mostrano come le variazioni della radiazione diretta e di quella diffusa (e quindi della globale) con la nebulosità stessa siano minori di quanto si verifica in altre stazioni a bassa quota: tale fatto è bene illustrato dai valori seguenti, riferentisi ad altezza di sole di  $30^\circ$ :

radiazione diretta:

Col d'Olen: cielo sereno (nebulosità fra 0 e 3) . . . . .	1.31 cal;
nebulosità fra 4 e 7 decimi . . . . .	1.26, »
Conegliano: cielo sereno (nebulosità 0) . . . . .	1.03 »
nebulosità fra 4 e 7 decimi . . . . .	0.76 »

radiazione diffusa:

Col d'Olen: cielo sereno (nebulosità fra 0 e 3) . . . . .	0.10, cal;
nebulosità fra 4 e 7 decimi . . . . .	0.64 »
Conegliano: cielo sereno (nebulosità 0) . . . . .	0.12, »
nebulosità fra 4 e 7 decimi . . . . .	0.27 »

TABELLA II.

ORA VERA	5 19	5 1/2 18 1/2	6 18	6 1/2 17 1/2	7 17	7 1/2 16 1/2	8 16	8 1/2 15 1/2	9 15	9 1/2 14 1/2	10 14	10 1/2 13 1/2	11 13	11 1/2 12 1/2	12
<i>b</i>	0°	5°	10°	15°	20° 5	25° 5	31°	36°	40° 5	45° 5	49° 5	53°	55° 5	57° 5	58°
<i>J</i> cal cm <sup>-2</sup> m <sup>-1</sup>	0	0.835	0.995	1.11	1.20	1.275	1.32	1.36	1.385	1.415	1.43	1.44	1.45	1.455	1.455
<i>J</i> senh cal cm <sup>-2</sup> m <sup>-1</sup>	0	0.075	0.175	0.29	0.42	0.55	0.68	0.80	0.90	1.01	1.09	1.15	1.19	1.23	1.23
<i>D</i> cal cm <sup>-2</sup> m <sup>-1</sup>	0	0.025	0.045	0.065	0.08	0.095	0.11	0.115	0.125	0.13	0.135	0.135	0.14	0.14	0.14
<i>Q</i> cal cm <sup>-2</sup> m <sup>-1</sup>	0	0.10	0.22	0.355	0.50	0.645	0.79	0.915	1.025	1.14	1.225	1.285	1.33	1.37	1.37



Il confronto — pur avendo carattere indicativo per non essere i suoi termini strettamente omogenei — è significativo.

Il fattore di torbidità varia, come è noto, con la tensione di vapore. Nel caso attuale esso può essere rappresentato, in funzione della tensione, dalla relazione

$$T = 2.62 + 0.09 e \quad (\text{per } e \text{ fra } 0.6 \text{ e } 6.0 \text{ mm/Hg}).$$

Questa relazione è quasi identica a quella trovata da Eckel per Traunkirchen (440 m. s. m.). Il suo accordo con l'osservazione è mostrato in fig. 2, dove la retta rappresentatrice dell'equazione ora scritta è segnata a tratto discontinuo, mentre i valori desunti dalle osservazioni sono indicati con cerchietti.

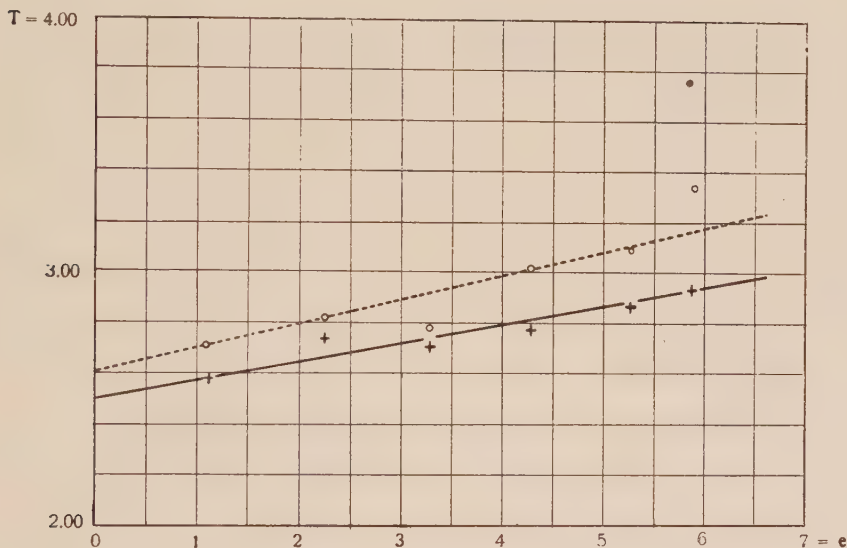


Fig. 2.

Occorre però dire che nella relazione trovata interviene la massa atmosferica a mascherare il fenomeno. Infatti, i valori della massa corrispondenti ai singoli gruppi nei quali le osservazioni sono state raccolte per la determinazione del legame funzionale non sono identici, perchè la tensione di vapore diminuisce con l'aumentare della massa; mentre d'altro canto lo stesso avviene, come abbiamo prima mostrato, per il fattore di torbidità. Apportate allora ai singoli valori del fattore di torbidità le correzioni necessarie per ridurli allo stesso valore della massa ( $m = 1.74$ ), ed eliminato quindi l'effetto di questa, si giunge all'equazione

$$T = 2.50 + 0.07 e.$$

Il pieno accordo di questa relazione con i dati desunti dalle osservazioni è messo in evidenza in fig. 2 (retta a tratto continuo, e punti contraddistinti con crocette: solo uno dei punti derivanti dall'osservazione si scosta dalla interpolatrice; ma esso è media di sole 5 osservazioni). In definitiva, possiamo dunque affermare che una variazione di 1 mm/Hg nella tensione di vapore, induce una variazione di 0.07 nel valore del fattore di torbidità.

**Chimica.** — *Sull'azione di alcune Idrazine sulla 1-cloro-2-4-dinitro-naftalina.* Nota XII sui Nitroderivati aromatici di A. MANGINI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. BARGELLINI.

In continuazione delle precedenti ricerche sulla reagibilità dell'alogeno nella 1-2-4-cloro-dinitro-naftalina <sup>(2)</sup>, riferisco nel presente lavoro le esperienze relative alla reazione con idrato di idrazina, benzalazina, fenilidrazina e para-nitro-fenilidrazina.

A parte il fatto che anche con questi reattivi l'alogeno di questo derivato naftalico mostra una mobilità maggiore di quella corrispondente al cloro-dinitrobenzolo-1-2-4 (col quale è direttamente paragonabile dato le posizioni analoghe occupate dal cloro e dai nitro-gruppi) dovuta — come è stato dimostrato <sup>(3)</sup> — alla presenza del  $C_6H_4$  = non per il suo carattere elettronegativo <sup>(4)</sup> ma bensì per la stabilizzazione statistica indotta sulla configurazione del nucleo sostituito, mi sembra opportuno mettere in rilievo quanto segue:

1° L'ordine di reagibilità della cloro-dinitro-naftalina e cloro-dinitrobenzolo, verso i reattivi sopra indicati diminuisce secondo la serie:

idrazina > fenilidrazina > p-nitro-fenilidrazina > benzalazina <sup>(5)</sup>.

Così dopo un'ora di reazione, alla temperatura di 30° (dopo questo periodo di tempo le reazioni con fenil- e p-nitro-fenilidrazina non possono più seguirsi) i grammi di cloro liberati da una gr.-mol. di alogeno-dinitroderivato sono <sup>(6)</sup> (i valori della 1<sup>a</sup> colonna si riferiscono al derivato naftalico, quelli della 2<sup>a</sup> al derivato benzenico):

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) A. MANGINI, B. FRENGUELLI e A. MANGINI, «Gazz. Chim. Ital.», 67, 1937 in corso di stampa.

(3) A. MANGINI, B. FRENGUELLI, loc. cit.

(4) TALEN, «Chem. Zentr.», 1928, I, 1768.

(5) Anche in questo caso dunque il gruppo nitrico ritarda la reazione di sostituzione come già rilevai a proposito della reazione con clorodinitrobenzolo. «Gazz. Chim. Ital.», 67, 1911 (1915).

(6) Per i particolari sperimentali cfr. MANGINI, FRENGUELLI, loc. cit.

idrazina . . . . .	27.42	—	18.72
fenilidrazina . . . . .	23.76	—	5.34
p-nitro-fenilidrazina . . . . .	18.18	—	—
benzalazina . . . . .	0.66	—	0.36

2° La reazione con idrato di idrazina per quanto procede molto facilmente si dimostra più lenta di quella con p-amino-fenolo, p-fenetidina, e benzidina (vedi tabella più oltre).

3° La benzalazina reagisce molto più lentamente (circa 30 volte minore) dell'idrato di idrazina, mentre la reazione di sostituzione con benzalanilina procede in maniera all'incirca eguale a quella dell'anilina; e che conseguentemente le due reazioni, con benzalazina e benzalanilina, non sono paragonabili: questo risultato appare invero di un certo interesse quando si pensi all'analogia fra il legame  $\text{—CH=N}$  delle basi di Schiff e delle azine.

Queste conclusioni riposano sui seguenti dati sperimentali (grammi di cloro liberatisi dalla clorodinitronaftalina —1 mol— dopo due ore di reazione a 30) <sup>(1)</sup>:

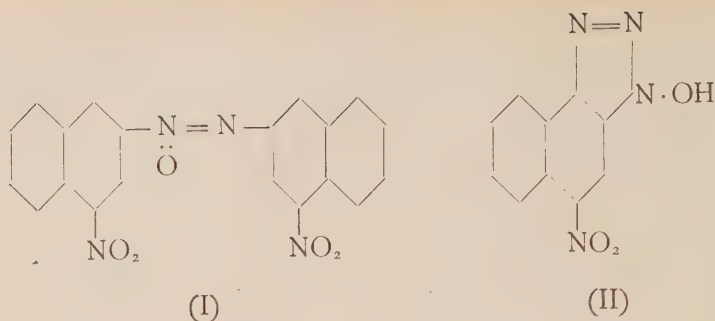
p-am.-fenolo . . . . .	31.19
p-fenetidina . . . . .	32.70
benzidina . . . . .	33.03
idrazina . . . . .	28.40
anilina . . . . .	23.74
benzalanilina . . . . .	22.18
benzalazina . . . . .	0.95

La più bassa reagibilità, certo inattesa, verso l'idrazina nei confronti del p-aminofenolo, para-fenetidina, benzidina <sup>(2)</sup>, è da ricercarsi nella reazione anomala dimostrata da quel reattivo? Invero l'idrato di idrazina anche a freddo non porta all'attesa 2-4-dinitronaftilidrazina, ma fornisce eminentemente la 2-azossi-4-4'-dinitro-naftalina (I) insieme a poco 4-nitro-naftilazimidolo (II), quest'ultimo formatosi certamente per ciclizzazione della dinitro-naftilidrazina, come io ho dimostrato nel caso del 2-5-dibromonitrobenzolo che fornisce direttamente il bromo-benzazimidolo <sup>(3)</sup>:

(1) MANGINI, FRENGUELLI, loc. cit.

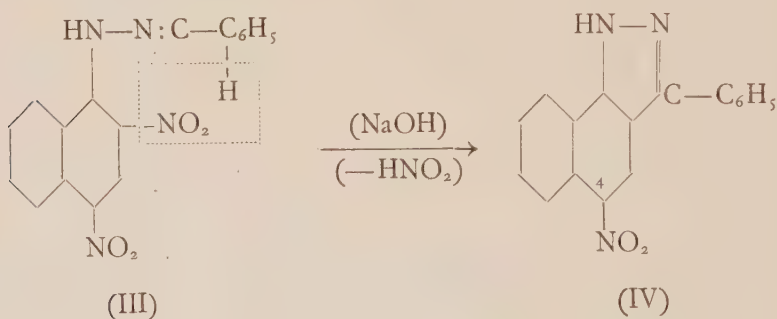
(2) A. MANGINI, «Gazz. Chim. Ital.», 67, 1937, in corso di stampa.

(3) A. MANGINI, «Gazz. Chim. Ital.», 66, 675, 1936.



anche Müller<sup>(1)</sup> facendo bollire a b. m. per 6 ore clorodinitronaftalina e idrato di idrazina ottenne, insieme al 2-4-dinitronaftolo e 2-4-dinitronaftalina, l'azossi-composto (I) e l'azimidolo (II).

Allo scopo di ottenere la 2-4-dinitronaftilidrazina ho fatto reagire la benzalazina, che come è noto reagendo sugli alogeno-nitroderivati sostituisce l'alogeno col gruppo  $\text{—NH—N=R:}$  ho ottenuto l'atteso benzal-2-4-dinitro-naftilidrazone (III), ma tutti i tentativi di idrolisi per passare poi alla corrispondente naftildrazina sono falliti; verso gli acidi infatti l'idrazone ottenuto si mostra particolarmente stabile, mentre gli alcali portano ad eliminazione di acido nitroso, per il che si origina un nuovo nucleo pentatomico: si forma cioè il  $\alpha$ - $\beta$ -naftil-(4-nitro)-fenilpirazolo (IV), confermato attraverso il derivato acetilico:



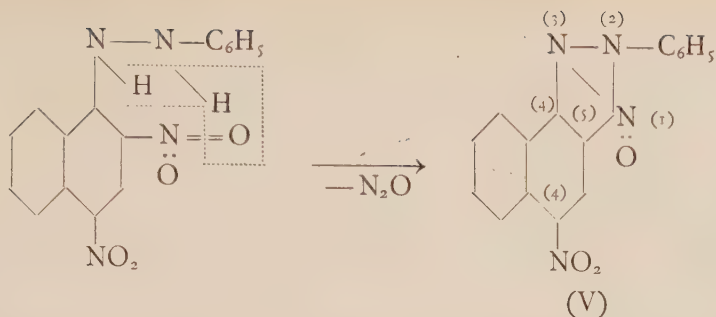
una reazione quindi simile a quella dimostrata dal 2-nitro-benzal-fenilidrazone che bollito con piridina forma il corrispondente indazolo<sup>(2)</sup>, mentre il benzal-2-4-dinitro-fenilidrazone simile all'idrazone (III) non dà luogo a formazione del pirazolo, ma trattato con alcali caustici dà origine solo a dinitronaftolo e ammoniaca, insieme a benzaldeide<sup>(3)</sup>.

Reazione quasi analoga a quella della idrazina, si ha con la fenilidrazina che non porta al 2-4-dinitro- $\alpha$ -naftil-idrazobenzolo, ma direttamente all' $\text{N}$ -ossido (V).

(1) « Chem. Zentr. », 1926, I, 1546.

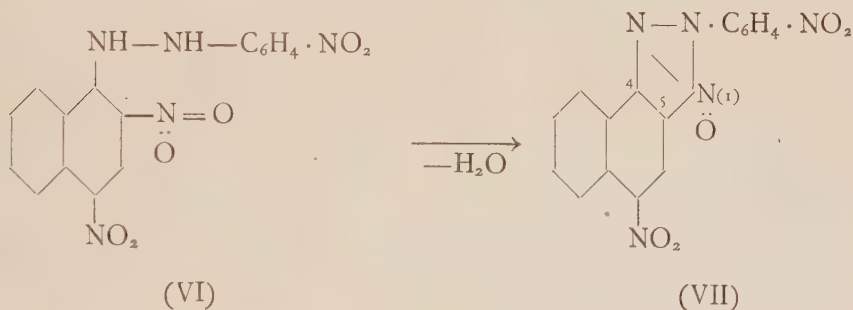
(2) BEILST, « Org. Chem. », IV, Aufl. XV/S, 27.

(3) « Chem. Zentr. », 1908, II, 841.



poichè durante la reazione di sostituzione dell'alogeno con il radicale  $\text{NH}-\text{NH}-\text{C}_6\text{H}_5$  ha luogo la eliminazione della molecola d'acqua e conseguente ciclizzazione.

Colla p-nitro-fenilidrazina invece si ottiene la N-N'-2-4-dinitro- $\alpha$ -naftil-4'-nitro-fenilidrazina (VI) dalla quale per azione dell'acido acetico glaciale si passa al corrispondente N-ossido (VII).



#### PARTE SPERIMENTALE.

##### *Azione dell'idrato di idrazina.*

In 100 cc. di alcool si sospendono gr. 1.25 di cloro-dinitro-derivato ben polverizzati, e a questa sospensione fredda si aggiungono gr. 0.50 di idrato di idrazina, pari a 2 mol.: si ha subito colorazione violetto-vinoso intenso.

Il miscuglio viene tenuto in recipiente chiuso per 3 giorni in continua agitazione a temperatura ambiente (20°), finchè la colorazione vira al bruno. Aprendo il recipiente non si nota pressione; il miscuglio viene filtrato alla pompa e si ottiene così un:

a) *Solido nerastro*: lavato in mortaio con acido acetico assume colore rosso brillante, non contiene cloro. Si cristallizza dal nitrobenzolo: aghi rossi, p. f. oltre 300:

	trov. % N 14.26
per $\text{C}_{20}\text{H}_{12}\text{O}_5\text{N}_4$	calc. 14.43



si tratta quindi della 2-2'-azossi-4-4'-dinitro-naftalina (form. I) (Müller, p. f. 320)<sup>(1)</sup>.

b) *Filtrato alcoolico*: è colorato in giallastro; versato in acqua acida per acido cloridrico forma una emulsione dalla quale si separano dei fiocchi colorati in giallo verdastro-sporco, misto a sostanza bruna peciosa.

Questo prodotto viene raccolto alla pompa ed estratto con acqua bollente: resta così indietro un po' di sostanza bruna resinosa che diversi tentativi di frazionamento non hanno permesso alcuna identificazione. L'estratto acquoso viene fatto bollire con nero decolorante, e per filtrazione si ottiene una soluzione gialla, che per raffreddamento abbandona un prodotto cristallino. Questo ulteriormente purificato per varie cristallizzazioni dall'alcool si presenta in aghi gialli fondenti con esplosione a 215.

È solubile facilmente nelle basi, e riprecipita per acidificazione.

trov. % N = 24.63

per  $C_{10}H_6O_3N_4$  calc. 24.34

Si tratta del nitronaftilazimidolo, (form. II).

*Benzal-2-4 Dinitro- $\alpha$ -Naftil-Idrazone* (form. III).

Grammi 5 di clorodinitronaftalina vengono sciolti in 250 cc. di alcool, e alla soluzione bollente si aggiungono gr. 4.10 di benzalazina (2 mol.); si ha completa soluzione che si colora dapprima in arancio e poi in rosso. Dopo 15-20 minuti di ebollizione comincia a formarsi un precipitato cristallino rosso rubino. Per ebullizione prolungata di 60 ore si ottengono gr. 4.300 di prodotto fondente fra 195-200°, pari al 66 %; conviene però separare per decantazione il prodotto di reazione che a mano a mano si forma.

Cristallizza in ciuffi di aghi-rosso-rubino dallo xilolo, e fonde a 204-204  $\frac{1}{2}$ .

trov. % C = 60.97 ; H = 3.61 ; N = 16.30

per  $C_{17}H_{12}O_4N_4$  calc. 60.71 ; 3.57 ; 16.66

È insolubile in alcool anche bollente, poco in acido acetico, facilmente solubile a caldo in benzolo e omologhi; cristallizza inalterato nella anidride acetica.

Si dimostra molto stabile verso i reattivi; così bollito per 5 ore con acido solforico alcoolico al 15 % conserva inalterato il suo p. f.; fatto bollire con potassa alcoolica al 3 % per 5 minuti si riottiene praticamente inalterato, con alcali caustici acquosi svolge acido nitroso per trasformarsi nel prodotto ciclico qui oltre descritto (IV).

*4-Nitro- $\alpha$ - $\beta$ -Nafto-Fenil-Pirazolo* (form. IV).

(1) Loc. cit.

Si sospende 1 gr. di naftilidrazone (III), ben polverizzato in una soluzione preparata di fresco di soda caustica (gr. 3 in 30 cc. di acqua); il prodotto passa parzialmente in soluzione, e dopo 3-4' minuti la parte ancora indisciolta mostra evidente trasformazione, sfioccandosi, mentre si ha abbondante sviluppo di benzaldeide (che si vede distillare nel refrigerante, riconosciuta dall'odore e dal fenilidrazone). Si mantiene per 10 minuti alla ebullizione, e si filtra bollente lavando a fondo con soda: le acque alcaline acidificate mettono in libertà molto acido nitroso. Il prodotto solido della filtrazione viene lavato prima con acido solforico diluito e poi con acqua, e pesa secco gr. 0.40.

È pochissimo solubile in alcool; si purifica per cristallizzazione dell'alcool amilico: aghi leggermente colorati in giallo, p. f. 289-290 dec.

	trov.	% C = 71.04 ;	H = 4.17 ;	N = 14.79
per $C_{17}H_{11}O_2N_3$	calc.	70.58 ;	3.80 ;	14.53

Nelle acque alcaline si ritrova il 2-4-dinitronaftolo e a seconda del periodo di ebollizione con soda anche il naftilazimidolo (II).

*4-Nitro- $\alpha$ - $\beta$ -Nafto-Fenil-N-Acetil-Pirazolo.*

Dal prodotto precedentemente descritto (IV) per ebollizione di 1 ora con eccesso di anidride acetica, in presenza di poco acetato sodico fuso.

Per cristallizzazione dall'alcool in presenza di acido acetico, si presenta in aghetti appena colorati in giallo, fondenti a 175-176  $\frac{1}{2}$  in liquido limpido giallognolo.

	trov.	% C = 69.45 ;	H = 4.23 ;	N = 12.75
per $C_{19}H_{13}O_3N_3$	calc.	68.88 ;	3.92 ;	12.68

*1-N-ossido-2-Fenil-4-5-Nafto-(4'-nitro) Triazolo (form. V).*

Si ottiene con resa del 50 % facendo bollire per non oltre due minuti la soluzione della clorodinitronaftalina (gr. 1.25 in 75 cc. alcool) con fenilidrazina (2 mol.); si lascia raffreddare la soluzione per il che si separa in seno al liquido bruno un precipitato giallo voluminoso formati da aghi lunghi soffici che vengono filtrati alla pompa e lavati a fondo con alcool freddo. Per cristallizzazione dal benzolo si ottiene in aghi giallo chiari fondenti a 182  $\frac{1}{2}$ -183  $\frac{1}{2}$ :

	trov.	% C = 62.45 ;	H = 3.31
per $C_{16}H_{10}O_3N_4$	calc.	62.74 ;	3.26

È solubile in alcool bollente, e si scioglie anche freddo in acetone.

Prolungando la ebollizione della soluzione alcoolica si ottiene un prodotto fondente a  $157\frac{1}{2}$ - $162\frac{1}{2}$  costituito da un miscuglio dell'*N*-ossido ora descritto e di naftofeniltriazolo (formatosi per l'azione riducente della fenilidrazina) e che non è possibile separare.

	trov. % C = 64.02 ; H = 3.51
per $C_{16}H_{10}O_3N_4$ ( <i>N</i> -ossido)	calc. 62.74 ; 3.26
per $C_{16}H_{10}O_2N_4$ (triazolo)	» 66.20 ; 3.44

*N*-(2-4-Dinitro)- $\alpha$ -Naftil-*N'*-(4'-Nitro)-Fenilidrazina (form. XI).

È stata preparata per azione della para-nitro-fenilidrazina (solite porzioni) in soluzione alcoolica e facendo bollire per circa un'ora; già durante l'ebollizione precipita il prodotto di reazione, che si raccoglie dopo raffreddamento e si purifica precipitando con alcool al 50 % la soluzione acetonica:

	trov. % C = 52.03 ; H = 2.98
per $C_{16}H_{11}O_6N_5$	calc. 52.32 ; 2.93

Il rendimento è del 60 %. Bollito per pochi minuti con acido acetico si trasforma quantitativamente nell'

*1-N-ossido-2-(p.nitro)-Fenil-4-5-Nafto-(4'-nitro)-Triazolo* (form. XVI).

Costituisce un prodotto colorato in giallo, cristallizzato in aghi sottili, poco solubile nei comuni solventi, facilmente solubile in piridina.

Si purifica cristallizzando da un miscuglio piridina + alcool (1 : 1). Fonde a 288-289, forte dec.

	trov. % C = 54.75 ; H = 2.69
per $C_{16}H_9O_5N_5$	cal. 54.70 ; 2.56

**Chimica** (Chimica fisica). — *Bande di assorbimento in sostanze po.ar ad elevatissime radiofrequenze*. Nota I di L. CAVALLARO, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica fisica). — *Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze*. Nota II di L. CAVALLARO, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Su alcune naftilammine sostituite.* Nota XIII sui Nitroderivati aromatici di A. MANGINI, presentata dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica biologica). — *Sulla probabile esistenza d'un ignoto fattore alimentare stimolante lo sviluppo sessuale* <sup>(1)</sup>. Nota di G. MARTINO, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. C. CIACCIO.

Quattro anni fa, studiando gli effetti dell'alimentazione lattea esclusiva nei polli in accrescimento, avevo in essi casualmente osservato una completa inibizione dello sviluppo sessuale <sup>(3)</sup>. Due polli di sesso maschile, alimentati per 79 giorni con solo latte intero di vacca, a cominciare dall'età di circa tre mesi, non avevano presentato la comparsa dei noti caratteri propri del gallo a completo sviluppo, nè durante tutto il periodo dell'alimentazione lattea suddetta, nè durante la successiva alimentazione maidica ordinaria, che era durata nei due animali, rispettivamente, dieci mesi e mezzo e tredici mesi. Il primo di questi due polli, morto per causa accidentale all'età di circa sedici mesi; ancora dopo dieci mesi e mezzo di alimentazione maidica libera presentava tutto l'aspetto dell'animale castrato prima della pubertà: il piumaggio era quello del gallo, mentre facevano difetto il canto, l'ardore battagliero, l'istinto sessuale; e gli organi carnosì della testa (cresta e bargigli) erano piccoli, pallidi e farinosi. L'altro pollo, venuto a morte all'età di quasi diciannove mesi, si presentava col piumaggio e col portamento propri dell'animale a completo sviluppo; aveva cominciato a cantare circa quindici giorni prima della morte, e già non fuggiva più in presenza di altri maschi: ma la cresta era ancora piccola, accartocciata e farinosa; piccoli e pallidi i bargigli; completamente assente l'istinto sessuale in presenza della femmina.

Questi risultati mi parvero tanto più interessanti, in quanto precedenti ricerche del mio collaboratore M. Mazzei <sup>(4)</sup> avevano dimostrato che l'alimentazione lattea esclusiva è capace d'assicurare nel gallo adulto la perfetta normalità delle funzioni e dei caratteri sessuali. Quando essa era eseguita in maniera da mantenersi inalterato l'equilibrio energetico degli animali,

(1) Dall'Istituto di Fisiologia umana della R. Università di Messina.

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) G. MARTINO, *Effetti dell'alimentazione lattea sullo sviluppo sessuale nei polli*. « Boll. Soc. it. Biol. sper. », 1934, 9, 217.

(4) M. MAZZEI, *Alimentación láctea y función sexual en el gallo*. « Rev. de la Asoc. méd. argent. », 1931, 303.

questi conservavano, anche dopo 92 giorni di esperimento, l'ordinario aspetto e comportamento sessuale; e nessuna alterazione funzionale si osservava nemmeno nel lungo successivo periodo di alimentazione maidica libera.

Ma le due personali osservazioni su ricordate non avevano permesso l'opportuna analisi della deficienza alimentare qualitativa, ed era pure mancato allora l'indispensabile studio istologico dei testicoli. Di modo che ulteriori ricerche si imponevano per la corretta interpretazione del fenomeno osservato. Esse sono state ora eseguite dai miei collaboratori E. Fulchignoni e A. Alibrandi<sup>(1)</sup>. I polli (tutti di sesso maschile) vennero alimentati, a cominciare dall'età di due mesi, con solo latte (intero) di capra, oppure con latte integrato dall'aggiunta di frumento (20 % della razione alimentare) o con latte integrato da olio di embrioni di grano (5 gocce per cento grammi di peso corporeo dell'animale); altri polli, di pari età e di razza corrispondente, vennero lasciati, per controllo, ad alimentazione libera con granturco. Questi ultimi raggiunsero la piena maturità sessuale all'età di 5-6 mesi; l'esame anatomo-istologico dei testicoli rivelò l'esistenza di regolare ed attiva spermatogenesi. In modo perfettamente analogo si comportarono i polli alimentati con latte più grano. Viceversa, tanto i polli alimentati con solo latte, quanto quelli trattati con latte più olio di embrioni di grano, presentarono, per effetto di tale dieta alimentare (protratta per 131 giorni), un'assoluta e totale inibizione dello sviluppo sessuale: mancanza dei caratteri, degli atteggiamenti e del comportamento propri del gallo. I testicoli erano piccolissimi ed avevano tutto l'aspetto di quelli d'un animale neonato: i tubuli erano costituiti da unico ordine di cellule disposte lungo il connettivo e si presentavano con lume vuoto o contenente un reticolo di sostanza amorfa. Nessuna alterazione anatomo-istologica venne invece rilevata per altri organi (fegato, milza, pancreas, polmone, tiroide ecc.), ad eccezione di una modica ipertrofia dei reni; corrispondente a quello dei controlli si manifestò pure l'accrescimento corporeo. L'inibizione dello sviluppo, sia morfologico che funzionale, dei testicoli risultò legata alla persistenza delle condizioni nutritive suddette, poichè coll'ammissione all'alimentazione maidica libera venne osservata la graduale comparsa dei caratteri e delle funzioni sessuali, raggiungendosi la piena maturità all'età di circa dieci mesi. A questo momento i testicoli si presentavano all'esame anatomo-istologico corrispondenti a quelli degli organi a completo sviluppo; solo poteva notarsi, in confronto con quelli dei controlli di pari età, una minore ampiezza dei tubuli seminiferi.

In conclusione, i risultati di Fulchignoni e Alibrandi, che confermano ed avvalorano le mie precedenti osservazioni, consentono di ritenere effet-

(1) Il lavoro di FULCHIGNONI e ALIBRANDI verrà pubblicato nei «Quaderni della Nutrizione» (1937).



tivamente fondata l'ipotesi della necessità di un ancora ignoto principio (o fattore) alimentare per lo sviluppo sessuale del gallo.

Solo in questo differiscono le mie osservazioni da quelle dei miei collaboratori: che gli effetti dell'alimentazione esclusiva con latte di vacca (nelle mie osservazioni) parvero meno prontamente reversibili — per la successiva ordinaria alimentazione maidica — di quelli ottenuti (dai miei collaboratori) mercè l'esclusiva alimentazione con latte di capra.

Può escludersi, per questi risultati, che delle descritte alterazioni anatomiche e funzionali del testicolo fosse responsabile la nota deficienza del latte in vitamina antisterile (vitamina E o della fecondità). Infatti, notevolmente diversi sono gli effetti della mancanza di vitamina E (nella dieta alimentare) da quelli che noi abbiamo ottenuto. La deficienza della vitamina antisterile danneggia solo la funzione esocrina e non quella endocrina del testicolo; la maturità sessuale viene dagli animali raggiunta come nelle normali condizioni, e solo successivamente si manifestano le alterazioni testicolari che portano alla azoospermia; queste alterazioni sono del tipo regressivo (degenerativo) e tali, in ogni caso, da rivelarsi (per variazione delle condizioni nutritive) assolutamente irreversibili; infine, è possibile prevenirle coll'aggiunta, alla dieta, di olio di embrioni di grano. Nelle nostre condizioni invece non si sono osservate alterazioni degenerative del testicolo, ma soltanto arresto della normale evoluzione dell'organo verso la maturità; è risultata inibita non solo la funzione esocrina, ma pure quella endocrina dell'organo; l'inibizione dello sviluppo si è manifestata temporanea e legata alla persistenza delle anormali condizioni nutritive, così da aversi la graduale e totale scomparsa degli effetti dopo la cessazione della causa lesiva; infine, l'aggiunta alla dieta dell'olio di embrioni di grano non si è rivelata atta a correggere la deficienza qualitativa dell'alimento.

Qualche cosa manca dunque nel latte, ed è invece presente nel grano e nel granturco, che è indispensabile per lo sviluppo sessuale del gallo: qualche cosa, che non è identificabile con nessuno dei fattori o principi nutritivi noti fino ad oggi.

È stato spesso da parecchi Autori messo in evidenza il particolare significato di alcuni costituenti inorganici della dieta per i processi della riproduzione, e specialmente di quelli che Bertrand ha chiamato « les infiniment petits chimiques ». In Italia V. Zagami<sup>(1)</sup> ha recentemente insistito sull'utilità del rame e più ancora dello zinco per correggere gli effetti della deficienza di vitamina antisterile nelle diete sintetiche di Mattil e Clayton o di altri. La somministrazione di zinco o di rame, o dell'uno e dell'altro insieme, ai ratti in esperimento servirebbe a mitigare o ritardare (ma non ad impedire del tutto) gli effetti della dieta sintetica povera di fattore E. E ciò tanto

(1) V. ZAGAMI, *Effetti di deficienza del fattore E ed azione correttiva di alcuni metalli*. « Bull. e Atti R. Acc. med. di Roma », 1933, 59; *Ancora sull'azione correttiva di alcuni metalli in casi di deficienza del fattore E*. « Ibidem », 1933, 59.

nelle femmine quanto nei maschi. Analoghe osservazioni si trovano nella letteratura americana dell'argomento per il rame, per il ferro, per il manganese ecc., ma quasi sempre per ciò che si riferisce all'attività riproduttiva delle femmine. Più da vicino ci interessano le osservazioni di Waddel, Steenbock e Hart <sup>(1)</sup> e quelle di Waddel <sup>(2)</sup>, perchè relative agli effetti dell'alimentazione lattea, più o meno corretta dal punto di vista dei costituenti inorganici, nei ratti, e non soltanto nelle femmine, ma pure nei maschi. In questi ultimi la prolungata dieta lattea esclusiva avrebbe determinato la comparsa di fatti degenerativi del testicolo, con grave alterazione della funzione *esterna* (ma non di quella *interna*) dell'organo. Non dunque arresto dello sviluppo, ma progressiva degenerazione, *dopo raggiunta la maturità sessuale*, fino alla completa sterilità. Orbene, questi fatti regressivi non vennero per nulla mitigati dall'aggiunta di ferro, di rame, di jodio ecc., alla dieta lattea. Negli animali di sesso femminile, secondo questi Autori, l'alimentazione lattea provocherebbe ritardo nella maturità sessuale e poi scarsa ovulazione, pure nei casi d'integrazione della dieta con rame, ferro, jodio e manganese. Questi due ultimi elementi però determinerebbero un miglioramento del ritmo di ovulazione.

Ad ogni modo, la dieta lattea non sembrerebbe soltanto per il difetto di alcuno di questi costituenti inorganici inadatta alle funzioni di riproduzione; e, per quanto riguarda lo zinco, al quale — come si è detto — particolare importanza è stata riconosciuta dallo Zagami, è noto che proprio il latte è uno degli alimenti che meglio ne sono forniti.

Per tutto ciò poco probabile mi sembra, che a deficienze saline della dieta lattea possa attribuirsi l'inibizione dello sviluppo sessuale, da noi osservata e descritta nei polli <sup>(3)</sup>. Questa ipotesi non sarà tuttavia trascurata nelle successive indagini, che ci proponiamo di eseguire per l'ulteriore, indispensabile analisi del fenomeno.

Frattanto non mi pare però ingiustificato pensare pure all'eventualità dell'esistenza di un fattore alimentare (vitaminico), diverso da quelli fino ad oggi noti, necessario per la normale evoluzione degli organi sessuali nei polli in accrescimento.

I nostri risultati e le nostre considerazioni valgono, naturalmente, solo per l'animale sul quale noi abbiamo finora sperimentato. Ma non è da escludere che il medesimo fenomeno, descritto per il gallo, possa osservarsi pure in altri animali, qualora si riesca ad escogitare, per essi, diete sperimentali atte allo scopo.

(1) J. WADDEL, H. STEENBOCK, E. B. HART, *Growth and reproduction on milk diets*. « Journ. of Nutrition », 1931, 4, 53.

(2) J. WADDEL, *Male sterility on milk diets*. « Ibidem », 1931, 4, 67:

(3) FULCHIGNONI e ALIBRANDI avevano istituite opportune ricerche a questo riguardo; ma non fu disgraziatamente possibile protrarre abbastanza a lungo le osservazioni, perchè casualmente tutti questi animali prima o dopo morirono per accidenti di tecnica.

**Biologia.** — *Contributo allo studio della pelle degli Anuri durante la metamorfosi* <sup>(1)</sup>. Nota di MARIA ROMANO, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio A. GHIGI.

Nel corso di mie precedenti ricerche sulla metamorfosi degli Anuri, ebbi occasione di seguire il comportamento della pelle in seguito all'azione della tiroide, comportamento che mi sembrò discordante in alcuni punti con le osservazioni di precedenti AA.

Per questo, e per mettere in evidenza fatti che non erano stati presi in considerazione nelle ricerche dei precedenti AA., ho intrapreso uno studio più accurato del tegumento degli Anuri in metamorfosi, limitandomi per ora al solo *Bufo vulgaris*.

Riassumo qui brevemente lo stato attuale delle conoscenze sul tegumento degli Anfibi e la struttura normale della pelle di girino.

La pelle degli Anuri allo stato larvale (intendo con questo termine, come la maggior parte degli altri AA., la condizione dell'individuo dalla schiusa dell'uovo fino all'inizio della metamorfosi) è costituita dell'*epidermide* e del *derma*. Nell'*epidermide* si possono distinguere due strati di cellule epiteliali prismatiche o cubiche: allo strato superiore si dà generalmente il nome di strato corneo e all'inferiore di strato germinativo, sebbene lo strato superiore non sia ancora qui corneificato e presenti un'attività mitotica assai maggiore di quella dello strato più profondo « germinativo ».

Le cellule dello strato corneo derivano dalle cellule ciliate che ricoprono parte della superficie del corpo nelle larve giovanissime, e sono sempre appiattite, con una lamina di ricoprimento chiamata anche « strato cuticolare ». Oltre a queste cellule epiteliali comuni si trovano anche cellule speciali (*Stiftchenzellen*) che furono variamente interpretate come organi di senso o come organi di secrezione, paragonabili forse alle cellule di Leydig degli Urodeli (Leydig, Mitrophanov) <sup>(3)</sup>. La comparsa di altri strati nell'*epidermide*, comincia nella Rana (Bolk) <sup>(4)</sup> nello stadio in cui le estremità posteriori sono visibili come piccole protuberanze.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) LEYDIG, MITROPHANOV, citati da Bolk ecc.

(4) BOLK, GÖPPERT, KALLIUS, LUBOSCH, *Handbuch der vergleichenden Anatomie der Wirbeltiere*. I. Band, 1931.

Il derma appare sotto l'epidermide come uno strato di tessuto connettivale denso non vascolarizzato, composto, nelle giovani larve, di due strati. In seguito, nel derma si differenzia anche lo strato intermedio (Bolk).

Negli Urodeli la pelle larvale differisce da quella degli Anuri per la presenza delle cellule di Leydig nello strato germinativo. Sono queste, cellule rotondeggianti allungate, con granulazioni e strutture diverse nelle singole specie, che si trovano in grande abbondanza in alcune regioni del corpo. La loro funzione non è ancora perfettamente nota, ma l'opinione più diffusa è che abbiano funzione escretoria e contribuiscano forse alla permeabilità dell'epidermide (Whipple) <sup>(1)</sup>.

STRUTTURA NORMALE DELLA PELLE DOPO LA METAMORFOSI. — Verso la fine del periodo larvale l'epidermide assume la caratteristica struttura di un epitelio piatto e lo spessore di tutta la pelle dipende più dalla grandezza delle cellule che dal numero degli strati.

Lo strato corneo ha scarso spessore e si distingue dalle zone più profonde per il diverso potere di rifrazione; i nuclei appiattiti sono a forma di disco e vi è un addensamento di cromatofori. Lo strato germinativo, costituito di un numero variabile di strati, consta di cellule a citoplasma con struttura finemente fibrillare. Nel derma ai due primi strati si viene ad interporre un terzo strato o strato intermedio, cosicchè in esso si possono distinguere, a partire dall'alto: 1° uno strato molto sottile di tessuto connettivale a lamelle, detto « lamella limitante » (*Grenzlamelle*); 2° uno strato sottostante lasso nel quale sono situate ghiandole pluricellulari, capillari, e che ha spessore variabile a seconda della grandezza delle ghiandole; 3° uno strato compatto formato di lamelle connettivali riunite in fasci con funzione meccanica di sostegno. Le ghiandole pluricellulari (ghiandole acinose) si originano verso la fine del periodo premetamorfico come abbozzi presso a poco sferici formati da sei o sette nuclei strettamente ravvicinati nella parte più profonda dell'epidermide. In seguito s'ingrandiscono e s'approfondano subito nel derma oltrepassando la lamina limitante e portandosi nello strato intermedio spingendo in giù il corio compatto (Bolk, Göppert).

In conclusione l'inizio della metamorfosi può essere indicato per gli Anuri dal *sorgere dello strato corneo nell'epidermide, dalla formazione dello strato intermedio del derma ed infine dalla comparsa delle ghiandole pluricellulari nello strato lasso del derma.*

Negli Urodeli la pelle di adulto si distingue facilmente dal tegumento larvale per l'assenza assoluta delle cellule di Leydig e la formazione di ghiandole pluricellulari acinose paragonabili a quelle degli Anuri (Whipple, Noble) <sup>(2)</sup>.

(1) J. H. WHIPPLE WILDER, *The Morphology of Amphibian metamorphosis*. Smith College Northampton Mass., 1925.

(2) G. NOBLE KINGSLEY, *The Biology of Amphibia*. Mc Graw, New-York, 1931.



DESCRIZIONE DEGLI STADI. — Nel corso del mio lavoro ho voluto stabilire il momento in cui la pelle larvale si trasforma in pelle definitiva di adulto, ho cercato cioè di determinare il momento della metamorfosi della pelle nella cronologia del più vasto fenomeno della metamorfosi dell'individuo, anche perchè non mi risulta che tale cronologia sia stata con precisione stabilita da altri AA.

A tale scopo ho fissato e preparato una serie completa di girini di *Bufo vulgaris*, provenienti tutti da un'unica deposizione, ed ho studiato l'istologia della pelle nei vari individui riferendomi, per la cronologia, agli stadi adottati da Schreiber <sup>(1)</sup> per questa specie <sup>(2)</sup>.

L'altro carattere che definisce la metamorfosi della pelle, cioè lo strato corneo, appare fra il sesto ed il settimo stadio e la corneificazione risulta completa ed ultimata (nuclei tangenziali, lieve addensamento uniforme nello strato esterno e desquamazione a lamelle) alla fine del settimo (fig. 3 e 4). Trovo conferma di questa mia osservazione nel lavoro di Etkin <sup>(3)</sup> in cui è dimostrato che proprio la muta della pelle caratterizza l'ottavo stadio della metamorfosi nella serie cronologica stabilita per la *Rana Catesbeiana*.

Valendomi dei risultati delle mie precedenti ricerche sulle metamorfosi dell'occhio, nel *Bufo*, ho ritenuto interessante confrontare la metamorfosi delle singole parti dell'occhio con quella dei diversi strati della pelle. Ho osservato che il cristallino inizia la metamorfosi entro lo stadio 1 quando la pelle mantiene ancora tutti i caratteri larvali, mentre la cornea si metamorfosa nello stadio 2 quando nel derma appaiono le ghiandole pluricellari. Inoltre ho notato che le ghiandole lacrimali compaiono nello stesso tempo delle ghiandole pluricellulari della pelle, cioè anch'esse nello stadio 2, confermando con ciò la tesi di Sardemann <sup>(4)</sup> sull'origine comune delle ghiandole lacrimali e delle ghiandole cutanee dall'ectoderma.

METAMORFOSI ACCELERATA. — Sul comportamento della pelle all'azione della tiroide nella metamorfosi accelerata artificialmente, Giacomini (1916) <sup>(5)</sup>

(1) G. SCHREIBER, «Rendic. R. Acc. Naz. Lincei», 1937.

(2) G. SCHREIBER, ha fissato per la metamorfosi di *Bufo* otto stadi basati sulle modificazioni morfologiche esterne. Lo stadio 2 è definito «stadio della scomparsa del tubo anale» ed ha inizio al momento in cui si nota il riassorbimento del tubo anale, con cui coincide la formazione della regione anale definitiva, con la delimitazione della regione perineale e la formazione della coscia di tipo adulto. Durante questo stadio si hanno altre manifestazioni metamorfiche di grande importanza morfogenetica come per esempio modificazioni boccali nonchè l'inizio delle modificazioni del tubo digerente che danno al girino la caratteristica riduzione dell'addome. Lo stadio 2 termina con l'apparizione del primo arto anteriore. I primi segni della metamorfosi della pelle compaiono verso la fine dello stadio 1 con l'inizio della formazione delle ghiandole pluricellulari che nello stadio 2 appaiono perfettamente formate. (Vedi figg. 1 e 2).

(3) W. ETKIN, «Physiological Zoology», 1932.

(4) SARDEMANN, «Zool. Anzeig.», VII, 1884, p. 569.

(5) E. GIACOMINI, «R. Accad. Scienze Ist. Bologna», XX, pp. 25, Bologna, 1925



ha osservato che l'epidermide nei piccoli girini metamorfosati diviene costituita di più strati di cellule e mostra già lo strato corneo. Inoltre cominciano a svilupparsi le ghiandole cutanee le quali si mostrano, sebbene piccole, già formate e provviste di lume, in corrispondenza della testa.

Champy (1922)<sup>(1)</sup> ha notato un'attiva moltiplicazione in certe determinate zone della pelle ed ha stabilito un rapporto fra il numero delle cellule in mitosi e il numero delle cellule in riposo, che ha chiamato «coefficiente mitotico».

Drzewichi (1924)<sup>(2)</sup> tiroidizzando girini di 60 mm. con zampe posteriori di 5 mm., ha ottenuto la metamorfosi completa della pelle, mentre altri organi non avevano reagito ed ha concluso che la metamorfosi della pelle è indipendente da quella degli altri organi e la precede perchè essa diviene più presto sensibile all'azione dell'ormone della ghiandola tiroide.

Schulze (1924)<sup>(3)</sup> ha notato negli animali ipertiroidei o tiroidizzati una moltiplicazione degli strati dell'epidermide con grande ricchezza di ghiandole, ed invece scarso accrescimento degli strati del derma, mettendo questo fatto in relazione con la diversa origine di queste parti del tegumento: nell'ipertiroidei continuano a svilupparsi i derivati dell'ectoderma (epidermide e ghiandole pluricellulari) mentre si arresta lo sviluppo dei derivati del mesoderma (corio).

Alphonse e Baumann (1934)<sup>(4)</sup> tiroidizzando giovani girini di *Bufo vulgaris* non riscontrarono, invece, nessuna reazione nella pelle che si sarebbe mantenuta allo stato larvale, in contraddizione con le osservazioni di Drzewichi il quale però ha sperimentato su *Pelobates*.

La mancata reattività della pelle alla tiroidizzazione, viene considerata da questi AA. in relazione alla dose dell'ormone e all'età dei girini su cui le esperienze vennero compiute (appena riassorbite le branchie esterne).

\*  
\* \* \*

Per lo studio della metamorfosi accelerata ho usato il metodo di tiroidizzare con iniezioni di tiroxina (per la tecnica v. Schreiber<sup>(5)</sup> 1933) individui prelevati ad intervalli regolari, che venivano dopo una decina di giorni sacrificati e studiati istologicamente con i controlli.

Le osservazioni sul tegumento (anche per la metamorfosi normale) furono fatte sempre su una medesima regione, la regione fra gli occhi,

(1) CH. CHAMPY, *L'Action de l'extrait thyroïdien sur la multiplication cellulaire*. Doin, Paris, 1922.

(2) DRZEWICHI, «C. R. Soc. Biol.», to. I, p. 1364, 1924.

(3) W. SCHULZE, «Roux Arch.», B. 107, 1924.

(4) P. ALPHONSE et G. BAUMANN, «C. R. S. de Biol.», CXVII, 1934; Id., «C. R. S. de Biol.», CXIII, 1933.

(5) G. SCHREIBER, «Boll. Soc. It. Biol. Sperim.», vol. VIII, 1933.

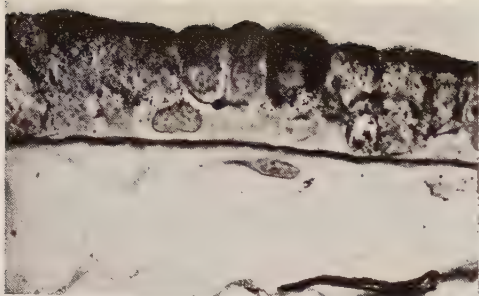


Fig. 1

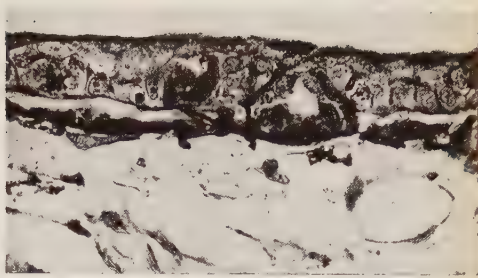


Fig. 2

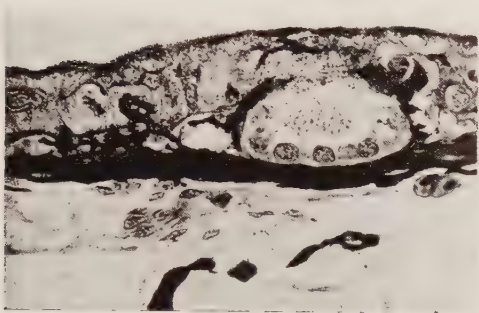


Fig 3

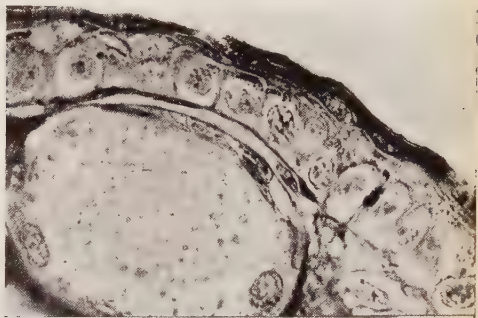


Fig. 4

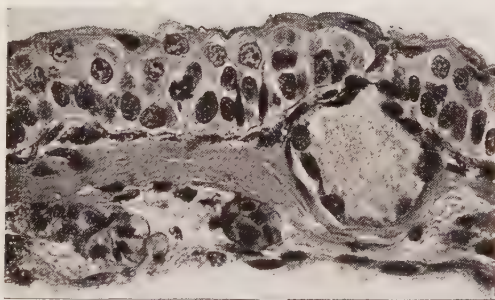


Fig. 5

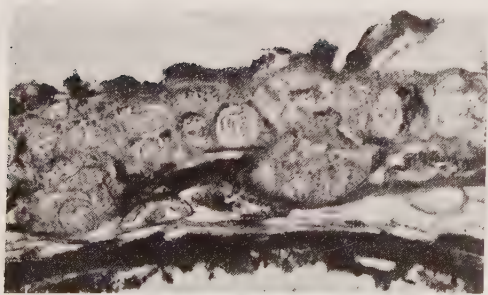


Fig 6

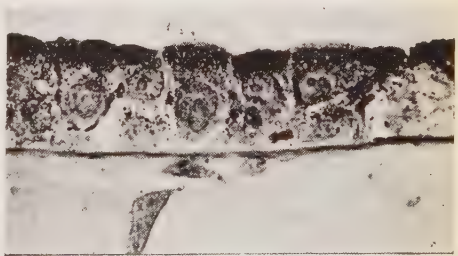


Fig. 7

Fig. 1: Pelle di girino (28 b). Si nota l'epidermide bistratificata ed il derma rappresentato da una sottile lamella. Addensamento di pigmento verso il bordo esterno. - Fig. 2: Stadio 2 (43 a). E visibile una ghiandola pluricellulare già approfondita nel derma. - Fig. 3: Stadio 3 (3 c). Epidermide pluristratificata, derma molto più spesso con una grossa ghiandola. Inizio della corneificazione. - Fig. 4: Stadio 7 (VIII). Si nota lo strato corneo perfettamente formato (strato di sostituzione sottostante) con lamelle che sono in via di desquamazione. Nel derma la "Grenzlamelle" che limita superiormente la ghiandola. - Fig. 5: Pelle di Anuro adulto. - Fig. 6: Individuo tiroidizzato (29). Pelle con strato corneo a desquamazione cellulare; ghiandole pluricellulari. - Fig. 7: Controllo della Fig. 6; Pelle perfettamente larvale (vedi Fig. 1).

Tutti i preparati sono colorati con la Mallory.



tenendo conto del fatto già ricordato da Drzewichi, che la pelle non reagisce in tutte le zone egualmente all'ormone tiroideo e che la regione suddetta è la prima a modificarsi.

I girini tiroidizzati [a 13 giorni dalla nascita (29 b, fig. 6 e 7) privo di arti] e fissati dopo 14 giorni dal trattamento, mostrano la pelle completamente metamorfosata, con il derma abbastanza spesso, contenente numerose ghiandole acinose pluricellulari ed epidermide a pochi strati ma con lo strato corneo. — Il controllo presenta la pelle allo stato perfettamente larvale. — Ho notato che lo strato corneo di questo individuo tiroidizzato ha un aspetto nettamente diverso dallo strato corneo di individui in metamorfosi naturale; in questi, infatti, la pelle si desquama a lembi che comprendono più cellule in lunghezza e che si staccano quando lo strato sottostante (strato di sostituzione) ha già iniziato la corneificazione; nell'individuo tiroidizzato, invece, ogni scaglietta che si distacca comprende una singola cellula di cui forma una specie di cappuccio e lo strato di sostituzione non sembra corneificato.

Si ha l'impressione che, per la tiroidizzazione manchi il tempo ad una lenta corneificazione e che le lamelle si distacchino sulle singole cellule, appena avvenuta la degenerazione cornea.

Le ghiandole pluricellulari, al contrario, risultano conformate nello stesso modo e composte di un egual numero di cellule sia negli individui metamorfosati normalmente che in quelli tiroidizzati (1).

CONCLUSIONE. — Ho tentato in questa mia Nota di stabilire una cronologia di fenomeni nella metamorfosi della pelle ed ho visto che l'inizio di questo episodio si può fissare nel 2° stadio o alla fine del 1°.

Nella metamorfosi della pelle le prime ad apparire in ordine di tempo, sono le ghiandole pluricellulari e solo in stato molto più avanzato (stadio 7) appare lo strato corneo. È interessante notare che questo fatto ci permette di interpretare la struttura della pelle negli Anfibi neotenicici. Infatti nella pelle di Proteo si trovano ghiandole pluricellulari contemporaneamente alle cellule di Leydig ma non lo strato corneo.

Nella metamorfosi normale dell'occhio, la metamorfosi del cristallino precede quella della cornea; nella metamorfosi accelerata queste parti si metamorfosano contemporaneamente. Però il cristallino non ha il tempo per compiere il suo completo differenziamento, per cui appare, relativamente alla cornea, ancora larvale.

(1) In altre regioni del corpo, p. es. negli abbozzi degli arti, del girino tiroidizzato si ha invece la formazione dello strato corneo normale con la presenza anche dello strato di sostituzione, mentre l'epidermide non è ancora così differenziata come nella regione fra gli occhi sopra descritta.

Lo studio del comportamento di queste varie regioni sarà oggetto di una Nota successiva.



Nella pelle vediamo accadere un fenomeno analogo, la formazione delle ghiandole precede nella metamorfosi normale, quella dello strato corneo; invece nella metamorfosi accelerata tutti e due i fenomeni morfogenetici compaiono contemporaneamente. Inoltre lo strato corneo non ha il tempo di costituirsi normalmente e la desquamazione avviene disordinatamente senza costituire un lembo corneo continuo (desquamazione cellulare).

**Biologia.** — *La definizione degli stadi della metamorfosi del Bufo*<sup>(1)</sup>. Nota di G. SCHREIBER, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio A. GHIGI.

Nelle ricerche sperimentali sulla metamorfosi degli Anuri, una delle difficoltà più notevoli per il rilevamento e la descrizione dei fenomeni sta nel fatto che l'indicazione dell'età dei girini, ad un certo momento dell'ontogenesi, non è più sufficiente ad indicare lo stadio effettivo nel quale i girini si trovano.

Nei primi tempi dello sviluppo, e fino all'inizio della metamorfosi, cioè nel periodo che da alcuni Autori viene chiamato « prometamorfosi » (Etkin)<sup>(3)</sup>, fino alla comparsa degli abbozzi degli arti posteriori, l'accrescimento e lo sviluppo dei girini di una popolazione derivata da una deposizione unica, è sufficientemente omogeneo. Basta perciò per indicare il grado di sviluppo, dare l'età del lotto oppure la lunghezza totale dei girini. All'inizio della metamorfosi, e specialmente quando questa è già piuttosto avanzata, dopo la comparsa degli arti inferiori, in un lotto di girini schiusi dalla stessa deposizione, per quanto uniformi siano le condizioni di allevamento, vi è sempre una certa discordanza, e talvolta anche notevole, fra gli stadi raggiunti dai vari individui. Per ciò, l'indicazione dell'età in questo periodo è assolutamente insufficiente.

È necessario quindi in questo caso adottare altri criteri per la identificazione dello stadio raggiunto dai girini in metamorfosi soprattutto per poter confrontare questi stadi in condizioni differenti sperimentali o di allevamento.

Alcuni AA. hanno adottato come criterio « di stadio » la lunghezza del girino per gli stadi precedenti alla comparsa degli arti posteriori e successivamente la lunghezza di questi arti. Dopo iniziata la metamorfosi, è necessario fissare alcuni fenomeni di questa, facilmente identificabili e che per quanto possibile abbiano anche un certo significato come stadi ontogenetici.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparate della R. Università di Padova.

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) W. ETKIN, « Physiological Zoology », V, 1932.



In questo senso, pochissimi Autori hanno sinora descritto gli stadi della metamorfosi e ciascuno generalmente per specie diverse. Quest'ultimo fatto è giustificato dalle differenze talvolta profonde che intercorrono fra le varie specie per quanto riguarda sia la cronologia, sia la natura stessa degli episodi della metamorfosi.

In generale per la determinazione degli stadi, che è naturalmente convenzionale, mi sembra criterio utile prendere solamente in considerazione le modificazioni rapide degli organi, i fenomeni bruschi che durino il minor tempo possibile, onde non avere altro che il minimo di stadi di transizione tra due di questi stadi tipici. Per ciò nella scelta degli organi che vanno considerati in queste ricerche debbono essere trascurati tutti quelli ad accrescimento o trasformazione graduale, anche se tra questi ve ne sono alcuni di grandissimo valore morfogenetico. Così ad esempio tutte le modificazioni che avvengono nell'apparato boccale (almeno per certe specie), così i fenomeni di morfogenesi degli arti, del capo ecc.

Non dobbiamo dimenticare che l'ontogenesi è un fenomeno sempre graduale che non conosce, almeno per questi casi, arresti o salti e tutti i fenomeni avvengono con una determinata successione, distanziati però di periodi di tempo differenti. Tra tutti, ve ne è qualcuno che, più rapido degli altri, conduce a distinguere facilmente due momenti dell'ontogenesi anche molto vicini nel tempo. Questi sono gli stadi che ci servono nel caso in questione.

È chiaro in ogni modo che la scelta degli stadi tipici è un fatto del tutto arbitrario, e modificabile caso per caso nelle varie specie, e non va confuso con la cronologia degli episodi della metamorfosi, con la quale necessariamente coincide in parte, essendo gli stadi tipici, soltanto alcuni, dei più evidenti degli episodi della metamorfosi.

Ho ritenuto utile fissare l'attenzione su questo problema della scelta degli stadi tipici della metamorfosi, ed in particolare di quelli del *Bufo vulgaris* Laur., specie della quale mi sono servito a lungo in varie ricerche sulla metamorfosi normale ed accelerata, e per la quale non mi consta sieno stati fissati degli stadi tipo di facile e pronta identificazione.

L'utilità di una serie così costituita, si rivela notevole anche per un genere di ricerche diverso da quello sinora intrapreso dalla maggior parte degli Autori che hanno studiato la metamorfosi. Vedremo in una Nota successiva come, una volta fissati gli stadi, sia facile procedere allo studio di una intera popolazione di girini in metamorfosi e dell'andamento di questo processo nel complesso della popolazione. Vedremo come, studiando la frequenza dei singoli stadi in tempi successivi, mi sia stato possibile seguire la metamorfosi dal punto di vista statistico. Una indagine in questo senso può forse portare a dei risultati notevoli, se proseguita con criteri costanti e comparativi su specie diverse ed in condizioni di allevamento, di esperimento o geografiche diverse.

I. — Gli « stadi tipo » della metamorfosi degli Anuri.

Vediamo ora brevemente come alcuni stadi siano stati definiti da alcuni AA. precedenti in varie specie. Anche per gli Urodeli alcuni AA. hanno fissato degli stadi tipo p. es. per *Amblystoma* (Boulenger) <sup>(1)</sup>.

WINTREBERT <sup>(2)</sup>, per la *Rana temporaria* istituisce 10 stadi dall'inizio della comparsa degli arti posteriori fino alla fuoruscita di quelli anteriori. Lo studio minuzioso e preciso del WINTREBERT è però limitato quasi esclusivamente allo sviluppo dell'arto ed i vari stadi sono caratterizzati dal momento di comparsa delle varie dita, dai rapporti di lunghezza fra queste, dallo sviluppo delle linee pigmentate, dalla comparsa delle varie curve del ginocchio e dalla posizione dei vari segmenti dell'arto. Il criterio di diagnosi dei vari stadi è scelto con notevole precisione ed atto a facilitare il riconoscimento dello stadio.

Però sono qui considerati soltanto i primi stadi della metamorfosi, di modo che FEYEL <sup>(3)</sup>, in uno studio sullo sviluppo del tubulo renale negli Anuri, trova necessario fissare altri quattro stadi successivi a quelli del WINTREBERT, per poter definire cronologicamente i fenomeni ontogenetici considerati. Questi stadi successivi fissati da FEYEL sono distinti essenzialmente dalla lunghezza della coda durante la riduzione (ridotta a  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{3}{4}$ , non più visibile dal lato ventrale).

Da quanto ho accennato è evidente che quest'ultimo criterio non risponde alle necessità già prospettate: si tratta di fenomeni gradualisti, non bene identificabili nelle fasi intermedie.

Molto più precisa e di indubbio valore ontogenetico è la serie che ETKIN <sup>(4)</sup> stabilisce per *Rana palustris*, *R. clamitans* e *R. catesbeiana*.

Questo A. fissa per tutta la cronologia della metamorfosi, un episodio base, che è la comparsa del 1° arto anteriore, e lo fissa arbitrariamente al 30° giorno. Gli stadi precedenti a questo vengono contraddistinti dalla lunghezza in mm. degli arti posteriori e prima della comparsa di questi, dalla lunghezza totale del corpo.

Gli stadi della metamorfosi fissati da ETKIN e in base ai quali questo A. procede nelle sue interessanti ricerche sulla cronologia della metamorfosi e sui rapporti con lo sviluppo della tiroide, considerano vari « episodi », i quali sono lievemente diversi tra le tre specie in questione.

(1) E. G. BOULANGER, « Proc. Zool. Soc. London », 2, 1913.

(2) P. WINTREBERT, « Compt. Rend. Soc. Biol. Paris », 59, 1905.

(3) P. FEYEL, « C. R. Ass. Anat. », Bruxelles, 1934 e *Le tube urinaire dans la série animale*. Paris, Le François, 1935.

(4) W. ETKIN, loc. cit.

Per la *Rana palustris* gli stadi sono i seguenti:

« 1 » arti post. di 5 mm. — « 2 » comparsa linee latero-dorsali chiare. — « 3 » macchie dorso-laterali. — « 4 » apertura per gli arti anteriori. — « 5 » comparsa arti ant. — « 6 » perdita del becco chitinoso. — « 7 » comparsa delle palpebre. — « 8 » muta della pelle. — « 9 » riassorbimento della coda. — « 10 » formazione dell'apertura branchiale cutanea (« gill-skinwindow ») — « 11 » chiusura della cavità opercolare. — « 12 » bocca adulta completamente formata. « 13 » formazione del timpano.

Per le altre due specie (*R. clamitans* e *catesbeiana*), ETKIN nota che non compaiono così nette le variazioni di pigmentazione; nella *catesbeiana* il foro d'uscita dell'arto anteriore compare da 6 a 11 giorni prima dell'uscita dell'arto stesso. Inoltre considera qui il fenomeno del riassorbimento del tubo anale che come vedremo mi sembra molto importante per il *Bufo*. La muta cutanea si ha entro 1-5 giorni dalla comparsa dell'arto anteriore. Si può inoltre cogliere bene il momento in cui si inizia la respirazione aerea, osservando la posizione dei girini con le narici fuori dell'acqua.

Da questa minuta analisi di ETKIN risulta già chiaro che la serie degli stadi tipici della metamorfosi va indicata dettagliatamente, specie per specie, e non si può assolutamente generalizzare la serie di stadi di una specie ad altre anche molto vicine sistematicamente.

Altre serie analoghe vennero istituite per la *Rana clamitans* da JANES <sup>(1)</sup> nel corso di una ricerca sulla metamorfosi del sistema digerente e da KAYWIN <sup>(2)</sup> per la *Rana catesbeiana*. Tutt'e due le serie però sono meno complete di quelle corrispondenti di ETKIN.

Per questa ragione ho anche creduto opportuno fissare la serie degli stadi per il *Bufo* del tutto indipendentemente da quelle descritte dagli AA. precedenti su altre specie, e basandomi solo su quei caratteri che più mi sembravano utili ad una rapida e sicura determinazione, anche se non sempre di fondamentale valore ontogenetico. Aggiungo ancora che gli stadi che qui descrivo non li considero definitivi, poichè non li ho fissati dopo lungo e minuzioso esame della successione cronologica degli episodi metamorfici, esame che a mio modo di vedere deve anche comprendere lo studio delle modificazioni interne dei vari organi e sistemi. Considero perciò la serie che ho fissato per il *Bufo* come passibile di eventuale ulteriore modificazione in seguito a successive ricerche.

Questi stadi vennero da me indicati provvisoriamente nel corso di una ricerca statistica su una popolazione di girini di *Bufo* derivati da una unica deposizione e quindi per necessità di condizioni ho dovuto istituire questi stadi in breve tempo. Ciò nondimeno i risultati conseguiti dall'indagine statistica, e soprattutto la notevole facilità del rilevamento statistico stesso mi

(1) R. G. JANES, « J. exp. Zool. », 67, 1934.

(2) L. KAYWIN, « Anat. Rec. », 64, 1936.

inducono a rendere nota la serie adottata. A tutto ciò si aggiunga anche il fatto che, raccolti man mano gli stadi come si presentavano durante la ricerca e catalogati secondo questa serie, il materiale venne ulteriormente utilizzato per ricerche di carattere istologico, per le quali si rendeva necessaria la esatta indicazione di stadio.

## II. — *Descrizione degli stadi.*

Mi sono limitato a fissare soltanto 8 stadi a partire dal momento in cui compaiono gli arti posteriori sotto forma di abbozzi nettamente visibili ai lati del tubo anale.

Lo stadio « 1 », denominato per brevità di esposizione *arti posteriori* è uno stadio di lunga durata e comprende perciò girini di dimensioni notevolmente diverse ed ha anche relativamente poco valore ontogenetico. A questo stadio sono corrispondenti tutti gli stadi della serie di WINTREBERT basati come abbiamo visto sulla morfogenesi degli arti posteriori.

Lo stadio « 2 » *scomparsa tubo anale* ha inizio al momento in cui si nota il riassorbimento del tubo anale, situato nei girini di Bufo sulla lamina caudale ventrale perfettamente nel piano sagittale. Colla scomparsa del tubo anale, coincide la formazione della regione anale definitiva con la delimitazione della regione perineale e la formazione della coscia di tipo adulto. I due arti posteriori vengono così a trovarsi riuniti sul piano sagittale mentre negli stadi precedenti essi si trovavano spostati con la inserzione lateralmente al piano sagittale.

La completa scomparsa del tubo anale si rivela con una profonda insenatura nel profilo della lamina caudale ventrale alla sua inserzione craniale. Questo stadio si identifica facilmente osservando il girino di profilo. Durante questo stadio si hanno altre manifestazioni metamorfiche di grandissima importanza morfogenetica, come p. es. le modificazioni boccali (scomparsa del becco corneo e delle papille labiali) nonchè l'inizio delle modificazioni del tubo digerente che danno al girino la caratteristica riduzione dell'addome.

Lo stadio « 3 »: *primo arto anteriore* è ben definito e consiste nella comparsa all'esterno del primo degli arti anteriori, destro o sinistro indifferentemente. Ho fatto anche qualche osservazione statistica su questo punto e direi che, come già altri AA. hanno constatato la probabilità che esca prima l'arto destro o quello sinistro è quasi identica. Questo stadio è breve. Dura soltanto fino alla comparsa del secondo arto anteriore che segna l'inizio dello stadio « 4 »: *due arti anteriori*. Questo quarto stadio dura fino a che si iniziano le modificazioni del muso con lo spostamento delle narici dalla posizione dorsale tipica del girino alla posizione rostrale terminale caratteristica dell'adulto.

In generale ritengo utile definire lo stadio denominandolo con la indicazione del fenomeno più appariscente che lo caratterizza, ma ritengo altresì



necessario definire i limiti dello stadio indicando sia il fenomeno col quale esso ha inizio che quello dopo il quale si considera passato allo stadio successivo. Quindi lo stadio « 4 » andrebbe definito « dalla comparsa del secondo arto anteriore fino alla completa formazione del rostro » e così pure andrebbero completate le definizioni degli altri stadi.

Alla fine di questo stadio i girini cominciano a stare con le narici al pelo del liquido e si trova il corrispondente stadio nella serie di ETKIN per *Rana clamitans* e *catesbeiana*.

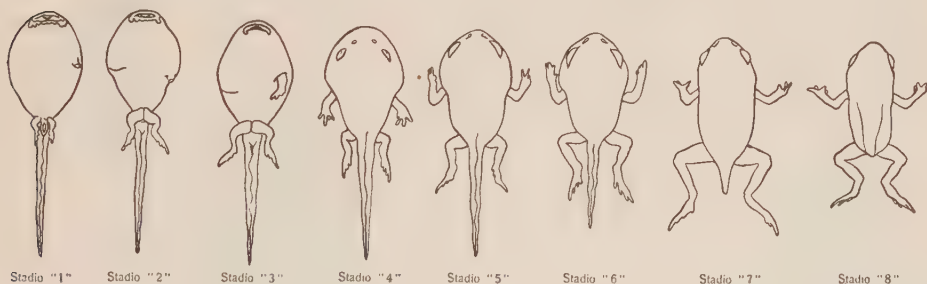
Lo stadio « 5 » viene quindi caratterizzato dalle *narici rostrali* ed è definito dal perdurare della coda integra. Ha termine con l'inizio della riduzione della coda.

Lo stadio « 6 » è caratterizzato dalla *riduzione dell'apice caudale* iniziandosi al momento in cui l'apice caudale apparisce avvizzito, laddove la lamina caudale dorsale e ventrale è ancora nettamente visibile. Ha termine con la completa scomparsa dei lembi della lamina che definisce lo stadio successivo « 7 » caratterizzato dal *monconcino* caudale conico senza traccia di lamina. Ho ritenuto utile scegliere questi fenomeni che appaiono abbastanza bene definiti anziché il criterio della lunghezza totale della coda come adottato da altri AA.

Gli stadi « 6 » e « 7 » sono spesso già fuori dell'acqua e i ranocchini si arrampicano sui sassi posti nelle vasche e respirano nettamente all'aria.

Questi stadi sono forse fra i meno facili a definire, ma come ho detto avanti, mi pare che la riduzione della lamina caudale sia un fatto più appariscente e più facilmente apprezzabile che non le variazioni relative di lunghezza della coda totale.

L'ultimo stadio « 8 » è caratterizzato dalla completa scomparsa della coda, della quale non rimane altro che una lieve sporgenza dal lato dorsale.



La comparsa della membrana timpanica che ETKIN considera come l'episodio finale della metamorfosi, e che in realtà è un fatto morfogenetico di valore fondamentale, non è facilmente apprezzabile nel *Bufo*. L'intensa pigmentazione melanica della pelle non permette una facile identificazione di tale membrana, per cui ho creduto di abbandonare tale criterio pur riconoscendone il valore come episodio ontogenetico.



\*  
\*   \*  
\*

Questa serie costituita soltanto con i caratteri di facile rilevamento ad una rapida osservazione anche a occhio nudo, ha, come ho già detto soltanto valore convenzionale. Una serie di episodi di valore ontogenetico reale non può venir costituita che dopo un minuto esame della morfologia di tutti gli organi ed implica quindi un lungo studio sistematico istologico dei vari stadi; studio che ho intrapreso già da tempo.

GIACOMINI<sup>(1)</sup> ha pubblicato anni or sono una ricerca del genere con lo scopo anche di stabilire le differenze fra la metamorfosi normale e quella accelerata dalla somministrazione di tiroide. In alcuni lavori precedenti ho iniziato metodicamente lo studio di queste relazioni tra la metamorfosi normale e quella accelerata nel *Bufo* considerando soprattutto la cronologia dei fenomeni che viene sostanzialmente alterata dalla tiroidizzazione. Rimando quindi a quei lavori (SCHREIBER<sup>(2)</sup>, ROMANO<sup>(3)</sup>) la trattazione teorica dei problemi relativi.

(1) E. GIACOMINI, «Rend. R. Acc. Scienze Bolognà», N. S., XX, 1916.

(2) G. SCHREIBER, «Arch. Zool. It.», XX, 1934; «Atti Soc. med. chir.», Padova, 1934; «Boll. Soc. It. Biol. sperim.», IX, 1934.

(3) M. ROMANO, «Arch. It. Anat. Embriol.», XXXVI, 1936; «Rend. R. Acc. Naz. Lincei», ser. 6<sup>a</sup>, 1937.

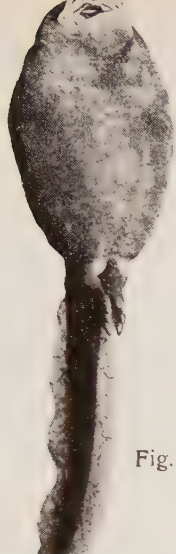


Fig. 1



Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4



Fig. 5



Fig. 6



Fig. 7



Fig. 8



Fig. 9



Fig. 10



Fig. 11

Fig. 1 e 2: Stadio "1" "arti posteriori" (due stadi successivi), - Fig. 3 e 4: Stadio "2" "sparizione tubo anale" (due stadi successivi). La figura 4 mostra molto evidente lo spazio lasciato dal riassorbimento della regione anale. - Fig. 5: Stadio "3" "primo arto anteriore". - Fig. 6 e 7: Stadio "4" "due arti anteriori". - Fig. 8: Stadio "5" "narici rostrali". - Fig. 9: Stadio "6" "riduzione apice caudale". - Fig. 10: Stadio "7" "monconcinco caudale". - Fig. 11: Stadio "8" "fine metamorfosi". - Le figg. da 1 a 5 sono ingrandite 1:5,7, quelle dalla 6 alla 11 ingrandite 1:5,5.



## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Il Socio ARMELLINI presenta per l'inserzione nei « Rendiconti » una sua Nota dal titolo « Nuove ricerche sul problema dei due corpi di masse variabili » e ne espone il contenuto.

Il Corrispondente GIORGI presenta ed espone una sua Nota dal titolo « Trasformazione di Laplace a operatori funzionali ».

Il Corrispondente SCORZA presenta una Nota di Tullio Turri dal titolo « Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due ».

L'Accademico Segretario PARRAVANO legge l'elenco delle Note inviate alla Segreteria.

## OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentante nella seduta del 4 aprile 1937*

- Académie des Sciences de la R. S. S. d'Ukraine. — Allergie. Travaux de la conférence tenue à Kiev le 1-4 février 1936. Kiev, 1937. 8° pp. 1-512.
- ACERBO GIACOMO. — La marcia storica dell'olivo nel bacino del Mediterraneo. (Conferenza tenuta a Tripoli il 2 novembre 1936 nella XXV Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze). Roma, 1937. 8°, pp. 1-22.
- ALCOCK P. and BERRY J. L. — The action of drugs on the pulmonary circulation. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXV, pp. 269-391). Edinburgh, 1935. 8°.
- ALCOCK P. and BERRY J. L. — The action on perfused lungs of drugs injected into the bronchial vascular system. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXVI, pp. 13-27). Edinburgh, 1936. 8°.
- ALFIERI SECONDO. — Indagini idrologiche sul nubifragio dell'agosto 1935 nel bacino del torrente Orba. (Estr. dagli «Annali dei Lavori Pubblici» già Giornale del Genio Civile. Anno 1936). Roma, 1936. 8°, pp. 1-12.
- BERRY J. L. — Vedi ALCOCK P.
- BRACCINI PAOLO. — Contributo alla conoscenza dei silos metallici e delle insilatrici. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno 1936, pp. 15-25). Roma, 1936. 8°.
- BRACCINI PAOLO. — Esperimenti con un nuovo emulsore dei grassi per la reintegrazione del latte scremato. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno 1935, pp. 291-306). Roma, 1935. 8°.
- BRACCINI PAOLO. — Esperimento di alimentazione delle vacche da latte con cime di mais insilate. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno 1936, pp. 26-40). Roma, 1936. 8°.
- BRACCINI PAOLO. — Esperimento di alimentazione delle vacche da latte con mais caragua insilato. (Estr. dalla «Rivista di Zootecnica». Anno 1936). Firenze, 1936. 8°, pp. 1-19.
- BRACCINI PAOLO. — L'infossamento dei foraggi col metodo Italo Giglioli (I. G.). Esperimento con foglie di barbabietole. (Estr. dalla «Rivista di Zootecnica». Anno 1936). Firenze, 1936. 8°, pp. 1-18.
- BRACCINI PAOLO. — Ricerche sul controllo della freschezza delle uova. (Estr. dai «Nuovi Annali dell'Agricoltura». Anno 1935, pp. 455-465). Roma, 1935, 8°.
- CARTAN C. — Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective. Fasc. XVII. Paris, Editeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-308.
- CHAMPETIER G. — Deutérium et composés de deutérium. (Tables annuelles de constantes et données numériques I.). Paris, Editeurs Hermann et Cie, 1937. 8°, pp. 1-179.
- CLARK A. J. and EGGLETON M. J. — Phosphagen changes in iodoacetate poisoned frog's ventricle. (Reprint. from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXVI, pp. 119-126). Edinburgh, 1936. 8°.
- DE BURGH DALY I. — Interference of Intrinsic Pulmonary Mechanismus



- as a Potential Cause of Asthma. (Reprinted from the «Transactions of the Medico-Chirurgical Society of Edinburgh», 1936. pp. 139-142). Edinburgh, 1936. 8°.
- DE BURGH DALY I. — The Physiology of the bronchial vascular system. (Reprinted from the «Harvey Lectures» 1935-36, pp. 235-255). Edinburgh, 1936. 8°.
- DE BURGH DALY I. and FOGGIE P. — The potentiation of histamine and tyramine effects by the combined action of ergotoxine and cocaine. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXVI, pp. 235-251). Edinburgh, 1937. 8°.
- DRUMAUX M. P. — La vitesse radiale des nébuleuses extra-galactiques. (Estr. des «Annales de la Société scientifique de Bruxelles». Série B. Sciences physiques et naturelles. T. LVI, pp. 327-341). Louvain, 1936. 8°.
- EGGLETON M. J. — Vedi CLARK A. J.
- FANO GINO. — A proposito di un lavoro del Sig. Ramamurti (Sulle rigate razionali normali). (Estr. dagli «Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino». Vol. 71). Torino, 1936. 8°, pp. 1-7.
- FANO GINO. — Su alcune varietà algebriche a tre dimensioni aventi curve sezioni canoniche. (Estr. da «Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari», pp. 329-349). Pavia, 1936. 8°.
- FANO GINO. — Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche. (Estr. dalle «Memorie della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali della R. Accademia d'Italia», Vol. VIII, pp. 23-64). Roma, 1937. 8°.
- FANO GINO. — Superficie algebriche e varietà a tre dimensioni a curve sezioni canoniche (Estr. dai «Rendiconti della R. Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali». Vol. XXIII pp. 813-818). Roma, 1936. 8°.
- FOGGIE P. — The action of adrenaline, acetylcholine, and histamine on the lungs of the rat. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXVI, pp. 225-233). Edinburgh, 1937. 8°.
- FOGGIE P. — Vedi DE BURGH DALY I.
- GHAFFAR ABDUL. — Diffusion of iodide into and out of the voluntary muscles of the frog. (Reprinted from the «Physiology». Vol. XXV, pp. 241-245). Edinburgh, 1935. 8°.
- GHAFFAR ABDUL. — Diffusion of lactic acid into and out of the voluntary muscles of the frog. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXV, pp. 229-239). Edinburgh, 1935. 8°.
- GIUSTI GIUSEPPE. — Rilievi sulla resa alla macellazione dei polli di razza livornese bianca. (Estr. dalla Rivista «La Clinica Veterinaria», Anno 1936) Milano, 1936. 8°, pp. 1-5.
- LANDAU E. — On a Titchmarsh-Estermann Sum (Extracted from the «Journal of the London Mathematical Society» Vol. 11, pp. 242-245). London, 1936. 8°.
- PAOLI GUIDO. — Osservazioni su alcune particolarità di struttura e funzione dell'apparato genitale femminile di *Dociostaurus maroccanus* Thnb. (Orthopt. Acrididae). (Estr. dal «Redia». Vol. XXIII, pp. 17-26). Firenze, 1937. 8°.
- PAOLI GUIDO. — Osservazioni sulla morfologia dell'estremo addome della femmina dei Ditteri Bombiliidi. (Estr. dal «Redia». Vol. XXIII). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-4.
- PAOLI GUIDO. — Ricerche sulla morfologia e anatomia del capo delle larve dei Ditteri Bombiliidi. (Estr. dal «Redia». Vol. XXIII). Firenze, 1937. 8°, pp. 1-16.
- PAOLI GUIDO. — Studi sulle cavallette di Foggia. (*Dociostaurus maroccanus* Thnb.) e sui loro oofagi (*Ditteri Bombiliidi* e *Caleotteri Meloidi*) ed acari ectofagi (*Eritreidi* e *Trombidiidi*). (Estr. dal «Redia». Vol. XXIII, pp. 27-170). Firenze, 1937. 8°.

- PIROCCHI ANTONIO. — I risultati conseguiti in Italia nel campo zootecnico durante il decennio IV-XIII E. F. (Estr. dalla XXIV Riunione della Società Italiana per il Progresso delle Scienze 12-18 ottobre 1935). Roma, 1935. 8°, pp. 1-43.
- PIROCCHI ANTONIO. — Il prof. Paolo De chambre (1868-1935). (Estr. dalla Rivista «La Clinica Veterinaria». Anno 1935, n. 4). Milano, 1935, 8°, pp. 1-4.
- PIROCCHI ANTONIO. — Il prof. Raffaele Zappa (1855-1935). (Estr. da «La Clinica Veterinaria», Anno 1935, n. 12). Milano, 1935, 8°, pp. 1-4.
- PIROCCHI ANTONIO. — Le leggi sulla eredità e la loro applicazione alla produzione del cane di razza. (Estr. dalla Rivista «La Clinica Veterinaria», Anno 1935, n. 5). Milano, 1935, 8°, pp. 1-10.
- PIROCCHI ANTONIO. — Razza ambiente ed altri fattori nella produzione e nel rendimento delle bovine da latte. Milano, 1936. 8°, pp. 1-58.
- SCHILD H. — Histamine release and anaphylactic shock in isolated lungs of guinea-pigs. (Reprinted from the «Quarterly Journal of Experimental Physiology». Vol. XXVI, pp. 165-179). Edinburgh, 1936, 8°.
- SCHILD H. — The origin of the histamine-like substance released in anaphylactic shock. (From the «Journal Physiology». Vol. 86). Edinburgh, 1936. 8°. fol.
- SCHILD B. — The reaction of the guinea-pig's uterus immersed in a histamine solution to histamine and anaphylaxis. (From the «Journal Physiology». Vol. 86). Edinburgh, 1936. 8°, pp. 1-2.
- TUNAZIMA N. — On Ferromagnetic Moment. Tokio, 1936. 8°, pp. 1-12.
- TURATI EMILIO. — Novità di Lepidotterologia in Cirenaica (Estr. dagli «Atti della Soc. Ital. di Scienze Naturali», Vol. LXXV). Milano, 1936. 8°, pp. 1-7.
- TURATI EMILIO e KRÜGER GIORGIO. — Contributi alla fauna Cirenaica; novità di Lepidotterologia (Estr. dalle «Memorie della Società Entomologica Italiana». Vol. XV, pp. 55-77) Genova, 1936. 8°.
- VAGHI LORENZO. — Contributo allo studio della cronologia dentaria nei bovini. Osservazioni sulla comparsa dei cantoni permanenti. (Estr. dalla Rivista «La Clinica Veterinaria». Anno 1935). Milano. 1935, 4°, pagine 1-13.

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Fascicolo del 18 aprile 1937 - Anno XV*

MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Espressioni della curvatura di una superficie.* Nota di A. DE MIRA FERNANDES, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In una Nota della Sig.na dott. Giacinta Andruetto, pubblicata in questi « Rendiconti »<sup>(2)</sup>, si stabilisce una espressione interessante della curvatura gaussiana d'una superficie, a mezzo della curvatura  $\frac{1}{\rho_v}$  e della torsione  $\frac{1}{\tau_v}$  di una qualunque geodetica della superficie, passante pel punto considerato, la cui tangente, in tal punto, faccia l'angolo  $v$  con una direzione fissa del piano tangente. La formola è la seguente:

$$(1) \quad K_0 = -\frac{3}{4} \left( \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 + \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{d}{dv} \left( \frac{1}{\rho_v \tau_v} \right).$$

La sua deduzione può ottenersi molto semplicemente nel modo che segue.

Siccome la curvatura di una geodetica, in un punto, è eguale a quella della sezione piana normale che ha la stessa tangente, sarà

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{1}{R_1} \sin^2 v + \frac{1}{R_2} \cos^2 v,$$

dove  $\frac{1}{R_1}$  e  $\frac{1}{R_2}$  sono le curvature delle sezioni principali e  $v$  l'angolo della

(1) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(2) Nuova espressione per la curvatura totale di una superficie. Questi « Rendiconti », vol. XXIII, gennaio 1936.

tangente alla geodetica considerata con la tangente alla sezione principale di curvatura  $\frac{I}{R_2}$  (formola d'Eulero).

D'altra parte <sup>(1)</sup>, la torsione di quella geodetica è data dalla formola

$$(3) \quad \frac{I}{\tau_v} = \frac{I}{2} \left( \frac{I}{R_1} - \frac{I}{R_2} \right) \sin 2v.$$

Da ciò risulta che

$$(4) \quad \frac{2}{\tau_v} = \frac{d}{dv} \left( \frac{I}{\rho_v} \right).$$

Risolvendo il sistema formato dalle equazioni lineari (2) e (3), rispetto a  $\frac{I}{R_1}$  e  $\frac{I}{R_2}$ , si ottiene

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{I}{R_2} = \frac{\frac{2}{\tau_v} \sin^2 v - \frac{I}{\rho_v} \sin 2v}{-\sin 2v} \\ \frac{I}{R_1} = \frac{-\frac{I}{\rho_v} \sin 2v - \frac{2}{\tau_v} \cos^2 v}{-\sin 2v} \end{array} \right.$$

Perciò, la curvatura totale sarà

$$(6) \quad \frac{I}{R_1 R_2} = \frac{I}{\rho_v^2} - \frac{I}{\tau_v^2} + \frac{2}{\rho_v \tau_v} \cotg 2v.$$

Ma, dalla (3), si ha

$$(7) \quad \frac{I}{2} \frac{d}{dv} \left( \frac{I}{\tau_v} \right) = \frac{I}{2} \left( \frac{I}{R_1} - \frac{I}{R_2} \right) \cos 2v.$$

Quindi, dalle (3) e (7) si ottiene

$$(8) \quad \cotg 2v = \frac{\frac{I}{2} \frac{d}{dv} \left( \frac{I}{\tau_v} \right)}{\frac{I}{\tau_v}};$$

e, dalla (6),

$$(9) \quad K_0 = \frac{I}{R_1 R_2} = \frac{I}{\rho_v^2} - \frac{I}{\tau_v^2} + \frac{\frac{d}{dv} \left( \frac{I}{\tau_v} \right)}{\rho_v},$$

la quale, tenendo presente la (4), riporta alla formola di G. Andruetto.

(1) Vedi, per esempio, BIANCHI, *Lezioni di Geometria differenziale*. (1922), vol. I, p. 296.

Possiamo esprimere  $K_0$  solo per  $\frac{1}{\rho_v}$  e sue derivate. Infatti, delle (4) e (9) risulta

$$(10) \quad K_0 = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{1}{\rho_v^2} - \frac{1}{4} \left( \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 + \frac{1}{2\rho_v} \frac{d^2}{dv^2} \left( \frac{1}{\rho_v} \right).$$

Dalla (5) risulta ancora una espressione semplice della *curvatura media*. Difatti

$$(11) \quad M_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{\rho_v} + \frac{1}{\tau_v} \cotg 2v;$$

ossia, per le (4) e (8),

$$(11') \quad M_0 = \frac{1}{\rho_v} + \frac{1}{2} \frac{d}{dv} \left( \frac{1}{\tau_v} \right) = \frac{1}{\rho_v} + \frac{1}{4} \frac{d^2}{dv^2} \left( \frac{1}{\rho_v} \right).$$

Dalle (10) e (11') si deduce anche questa relazione semplice tra le due curvature:

$$(12) \quad \frac{2}{\rho_v} M_0 - K_0 = \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{1}{4} \left( \frac{d}{dv} \frac{1}{\rho_v} \right)^2 = \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{1}{\tau_v^2} \quad (1).$$

Ne seguono in particolare espressioni interessanti per la curvatura media delle superficie planificabili e per la curvatura totale delle superficie minime, come è evidente.

Tutte queste formole risultano fondamentalmente dalla relazione (4), che mi pare sia stata molto poco usata in Geometria Differenziale.

$$(1) \text{ Per una superficie minima qualunque } -K_0 = \frac{1}{\rho_v^2} + \frac{1}{\tau_v^2}.$$



**Matematica** (Analisi matematica). — *La trasformazione di Gauss e i Polinomi di Hermite*. Nota di G. PALAMÀ, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

F. Tricomi, in una recente interessante Nota <sup>(2)</sup>, si è occupato della trasformazione

$$G_s^{(m)}[F(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(s-t)^2}{2m}} F(t) dt = f(s),$$

per cui propose il nome di TRASFORMAZIONE DI GAUSS, e della sua inversa. Fra i risultati notevoli <sup>(3)</sup> che si trovano nella Nota citata, vi sono i due seguenti che utilizzerò per determinare alcune identità fra i polinomi di Hermite; molte altre si possono trovare con metodi analoghi.

I detti risultati sono

$$(1) \quad G_s[H_n(t)] = s^n,$$

$$(2) \quad G_s(t^n) = \frac{H_n(is)}{i^n}, \quad \text{ove } i = \sqrt{-1}, \quad G_s \equiv G_s^{(1)}.$$

Facciamo presente che i polinomi di Hermite, che compaiono nelle due precedenti formole, hanno la seguente espressione

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^j \binom{n}{2j} (2j-1)!! x^{n-2j},$$

$$(2j-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1),$$

1. Tenuto presente la (1), che  $G_s(1) = 1$  e che

$$(3) \quad G_s[F(x \pm a)] = G_{s \pm a}[F(x)],$$

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) Cfr. F. TRICOMI, *Sulle trasformazioni funzionali lineari commutabili con la derivazione*, in « *Commentari Math. Helvetici* », vol. 8, 1935, pp. 70-87.

(3) Altri risultati importanti della Nota cit. ho utilizzato, allo stesso scopo di questo lavoro, in una Nota che sarà pubblicata prossimamente nei « *Rend. del R. Ist. Lombardo di Sc. e lett.* ». Cfr. anche un'altra mia Memoria di prossima pubblicazione nei detti « *Rendiconti* », dal titolo: *Sui Polinomi di Legendre, di Laguerre e di Hermite*, in cui, oltre a notevoli formule su questi polinomi interessanti, sono date notizie bibliografiche sull'argomento.

ciascuna delle seguenti identità <sup>(1)</sup> fra potenze, si traduce nella relazione fra gli  $H_n$  che è scritta di fianco, a destra

(4)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s+j)^m = 0, \quad m < n,$	(4')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_m(x+j) = 0, \quad m < n,$
(5)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s-j)^m = 0, \quad m < n,$	(5')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_m(x-j) = 0, \quad m < n,$
(6)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s+j)^n = (-1)^n n!,$	(6')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_n(x+j) = (-1)^n \cdot n!,$
(7)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s-j)^n = n!,$	(7')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_n(x-j) = n!,$
(8)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s_1+j)^{m_1} \cdot (s_2+j)^{m_2} = 0,$ $m_1 + m_2 < n,$	(8')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_{m_1}(x_1+j) H_{m_2}(x_2+j) = 0,$ $m_1 + m_2 < n,$
(9)	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (s_1+j)^{m_1} \cdot (s_2+j)^{m_2} =$ $= (-1)^n n!, \quad m_1 + m_2 = n,$	(9')	$\sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_{m_1}(x_1+j) H_{m_2}(x_2+j) =$ $= (-1)^n n!, \quad m_1 + m_2 = n,$
(10)	$\sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} s_1^{j+1} s_2^{n-j} =$ $= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} s_1^j s_2^{n+1-j},$	(10')	$\sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} H_{j+1}(x_1) H_{n-j}(x_2) =$ $= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} H_j(x_1) H_{n+1-j}(x_2),$
(11)	$\sum_{h=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-h} (-1)^j \binom{2n-h}{j} s_1^{j+1} s_2^{2n-j} =$ $= \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n+1}{j} s_1^{2n+1-j} s_2^j,$	(11')	$\sum_{h=0}^{2n} \sum_{j=0}^{2n-h} (-1)^j \binom{2n-h}{j} H_{j+1}(x_1) \cdot$ $\cdot H_{2n-j}(x_2) = \sum_{j=0}^{2n} (-1)^j \binom{2n+1}{j} \cdot$ $\cdot H_{2n+1-j}(x_1) H_j(x_2),$
(12)	$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m \sum_{h=0}^{km} \binom{m}{j} \binom{km}{h} s^{h+j} =$ $= \sum_{j=1}^{\mu} \binom{\mu}{j} s^j, \quad \mu = (n+1)m,$	(12')	$\sum_{k=0}^n \sum_{j=1}^m \sum_{h=0}^{km} \binom{m}{j} \binom{km}{h} H_{h+j}(x) =$ $= \sum_{j=1}^{\mu} \binom{\mu}{j} H_j(x), \quad \mu = (n+1)m,$
(13)	$\sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^h (-1)^{j+1} \cdot \binom{h}{j} s^{j+1} =$ $= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} s^{n+1-j},$	(13')	$\sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^h (-1)^{j+1} \binom{h}{j} H_{j+1}(x) =$ $= (-1)^{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n+1}{j} H_{n+1-j}(x).$

(1) Le identità (4), (5), (6), (7), (8) e (9) sono ad esempio riportate in E. NETTO, *Lehrbuch der Combinatorik*, p. 246 e seguenti, 1927.

2. Si osservi che (4) e (5), scritte come segue, danno le ulteriori relazioni fra gli  $H_n$  qui appresso, a destra, indicate.

$$\begin{aligned} (4'') \quad \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^b \binom{n}{h} \binom{m}{j} s^{m-j} h^j &= 0, & \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^b \binom{n}{h} \binom{m}{j} h^j H_{n-j}(x) &= 0, \\ (m < n), & & (m < n), & \\ (5'') \quad \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{b+j} \binom{n}{h} \binom{m}{j} s^{m-j} h^j &= 0, & \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{b+j} \binom{n}{h} \binom{m}{j} h^j H_{m-j}(x) &= 0, \\ (m < n), & & (m < n), & \end{aligned}$$

e allora, qualunque siano  $m$  ed  $n$ , è

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^b \binom{n}{h} \binom{m}{j} h^j H_{m-j}(x) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_m(x+j), \\ \sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^m (-1)^{b+j} \binom{n}{h} \binom{m}{j} h^j H_{m-j}(x) &= \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} H_m(x-j), \end{aligned}$$

perchè i due membri di ciascuna delle due precedenti si ottengono rispettivamente dal 1° membro di (4) e (4''), e dal 1° membro di (5) e (5'').

La (10'), per la formula di Runge può, più semplicemente, scriversi

$$\sum_{h=0}^n \sum_{j=0}^{n-h} \binom{n-h}{j} H_{j+1}(x_1) H_{n-j}(x_2) = 2^{\frac{n+1}{2}} H_{n+1}\left(\frac{x_1+x_2}{\sqrt{2}}\right) - H_{n+1}(x_2).$$

3. Poichè è

$$(14) \quad G_s \{ H_n [\sqrt{m}(x+a)] \} = (1-m)^{\frac{n}{2}} H_n \left[ \sqrt{\frac{m}{1-m}} (s+a) \right],$$

indicata con  $\bar{G}_s$  la trasformazione inversa di quella Gauss detta anche da Tricomi trasformazione ANTIGAUSS, dalla (14) risulta

$$(15) \quad \bar{G}_s \left\{ (1-m)^{\frac{n}{2}} H_n \left[ \sqrt{\frac{m}{1-m}} (s+a) \right] \right\} = H_n [\sqrt{m}(x+a)].$$

Ciò premesso operiamo, su i due membri della formula del Binomio:

$$(16) \quad \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_1^j s_2^{n-j} = (s_1 + s_2)^n,$$

con la trasformazione antigauss  $\bar{G}_{s_2}$ ; a mezzo di (1) e (3) abbiamo

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} s_1^j H_{n-j}(x_2) = H_n(s_1 + x_2),$$

cioè cambiando  $s_1$  e  $x_2$ , rispettivamente in  $\sqrt{\frac{m}{1-m}} \cdot s_1$  e  $\sqrt{\frac{m}{1-m}} x_2$  e moltiplicando ambo i membri per  $(1-m)^{\frac{n}{2}}$

$$(1-m)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( \frac{m}{1-m} \right)^{\frac{j}{2}} \cdot s_1^j H_{n-j} \left( \sqrt{\frac{m}{1-m}} x_2 \right) = \\ = (1-m)^{\frac{n}{2}} H_n \left[ \sqrt{\frac{m}{1-m}} (s_1 + x_2) \right].$$

Operando infine sui due membri della precedente con  $\bar{G}_{s_1}$ , si ha per le (1) e (15)

$$(17) \quad (1-m)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( \frac{m}{1-m} \right)^{\frac{j}{2}} H_j(x_1) H_{n-j} \left( \sqrt{\frac{m}{1-m}} x_2 \right) = \\ = H_n \left[ \sqrt{m} (x_1 + x_2) \right].$$

Da questa formula, che credo notevole, si possono desumere molte altre particolari, anch'esse interessanti. Così ad es., essendo <sup>(1)</sup>

$$\lim_{m \rightarrow 1} \sqrt{1-m}^{n-j} H_{n-j} \left( \sqrt{\frac{m}{1-m}} x \right) = x^{n-j}$$

da (17), si ha

$$(18) \quad H_n(x_1 + x_2) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} H_j(x_1) x_2^{n-j}$$

che è una semplice e nuova formula di addizione per gli  $H_n$ .

Ancora, se nella (17) si pone  $m = \frac{1}{2}$ , si ricava la formula di addizione di Runge.

Infine se si fa, in (17),  $x_1 = x_2$  e si cambia  $m$  in  $m^2$ , si ottiene la seguente formula di moltiplicazione

$$H_n(2mx) = (1-m^2)^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \right)^j H_j(x) H_{n-j} \left( \frac{mx}{\sqrt{1-m^2}} \right).$$

4. Per ottenere alcune formule utilizzando la (2), operiamo con  $G_{x_1}$  rispetto ad  $s_1$  ai due membri della (16), e tenute presenti le (2) e (3), otteniamo

$$(19) \quad \frac{H_n i(x_1 + s_2)}{i^n} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{H_j(ix)}{ij} s_2^{n-j}, \quad i = \sqrt{1-m},$$

che cambiando  $ix_1$  in  $x_1$  e  $is_2$  in  $s_2$  coincide con la (8).

(1) Cfr. F. TRICOMI, loc. cit.

Dopo effettuati i detti cambiamenti operando sulla (19) con  $G_{s_2}$ , si ottiene a mezzo di (1), (2) e (3) il seguente sviluppo, in funzione di  $H_n$ , della potenza di un binomio:

$$(20) \quad (x_1 + x_2)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{H_j(x_1) H_{n-j}(ix_2)}{i^{n-j}}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Questo stesso procedimento può applicarsi utilizzando la formula di Leibniz relativa alla potenza  $n^{ma}$  di un polinomio.

Nel caso particolare che vi siano tre addendi, è

$$\sum \frac{n!}{j_1! j_2! j_3!} s_1^{j_1} s_2^{j_2} s_3^{j_3} = (s_1 + s_2 + s_3)^n.$$

Con la  $\sum$  estesa a tutte le soluzioni intere, positive o nulle di  $j_1 + j_2 + j_3 = n$ .

Operando con  $G_{x_1}$ , nei due membri della precedente e cambiando poi  $ix_1, is_2, is_3$  rispettivamente in  $x_1, s_2, s_3$ , si ha

$$\sum \frac{n!}{j_1! j_2! j_3!} H_{j_1}(x_1) s_2^{j_2} s_3^{j_3} = H_n(x_1 + s_2 + s_3);$$

operando in modo analogo altre due volte, si ha infine

$$\sum \frac{n! i^{j_1} H_{j_1}(-ix_1) H_{j_2}(x_2) H_{j_3}(x_3)}{j_1! j_2! j_3!} = H_n(x_1 + x_2 + x_3)$$

che è una formula di addizione semplice e nuova degli  $H_n$  nel caso di tre addendi. Per induzione si stabilisce facilmente una formula di addizione, pel caso generale di  $2m + 1$  indeterminate, alquanto complicata, che comunque trascriviamo

$$\sum \frac{n! i^{j_1} \cdot i^{j_1 + j_2 + j_3} \dots i^{j_1 + \dots + j_{2m+1}}}{j_1! \dots j_{2m+1}!} \prod_{h=0}^m H_{2h} [(-i)^m i^h x_{2h}] H_{2h+1} [(-1)^m i^h x_{2h+1}] = \\ = H_n(x_1 + \dots + x_{2m+1}).$$

Sotto questa forma la formula di addizione per gli  $H_n$ , nel caso di  $2m + 1$  indeterminate, sembra affatto nuova; altre formule di addizione, di moltiplicazione e di divisione per gli  $H_n$ , molto generali, si trovano in un mio lavoro già citato <sup>(1)</sup> e un'altra di addizione con  $n$  addendi è stata data da Appell <sup>(2)</sup>. Anche la (20) si generalizza per induzione così

(1) Cfr. G. PALAMÀ, *Sui Polinomi di Legendre, di Laguerre e di Hermite*, di prossima pubblicazione nei «Rend. del R. Ist. Lombardo di sc. e lett.».

(2) Cfr. P. APPEL e KAMPÉ DE FÉRIET, *Fonctions Hypergéométriques et Hypersphériques, Polynomes d'Hermite*, p. 345, 1926.



$$i^n (x_1 + \dots + x_{2m})^n = \\ = \sum \frac{n! i^{j_1} i^{j_1+j_2+j_3} \dots i^{j_1+\dots+j_{2m-1}}}{j_1! \dots j_{2m}!} \prod_{b=0}^m H_{j_{2b}} [(-i)^{m-1} \cdot i^b x_{2b}] H_{j_{2b+1}} [(-i)^m i^b x_{2b+1}],$$

intendendo che sia  $H_{j_0} = H_{j_{2m+1}} = 1$ ,  $i = \sqrt{-1}$  e che la  $\sum$  sia estesa a tutte le soluzioni intere positive o nulle di

$$j_1 + j_2 + \dots + j_{2m} = n.$$

**Matematica.** — *Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due* <sup>(1)</sup>. Nota di T. TURRI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

Partendo da risultati di Rosati dimostro che una curva di genere due con un  $S_2$  di corrispondenze simmetriche possiede sempre infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa. Da questo risultato seguirebbe senz'altro che una superficie iperellittica di rango 1 con indice di singolarità 2 è sempre impura; tuttavia ho creduto opportuno darne la dimostrazione partendo da risultati di Scorza e utilizzando il gruppo di moltiplicabilità <sup>(3)</sup>.

1. Il Rosati ha trattato delle curve di genere due con un  $S_2$  di corrispondenze simmetriche ai nn. 17 e 24 della Memoria citata in <sup>(3)</sup>. Al n. 17 dopo aver dimostrato che « quando  $\mu_1 = 3$ , deve essere  $\mu_2 = 1$  », cioè che « se le corrispondenze simmetriche della curva formano un  $S_2$ , la curva possiede un  $S_0$  di corrispondenze emisimmetriche non speciali », aggiunge:

« ... può darsi che:

« a) L' $S_2$  delle corrispondenze simmetriche sia tutto di corrispondenze non speciali.

« b) Nel detto  $S_2$  siano contenuti infiniti  $S_0$  di corrispondenze speciali. La curva possiede allora infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa ».

La effettiva esistenza delle curve di cui alla lettera b) del n. 17 è stata dimostrata dal Rosati al secondo capoverso del n. 24 (della Memoria citata).

(1) Un sunto della presente Nota è stato comunicato al « Primo Congresso della Unione Matematica Italiana ».

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) Per la lettura della presente Nota converrà avere sott'occhio le Memorie seguenti: C. ROSATI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due*. [« Annali di Matematica pura ed applicata », ser. III, to. XXV (1916), pp. 1-32].

G. SCORZA, *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni*. [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. XLI (1916), pp. 263-380].

Al primo capoverso dello stesso n. 24 il Rosati **considera** un piano razionale  $r_2$  di  $S_5$ , il quale sega la quadrica  $\Phi$  data dalla equazione

$$p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0$$

secondo una conica reale  $f$  e contiene il punto

$$P(0, 0, 1, -1, 0, 0)$$

polo rispetto a  $\Phi$  dell'iperpiano

$$p_{13} - p_{42} = 0$$

rappresentante il complesso fondamentale  $\Lambda$ . La lettura del secondo capoverso dello stesso n. 24 ci fa avvertiti che il Rosati intende nel primo capoverso che la conica reale  $f$  sia priva di punti razionali; per questa implicita ammissione, in base alla rappresentazione di cui si serve, conclude che esistono effettivamente le curve della lettera  $a$ ) del n. 17.

Ora gli iperpiani

$$p_{34} = 0, \quad p_{23} = 0$$

e il piano  $r_2$  hanno a comune un punto razionale

$$B(b_1, 0, b_3, b_4, b_5, 0);$$

sulla PB sta il punto razionale

$$C(b_1, 0, b_4 + b_3, 0, b_5, 0),$$

e questo giace sulla quadrica  $\Phi$  e quindi sulla conica  $f$ . Nella dimostrazione che sulla  $f$  sta un punto razionale e quindi stanno infiniti punti razionali, interviene l'ipotesi che  $r_2$  è razionale, non quella che  $f$  sia reale; possiamo perciò dire che qualunque piano razionale passante per il punto  $P$  sega la  $\Phi$  in una conica che contiene punti razionali.

Tenendo presenti i risultati dei nn. 17 e 24 della citata Memoria di Rosati, si conclude che:

*Una curva di genere due con un  $S_2$  di corrispondenze simmetriche contiene sempre infiniti  $S_0$  di corrispondenze speciali, e possiede sempre infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali a moltiplicazione complessa.*

2. Lo Scorza ha fatto la classificazione delle superficie iperellittiche  $V_2$  di rango 1<sup>(1)</sup>; su di essa non si è indugiato, poichè la classificazione era « sostanzialmente già stata compiuta da Rosati » attraverso quella delle curve di genere due. Venendo al caso in cui l'indice  $k$  di singolarità è 2,

(1) G. SCORZA, Memoria citata in (3) a p. 361, parte 2<sup>a</sup>, § 3, pp. 336-339.

lo Scorza dimostra<sup>(1)</sup> che l'indice di moltiplicabilità  $b$  è 3 e che le omografie riemanniane generiche sono biassiali. *Partendo da questi risultati dimostrerò che la  $V_2$  è sempre impura.* (Lo Scorza, forse accettando le conclusioni di Rosati pel caso  $\mu_1 = 3$ , ha affermato senza dimostrazione che la  $V_2$  è pura od impura).

I gruppi di ordine 3 di omografie reali biassiali dello spazio ordinario sono i gruppi C, D rappresentati rispettivamente dalle

$$(1) \quad \left\| \begin{array}{cccc} a & -b & -d & -c \\ b & a & -c & d \\ d & c & a & -b \\ c & -d & b & a \end{array} \right\|, \quad (2) \quad \left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ & a_{11} & a_{12} \\ & a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|.$$

Il gruppo C è uno dei gruppi bilineari reali semplici del Cartan<sup>(2)</sup>; esso lascia fisse le rette della prima schiera di una varietà  $\Psi$  di Segre, di indici (1, 1), priva di punti reali<sup>(3)</sup>. Una reciprocità reale R, in particolare un sistema nullo, trasformante in sè C induce tra le rette della prima schiera di  $\Psi$  una reciprocità involutoria  $\eta$  che può essere una polarità, ovvero un sistema nullo<sup>(4)</sup>.

Sia la  $\eta$  una polarità; il sistema lineare di reciprocità reali RC contiene un sistema nullo e tre polarità linearmente indipendenti. Rosati al n. 15 della Memoria già più volte citata, ha dimostrato che quando  $\mu_1 = 1$ , si ha  $\mu_2 = 0$ ; Scorza ha dimostrata la stessa cosa al n. 10 della parte seconda della Memoria citata in<sup>(3)</sup> a p. 361, giacchè per  $k = 0$  trova  $b = 0$ . Si conclude che RC non può essere il sistema lineare delle reciprocità reali di nessuna superficie iperellittica.

Sia la  $\eta$  un sistema nullo; il sistema lineare delle reciprocità RC contiene ora tre sistemi nulli linearmente indipendenti e una polarità. Detto  $v$  uno qualunque dei sistemi nulli contenuti in RC, dette  $r, \bar{r}$  due rette ima-

(1) G. SCORZA, Memoria citata in (3) a p. 361, parte 2<sup>a</sup>, n. 12, pp. 338-339.

(2) É CARTAN, *Les groupes bilinéaires et les systèmes de nombres complexes*. [« Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse » (1898), to. XII, B. 1-99]. Vedansi in particolare i §§ VII, VIII, IX.

(3) T. TURRI, *I gruppi lineari di omografie razionali, i quali non lasciano fisso alcuno spazio razionale*. [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », to. LIX (1935), pp. 307-335]. Vedasi in particolare il § II.

(4) T. TURRI, *Sui gruppi di moltiplicabilità e sul carattere degli pseudoassi puri delle matrici di Riemann*. [« Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo; in corso di stampa ». Vedasi in particolare, anche in relazione a quanto si dice nel seguito di questo numero, il § III.

ginarie coniugate della prima schiera di  $\Psi$ , per quanto ho dimostrato al n. 9 della Memoria citata in nota <sup>(4)</sup> a p. prec., esistono sempre almeno due rette reali autoconiugate per  $v$  e appoggiate a  $r$  e a  $\bar{r}$ . Resta anche qui escluso che RC possa essere il sistema lineare delle reciprocità reali di una superficie iperellittica (giacchè la immagine della superficie iperellittica dovrebbe essere una retta della prima schiera di  $\Psi$ ).

3. Abbia una  $V_2$  l'indice di singolarità  $k$  eguale a 2; indichiamo con  $G^*$  il gruppo di moltiplicabilità di  $V_2$  e con  $G$  il gruppo delle omografie riemanniane reali di  $V_2$ , cioè il gruppo che si ottiene da  $G^*$  facendone variare i (quattro) parametri (omogenei) nel campo reale anzichè soltanto nel campo razionale; diremo (come abbiamo convenuto nelle Memorie citate in note <sup>(3)</sup> e <sup>(4)</sup> a p. prec.) che  $G$  è il prolungato di  $G^*$ . Stante i risultati del numero precedente, il gruppo  $G$  è, *per esclusione*, a prescindere da una sostituzione lineare reale, il gruppo  $D$ ; cioè in simboli  $G \equiv T D T^{-1}$ , dove  $T$  è una sostituzione lineare reale.

Ricordiamo che il gruppo  $D$  lascia fisse le rette della prima schiera di una varietà di Segre  $\Phi$  (non priva di punti reali) di indici  $(1, 1)$ ; le omografie di  $D$  hanno quali rette fondamentali rette della seconda schiera di  $\Phi$  (una retta della prima schiera di  $\Phi$  è data da due equazioni del tipo

$$(3) \quad \begin{cases} x_1 - \lambda x_3 = 0 \\ x_2 - \lambda x_4 = 0 \end{cases}.$$

Il gruppo  $D$  è trasformato in sè dal sistema nullo  $N$  dato dalla equazione

$$(4) \quad -x_3 y_1 - x_4 y_2 + x_1 y_3 + x_2 y_4 = 0;$$

sono autoconiugate per  $N$  tutte le rette della prima schiera di  $\Phi$  e non è autoconiugata per  $N$  alcuna retta *reale* della seconda schiera <sup>(1)</sup>.

Poichè la matrice (2) di  $D$  si compone di due matrici eguali, in base alla proposizione del 4° capoverso del n. 15 della Memoria citata in nota <sup>(3)</sup> a p. prec., il gruppo  $G^*$  lascia (fissi spazi razionali subordinati e quindi, essendo  $G$  proiettivamente identico a  $D$ , lascia) fisse rette razionali. Ne segue che, presi i vertici del riferimento razionale sopra due rette razionali lasciate fisse da  $G^*$ , la matrice di  $G^*$  è la (2), ove si intenda che le  $a_{11}$ ,  $a_{12}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$  varino soltanto nel campo razionale.

Dalla (2) appare che tra le omografie di  $G^*$  se ne hanno infinite con rette fondamentali razionali; tali rette razionali appoggiandosi alle rette della prima schiera di  $\Phi$ , e la immagine  $\tau$  di  $V_2$  dovendo essere una retta della prima schiera di  $\Phi$  (il gruppo  $G^*$  non lascia fissa alcuna altra retta oltre quelle della prima schiera di  $\Phi$ ), resta provato che la  $V_2$  è impura.

(1) Memoria citata in nota (4) a p. prec., § VI.



*Osservazione.* — « La imagine  $\tau$  di  $V_2$  viene data dal sistema (3), dove ora  $\lambda$  è immaginario; aggiungiamo che  $\lambda$  non può essere un radicale quadratico, perchè allora  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  sarebbero gli spazi fondamentali di una omografia razionale e si cadrebbe nel caso  $k = 3$ ,  $h = 7$  ».

## POSTILLA del Corrisp. G. SCORZA.

La spiegazione, che il prof. Turri dà in forma dubitativa nel n. 2 della sua interessante Nota a proposito della mia affermazione che una superficie iperellittica con  $k = 2$  ed  $h = 3$  può essere pura od impura, è confermata da quanto nella mia Memoria del 1916 segue alle parole già citate dal prof. Turri. Ivi infatti si dice: « il Rosati ha determinati i vari tipi possibili e ne ha dimostrata l'esistenza effettiva con un notevole metodo diretto. Tralasciando questa seconda parte della ricerca... riprendiamo la prima... ».

Ma è da aggiungere per altro che forse anche la « implicita ammissione » del Rosati di cui il prof. Turri parla nel n. 1 della sua Nota è da spiegare in maniera analoga. Quando lo Humbert nella sua seconda Memoria sulle funzioni abeliane singolari (« Journal de Math. pures et appliquées », sér. 5<sup>a</sup>, t. 6, 1900) studia la moltiplicazione complessa per il caso delle funzioni doppiamente singolari non osserva che essa si riconduce necessariamente al caso ellittico (veggasi specialmente il n. 216 a pp. 350-351).

Comunque, sia di ciò, credo utile indicare qui come il ragionamento del prof. Turri assuma aspetto semplice e rapido ove si faccia ricorso, come in miei lavori precedenti, alla teoria delle algebre.

Sia  $\omega$  una matrice riemanniana del genere 2 con le imagini  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  e si supponga che per essa sia  $k = 2$ , indi  $h = 3$ . Essa sarà dotata di infiniti pseudo-assi e questi saranno le rette di una schiera rigata ordinaria avente per direttrici  $\tau$  e  $\bar{\tau}$  e situate sopra una quadrica  $Q$ .

Sia  $[\omega]$  l'algebra razionale connessa con  $\omega$  ed  $[\omega]'$  il prolungamento di  $[\omega]$  nel corpo reale: esse saranno del 4° ordine e saranno entrambe semplici, una volta che tale è  $[\omega]'$ , per il fatto che  $\omega$  è priva di pseudo-assi isolati (veggasi la mia Nota: *Sulle matrici di Riemann*, inserita nel vol. IX, ser. 6<sup>a</sup>, di questi « Rendiconti », p. 253 e segg.). Un'algebra reale semplice del 4° ordine o è primitiva — indi equivalente all'algebra dei quaternioni — o è regolare: la prima alternativa qui è da escludere, perchè altrimenti  $\omega$  sarebbe non singolare (cfr. la mia Nota ora citata) e per essa non sarebbe  $k = 2$ , bensì  $k = 0$ ; dunque  $[\omega]'$  è regolare.

Ora si indichi con  $R'$  l'algebra regolare di ordine 16 costituita da tutte le matrici del 4° ordine ad elementi reali: sarà  $[\omega]'$  una sottoalgebra regolare di  $R'$  con lo stesso suo modulo e quindi esiste un automorfismo interno di  $R'$  che muta  $[\omega]'$  nell'algebra costituita dalle matrici del tipo indicato



con D nella Nota del prof. Turri [veggasi la mia Nota: *Alcune proprietà delle algebre regolari* inserita nel vol. I (1921) delle « Note e Memorie di Matematica » pubblicata dal « Circolo Matematico di Catania »].

Ciò significa che nello  $S_3$  rappresentativo di  $\omega$  esiste un'omografia reale atta a mutare il gruppo G delle omografie reali di  $\omega$  in quello G' delle omografie rappresentate da equazioni del tipo

$$x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$x'_3 = a_{11} x_3 + a_{12} x_4$$

$$x'_4 = a_{21} x_3 + a_{22} x_4.$$

Ora G è il gruppo delle omografie reali che mutano in sè la quadrica Q tenendo ferme le singole rette della schiera contenente  $\tau$  e  $\bar{\tau}$ ; G' è il gruppo delle omografie che mutano in sè la quadrica Q' con l'equazione  $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$ , tenendone ferme le rette della schiera generata, al variare del parametro  $\lambda$ , dalla retta  $x_1 - \lambda x_3 = 0$ ,  $x_2 - \lambda x_4 = 0$ ; e le quadriche Q e Q' sono rappresentate entrambe da equazioni a coefficienti razionali; dunque esiste certo un'omografia razionale atta a mutare Q in Q' (indi G in G') e la quadrica Q, al pari di Q', possiede rette con equazioni a coefficienti razionali in ognuna delle sue due schiere.

Ma allora  $\omega$  è, come volevasi, impura.

L'esistenza effettiva di una tal matrice segue poi al modo già indicato dal prof. Turri.

**Matematica.** — *Sulla formula d'inversione di Widder.* Nota di F. TRICOMI, presentata dal Socio G. FUBINI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota I di G. COLONNETTI presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

In alcune Note pubblicate molti anni or sono in questi « Rendiconti » <sup>(2)</sup> e negli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » <sup>(3)</sup> io ho cercato di porre i fondamenti di una teoria generale delle coazioni elastiche.

Avevo allora uno scopo ben definito: quello di arrivare a risolvere, nei confronti dello stato naturale (stato di equilibrio di un sistema elastico per forze esterne tutte nulle), un problema perfettamente analogo a quello che il teorema di Menabrea permette di risolvere nei confronti degli stati di equilibrio determinati da dati sistemi di forze esterne.

Ed ero pervenuto a definire una funzione la quale, per quei valori delle tensioni interne che caratterizzano lo stato naturale, diviene minima per rapporto a tutti i valori che la funzione stessa potrebbe assumere compatibilmente colle deformazioni impresse e colle leggi dell'equilibrio.

In tutti quei casi in cui le tensioni incognite si possono esprimere linearmente in funzione di  $k$  parametri indipendenti (incognite iperstatiche) il problema riusciva così ridotto alla risoluzione di un sistema di  $k$  equazioni lineari e non omogenee in quei  $k$  parametri.

Ora in quelle equazioni le deformazioni impresse figuravano naturalmente come i dati del problema. E questo era, sotto un certo aspetto, il punto debole di quel mio studio, nel senso almeno che ne riduceva di molto le possibili applicazioni pratiche. Perchè, nella realtà delle cose, non sono molti i casi in cui le deformazioni impresse sono effettivamente note; e tra questi casi il più importante è indubbiamente quello in cui esse si presentano come la conseguenza di date variazioni di temperatura: problema questo la cui soluzione era già nota da tempo <sup>(4)</sup>.

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) G. COLONNETTI, *Su certi stati di coazione elastica che non dipendono da azioni esterne.* « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXVI, 2° sem. 1917; *Su di una particolare classe di coazioni elastiche che si incontra nello studio della resistenza delle artiglierie.* « Id. », vol. XXVII, 2° sem. 1918; *Una proprietà caratteristica delle coazioni elastiche nei solidi elasticamente omogenei.* « Id. », vol. XXVII, 2° sem. 1918; *Sul problema delle coazioni elastiche.* « Id. », vol. XXVII, 2° sem. 1918.

(3) G. COLONNETTI, *Applicazione a problemi tecnici di un nuovo teorema sulle coazioni elastiche.* « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino », vol. LIV (1° dicembre 1918); *Per una teoria generale delle coazioni elastiche.* « Id. », vol. LVI (19 giugno 1921).

(4) A. CASTIGLIANO, *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques et ses applications.* Torino, 1879. (Cfr. il volume *Selecta* pubblicato in occasione del cinquantesimo anniversario della morte dell'Autore. Torino, ed. Avale, 1935).

Io ritorno oggi sull'argomento per mostrare come quelle medesime equazioni, opportunamente interpretate, possano anche condurre alla soluzione di un altro problema: quello in cui le deformazioni impresse si producono automaticamente nel sistema all'atto stesso dell'applicazione delle forze esterne, per il fatto che in qualche parte di esso vengon raggiunti limiti di elasticità del materiale ed hanno quindi origine le prime deformazioni permanenti.

\*  
\* \* \*

Qui occorre prima di tutto schematizzare il fenomeno, e più precisamente il modo con cui le deformazioni permanenti si presentano.

Il modo più semplice per far ciò è quello di postulare l'esistenza di un limite della sollecitazione in corrispondenza del quale il materiale passi dallo stato elastico allo stato plastico; tale cioè che al di sotto di esso le deformazioni si mantengano perfettamente elastiche (e conformi alla classica legge di Hooke) ed in corrispondenza di esso si producano invece, sotto carico costante, delle deformazioni perfettamente anelastiche, che si sovrappongono al fenomeno elastico senza per altro alterarlo nè influire sulle sue caratteristiche, ed in particolare sulla sua attitudine ad annullarsi quando cessino di agire le cause che lo hanno prodotto.

Convieni avvertire che a rigore nessun materiale soddisfa a siffatte condizioni; che cioè non si riscontrano mai in natura nè delle deformazioni perfettamente elastiche, nè delle deformazioni perfettamente anelastiche, bensì soltanto delle deformazioni in cui prevale l'una o l'altra delle due caratteristiche; e che i vari limiti di elasticità o di snervamento con cui i tecnici cercano di caratterizzare l'effettivo comportamento dei vari materiali, non sono in ultima analisi che delle semplici convenzioni intese a delimitare caso per caso i campi dei valori in cui l'uno degli aspetti del fenomeno può, agli effetti pratici e nei limiti di approssimazione di cui la pratica si accontenta, venir trascurato rispetto all'altro.

Convieni per altro aggiungere che vi sono dei materiali, proprio tra quelli che trovano più largo impiego nelle costruzioni — l'acciaio dolce per esempio — il cui effettivo comportamento si accosta così sensibilmente alle condizioni teoriche sopra enunciate, che queste possono ad essi venire applicate con una approssimazione che è più che sufficiente per tutti i bisogni della tecnica.

In queste condizioni, se avviene che, all'atto dell'applicazione delle forze esterne, le tensioni interne raggiungano il limite di elasticità in qualche parte del sistema, si deve senz'altro ammettere che ivi dette tensioni cessino immediatamente di crescere, e che incomincino a prodursi delle deformazioni permanenti.

Le quali deformazioni permanenti non si arresteranno alla lor volta se non quando il sistema abbia raggiunto uno stato di equilibrio compatibile,

non solo coi valori dati delle forze esterne applicate, ma anche coi valori (ormai essi pure fissi e noti) che le tensioni interne hanno assunti in quella certa parte del sistema.

Nel problema si sono così venute ad introdurre delle nuove incognite: quelle che, per attenerci alla terminologia in uso, noi continueremo a chiamare le deformazioni impresse. Ma in compenso altrettante delle primitive incognite del problema sono scomparse (nel senso che hanno assunti valori noti) e sono le tensioni interne corrispondenti.

Ora lo stato di equilibrio a cui poc'anzi accennavamo, si può sempre, coi metodi ormai noti<sup>(1)</sup>, definire imponendo che una certa funzione — somma algebrica del potenziale elastico e del potenziale della deformazione impressa — sia minima compatibilmente coi valori delle deformazioni impresse e colle leggi dell'equilibrio.

E le  $k$  equazioni in cui questa condizione di minimo al solito si risolve, sono lineari, e non omogenee, non solo nei  $k$  parametri dello stato di tensione (incognite iperstatiche), ma anche nelle caratteristiche dello stato di coazione (parametri in funzione dei quali, nei singoli casi concreti, si possono linearmente esprimere le deformazioni impresse).

Così stando le cose è naturale che, se queste caratteristiche dello stato di coazione son date, le  $k$  equazioni vengano utilizzate per determinare le  $k$  incognite iperstatiche.

Ma se invece son date  $h$  incognite iperstatiche (nel senso che ad esse, per le ragioni sopra esposte, si possono attribuire valori noti) le stesse equazioni potranno evidentemente venire utilizzate per determinare, insieme colle  $k-h$  incognite iperstatiche residue,  $h$  caratteristiche dello stato di coazione che saranno in conseguenza rimaste indeterminate.

\*  
\* \*

Nei casi in cui il materiale non presenta un limite netto di snervamento — o, per qualsiasi altra ragione, si scosta troppo nel suo comportamento effettivo dallo schema dianzi adottato — si può costruire uno schema più aderente alla realtà postulando che al di sopra del limite di elasticità le deformazioni elastiche continuino a presentarsi (sempre conformi alla legge di Hooke), accompagnate da deformazioni permanenti che, almeno in prima approssimazione, si potranno sempre ritenere esse pure funzioni lineari della sollecitazione.

Nelle  $k$  equazioni che caratterizzano lo stato di equilibrio, le  $k$  incognite iperstatiche compariranno allora non soltanto nelle espressioni delle tensioni interne, ma anche in quelle delle deformazioni impresse.

(1) Cfr. la mia Nota già citata: *Per una teoria generale delle coazioni elastiche*. «Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol. LVI (19 giugno 1921); oppure: G. COLONNETTI, *La statica delle costruzioni*, vol. I, Torino, U.T.E.T., 1928, pp. 329-335.



Ma il risultato non differirà in sostanza da quello cui siamo giunti poc'anzi; perchè, risolvendo quelle equazioni (sempre lineari e non omogenee) rispetto a quelle incognite, si verranno implicitamente a determinare anche le caratteristiche dello stato di coazione che da quelle incognite dipendono.

\*  
\* \* \*

Ora è precisamente sopra questo risultato che io vorrei qui particolarmente attirar l'attenzione del lettore.

Il fatto che, insieme allo stato di tensione, si possano determinare anche le deformazioni impresse (quando queste consistono in deformazioni permanenti derivanti da un superamento dei limiti di elasticità) è invero di fondamentale importanza.

E ciò non soltanto per la ragione, ovvia, che esso ci permette, se lo desideriamo, di passare immediatamente alla identificazione del nuovo stato naturale che al sistema ormai compete, ed a cui esso spontaneamente si riporta in assenza di forze esterne; ma anche e soprattutto perchè esso ci consente di farci subito un'idea della entità delle deformazioni permanenti che si son rese necessarie per il raggiungimento dello stato finale di equilibrio, e quindi dei margini di sicurezza che, in questo suo nuovo stato, il sistema possiede.

È noto infatti a tutti gli studiosi della Scienza delle Costruzioni che fenomeni del genere di quello che io ho qui cercato di analizzare, si verificano in pratica non solo in conseguenza di eccezionali ed imprevisi accrescimenti delle normali condizioni di carico, ma anche in dipendenza della adozione di dimensioni volutamente insufficienti (almeno dal punto di vista della ordinaria teoria della elasticità); dimensioni che i costruttori più ardimentosi e più esperti non di rado adottano, facendo su di esse un meditato assegnamento onde ottenere una migliore utilizzazione dei materiali impiegati.

Ed è anche noto che una ormai lunga ed esauriente esperienza ha sanzionati e giustificati molti di questi ardimenti, a tale segno che Arturo Danusso ad essi precisamente si ispirava in un suo recente e geniale tentativo di additare le vie probabili della Scienza delle Costruzioni di un prossimo domani <sup>(1)</sup>.

Sottoporre questi ardimenti alle regole di un calcolo rigoroso — suscettibile di precisare matematicamente se e fino a qual punto si possa fare assegnamento su di essi, senza che ne risultino eccessivamente ridotti quei margini di sicurezza che la costruzione deve pur sempre presentare — questo è lo scopo delle considerazioni che io ho qui brevemente esposte e che mi riservo prossimamente di svolgere, illustrandone, attraverso qualche semplicissimo esempio, i principali sviluppi teorici e le possibili conseguenze pratiche.

(1) A. DANUSSO, *Le autotensioni: spunti teorici ed applicazioni pratiche*. « Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano », vol. VIII, 1934. »



**Meccanica.** — *Sorgenti plastiche*. Nota di G. PERETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. CISOTTI.

Le equazioni, che reggono il movimento in un mezzo continuo, dipendono dalle ipotesi fatte sulla natura del mezzo stesso, per poterne schematizzare il comportamento, e sono tanto più adatte allo scopo, quanto più le sopra-indicate ipotesi traducono il reale comportamento del mezzo.

Così le equazioni del movimento di un fluido perfetto sono applicabili, in particolari condizioni, al movimento di un liquido; quando queste condizioni non sono verificate è impossibile trascurare l'effetto della viscosità, e in casi più complessi, il mezzo, oltre che viscoso, deve essere considerato anche plastico. Ma se, da una parte, il tener conto di tutte queste circostanze consente di ottenere delle equazioni che forniscono un comportamento molto prossimo al reale, dall'altra le equazioni stesse presentano via via maggiori difficoltà algoritmiche. In questi casi, come del resto in quelli più semplici nei quali il mezzo continuo è rappresentato soltanto da un fluido perfetto, o soltanto da un fluido viscoso, o soltanto da un sistema plastico, lo studio di movimenti speciali, scelti fra i più semplici, costituisce validissimo ausilio per indagare l'intima natura del sistema e giudicare quanto siano adeguate le ipotesi e le rappresentazioni alla realtà del fenomeno.

In una Nota inserita in questi « Rendiconti », il prof. Finzi ha dato una soluzione relativa al movimento indotto da un vortice in un sistema plastico e viscoso <sup>(2)</sup>; nella presente dò una soluzione relativa al caso che può dirsi duale, caratterizzando, in un mezzo della stessa natura, il movimento provocato da una sorgente.

I due movimenti si possono effettivamente considerare come complementari l'uno dell'altro; risulta infatti che alle componenti non nulle del tensore degli sforzi nel primo caso corrispondono componenti nulle nel secondo e viceversa.

**EQUAZIONI RELATIVE AI SISTEMI PLASTICI.** — Si consideri un sistema plastico in movimento, e in un suo punto di coordinate generali  $x^i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) siano  $v_i$  le componenti covarianti del vettore velocità. Il tensore degli sforzi è il tensore doppio simmetrico <sup>(3)</sup>:

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) B. FINZI, *Rotazioni plastiche*. Questi « Rendiconti », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXIII, 1936.

(3) B. FINZI, loc. cit.

$$(1) \quad \Phi_{ij} = \Phi_{ji} = p a_{ij} + \varphi_{ij}$$

in cui  $p$  è la pressione:  $p = \frac{1}{3} \Phi_i^i$ , e  $\varphi_{ij}$  è un tensore doppio di invariante lineare nullo, che può essere espresso come somma di due parti, la prima rappresentante il contributo della plasticità, la seconda, quello della viscosità. Precisamente, per un mezzo isotropo, indicata con  $M$  una funzione di  $x^i$  e del tempo, con  $\mu$  il coefficiente di viscosità, e posto:

$$(2) \quad \xi_{hk} = \frac{1}{2} (v_{h/k} + v_{k/h}) \quad , \quad \psi_{ij} = \frac{2}{3} M \xi_h^h a_{ij} - 2 M \xi_{ij} \quad ,$$

$$\chi_{ij} = \frac{2}{3} \mu \xi_h^h a_{ij} - 2 \mu \xi_{ij} \quad ,$$

si può dare per  $\varphi_{ij}$  l'espressione:  $\varphi_{ij} = \psi_{ij} + \chi_{ij}$ .

La funzione  $M$ , *a priori* incognita, viene determinata in base alla condizione di von Mises:

$$(3) \quad \psi_{ij} \psi^{ij} = 2 h^2 \quad ,$$

nella quale  $h$  è la costante di plasticità.

Le equazioni indefinite che reggono il movimento, detta  $\rho$  la densità,  $U$  il potenziale delle forze applicate, supposte conservative, si scrivono:

$$(4) \quad \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i/k} v^k \right) = (U - p)_{,i} - \psi_{ij}^{,j} - \chi_{ij}^{,j} \quad (i = 1, 2, 3),$$

alle quali va aggiunta la condizione:

$$(5) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v_i)^{,i} = 0$$

che esprime il principio di conservazione della massa.

Questa equazione, nell'ipotesi molto prossima alla realtà, che il mezzo plastico si muova come se fosse incompressibile, si riduce così:

$$(6) \quad \rho = \text{cost.} \quad v^{,i} = 0.$$

Il prof. Finzi ha avuto occasione di applicare le sopraindicate equazioni allo studio delle « rotazioni plastiche », definendo cioè il movimento esternamente ad un cilindro rigido, immerso in un sistema plastico, e ruotante attorno al proprio asse <sup>(1)</sup>.

Mi propongo di farne una ulteriore applicazione ad un caso complementare del precedente, determinando quei movimenti nei quali la velocità risulta in ogni punto diretta come la congiungente il punto stesso con un punto fisso.

(1) B. FINZI, loc. cit.

Si tratta in sostanza di movimenti che corrispondono a quelli indotti da una sorgente in un fluido perfetto, e a quelli che Hamel chiama « correnti radiali » nei fluidi viscosi <sup>(1)</sup>.

**SORGENTI PLASTICHE PIANE.** — Cominciamo a studiare i possibili movimenti indotti da sorgenti piane. Sia  $r, \theta, z$ , un sistema di coordinate cilindriche per cui l'elemento lineare è  $ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2$ . Se si tratta di un movimento che avviene per piani normali a  $z$ , saranno nulle tutte le componenti contenenti l'indice 3. Inoltre, se le linee di flusso sono rette incidenti e normali all'asse  $z$ , sarà diversa da zero solo la prima componente della velocità.

Poniamo allora:

$$(7) \quad v_1 = \frac{k}{r} \quad v_2 = 0$$

essendo  $k$  una funzione *a priori* incognita di  $\theta$  e di  $r$ .

Ma se si ritiene il mezzo plastico incompressibile, dalla (6) si deduce che  $k$  non deve dipendere da  $r$  e deve quindi ridursi a una funzione della sola  $\theta$ .

Indicata con un apice la derivazione rispetto a  $\theta$ , si ha:

$$\xi_{11} = -\frac{k}{r^2}, \quad \xi_{12} = \xi_{21} = \frac{1}{2} k', \quad \xi_{22} = k,$$

e quindi:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = 2M \frac{k}{r^2}, \quad \psi_{12} = -M \frac{k'}{r}, \quad \psi_{22} = -2Mk \\ \chi_{11} = 2\mu \frac{k}{r^2}, \quad \chi_{12} = -\mu \frac{k'}{r}, \quad \chi_{22} = -2\mu k \end{array} \right.$$

dalle quali si ricava:

$$\psi_{11}^{/1} = -4 \frac{Mk}{r^3} + 2M_{/1} \frac{k}{r^2}, \quad \psi_{12}^{/2} = \frac{1}{r^3} (4Mk - M_{/2} k' - Mk'')$$

$$\chi_{11}^{/1} = -4 \frac{\mu k}{r^3}, \quad \chi_{12}^{/2} = \frac{1}{r^3} (4\mu k - \mu k'')$$

$$\psi_{21}^{/1} = -M_{/1} \frac{k'}{r} + 2 \frac{Mk'}{r^2}, \quad \psi_{22}^{/2} = -\frac{2}{r^2} (M_{/2} k + 2Mk')$$

$$\chi_{21}^{/1} = 2 \frac{\mu k'}{r}, \quad \chi_{22}^{/2} = -\frac{4\mu k'}{r^2}$$

(1) G. HAMEL, *Spiralförmige Bewegungen zäher flüssigkeiten*. « Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung », XXV, pp. 34-60, Leipzig, 1916.

e, tenute presenti queste relazioni, le equazioni indefinite (4) si scrivono:

$$(9) \quad \begin{cases} (U - p)_{/1} - 2 M_{/1} \frac{k}{r^2} + M_{/2} \frac{k'}{r^3} + M \frac{k''}{r^3} + \mu \frac{k''}{r^3} = -\rho \frac{k^2}{r^3} \\ (U - p)_{/2} + M_{/1} \frac{k'}{r} + 2 M \frac{k'}{r^2} + 2 M_{/2} \frac{k}{r^2} + 2 \mu \frac{k'}{r^2} = 0. \end{cases}$$

Da queste, derivando la prima rispetto a  $\theta$ , e la seconda rispetto ad  $r$ , per differenza si ottiene:

$$(10) \quad -2\rho k k' - \mu k''' - 4\mu k' = -4M_{/12} r k - 3M_{/1} r k' + 2M_{/2} k'' + \\ + M_{/22} k' + M k''' - M_{/11} k' r^2 + 4M k' + 4M_{/2} k.$$

E poichè la (3) fornisce per  $M$  l'espressione:

$$(11) \quad M = r^2 A \quad \text{dove} \quad A = \frac{h}{\sqrt{4k^2 + k'^2}},$$

si ha, in definitiva:

$$(12) \quad -2\rho k k' - \mu k''' - 4\mu k' = r^2 (-4A'k - 2Ak' + 2A'k'' + \\ + A''k' + Ak'' - 2k').$$

Ma questa relazione deve essere verificata qualunque sia  $r$ , e poichè il primo membro e l'espressione tra parentesi nel secondo, sono funzioni della sola  $\theta$ , essa si scinde nelle due:

$$2\rho k k' + \mu k''' + 4\mu k' = 0 \\ -4A'k - 2Ak' + 2A'k'' + A''k' + Ak'' - 2k' = 0.$$

La prima di queste fornisce le note soluzioni di Hamel per i fluidi puramente viscosi <sup>(1)</sup>, e fra queste, quelle che soddisfano anche la seconda riducono a:  $k = \text{cost.}$

E quindi: una sorgente piana in un mezzo plastico è definita dalle relazioni:

$$v_1 = \frac{k}{r}, \quad v_2 = 0,$$

dove  $k$  è una costante, *a priori* arbitraria, caratteristica del movimento.

Dalla (11) si ricava allora:  $M = \frac{r^2 h}{2k}$ , e dalle (8):

$$\psi_{11} = h, \quad \psi_{22} = r^2 h, \quad \chi_{11} = 2\mu \frac{k}{r^2}, \quad \chi_{22} = -2\mu k$$

e

$$\psi_{ij} = \chi_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j.$$

(1) G. HAMEL, loc. cit.

Notiamo che nel caso attuale sono diverse da zero solo le componenti con indici uguali, mentre nel movimento indotto da un vortice lo erano solo quelle relative ad indici disuguali <sup>(1)</sup>.

Le equazioni infinite (9) si riducono così:

$$(U - p)_{/1} = -\rho \frac{k^2}{r^3} + \frac{2h}{r}, \quad (U - p)_{/2} = 0$$

dalle quali, a meno di una costante arbitraria:

$$U - p = \rho \frac{k^2}{2r^2} + 2h \lg r.$$

È il caso di osservare che per  $k = 0$ , ossia, quando il sistema è in quiete, si ha ancora:

$$U - p = 2h \lg r$$

ossia anche se il potenziale  $U$  è costante, la pressione non si riduce ad una costante, e neppure si riducono a costanti tutti gli sforzi, i quali diventano:

$$\psi_{11} = h, \quad \psi_{22} = r^2 h, \quad \chi_{ij} = 0 \quad \text{e} \quad \psi_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j.$$

SORGENTI SPAZIALI. — Abbandoniamo l'ipotesi di moto piano, e riferiamoci ad un sistema di coordinate polari spaziali  $r, \theta, \varphi$ . Sarà:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \varphi d\varphi^2.$$

Ammesso che, come nel caso piano, la velocità sia radiale e dipendente soltanto da  $r$ , sarà  $v_2 = v_3 = 0$ , e per la (6),  $v_1 = \frac{k}{r^2}$ , essendo  $k$  una costante. In queste condizioni si ha:

$$v_{1/1} = v^{1/1} = -2 \frac{k}{r^3}, \quad v_{2/2} = \frac{k}{r}, \quad v^{2/2} = \frac{k}{r^5},$$

$$v_{3/3} = k \frac{\sin^2 \theta}{r}, \quad v^{3/3} = \frac{k}{r^5 \sin^2 \theta}$$

$$v_{ij} = v^{i/j} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j,$$

dalle quali si ricava:

$$\xi_{11} = -2 \frac{k}{r^3}, \quad \xi_{22} = \frac{k}{r}, \quad \xi_{33} = k \frac{\sin^2 \theta}{r},$$

$$\xi_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j;$$

(1) B. FINZI, loc. cit.



e quindi

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_{11} = 4 M \frac{k}{r^3} \quad , \quad \psi_{22} = -2 \frac{Mk}{r} \quad , \quad \psi_{33} = -2 M k \frac{\sin^2 \theta}{r} \quad , \\ \chi_{11} = 4 \mu \frac{k}{r^3} \quad , \quad \chi_{22} = -2 \mu \frac{k}{r} \quad , \quad \chi_{33} = -2 \mu k \frac{\sin^2 \theta}{r} \\ \psi_{ij} = \chi_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j . \end{array} \right.$$

Da queste per derivazione:

$$\psi_{11}^{/1} = 4 \left( M_{/1} \frac{k}{r^3} - \frac{3k}{r^4} M \right) \quad , \quad \chi_{11}^{/1} = -\frac{12 \mu k}{r^4} \quad ,$$

$$\psi_{12}^{/2} = \psi_{13}^{/3} = \frac{6 M k}{r^4} \quad , \quad \chi_{12}^{/2} = \chi_{13}^{/3} = \frac{6 \mu k}{r^4} \quad ,$$

$$\psi_{21}^{/1} = \psi_{22}^{/2} = \psi_{23}^{/3} = \chi_{21}^{/1} = \chi_{22}^{/2} = \chi_{23}^{/3} = 0$$

$$\psi_{31}^{/1} = \psi_{32}^{/2} = \psi_{33}^{/3} = \chi_{31}^{/1} = \chi_{32}^{/2} = \chi_{33}^{/3} = 0 .$$

Le equazioni del moto diventano dunque:

$$(14) \quad -\rho \frac{2k^2}{r^5} = (U - p)_{/1} - 4 M_{/1} \frac{k}{r^3} \quad , \quad (U - p)_{/2} = (U - p)_{/3} = 0$$

e la funzione incognita  $M$  è:  $M = \frac{hr^3}{2k\sqrt{3}}$ .

Dalle (13) si ricava allora:

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \frac{2}{\sqrt{3}} h \quad , \quad \psi_{22} = -\frac{hr^2}{2\sqrt{3}} \quad , \quad \psi_{33} = -\frac{hr^2}{\sqrt{3}} \sin^2 \theta , \\ \chi_{11} &= 4 \mu \frac{k}{r^3} \quad , \quad \chi_{22} = -2 \mu \frac{k}{r} \quad , \quad \chi_{33} = -2 \mu k \frac{\sin^2 \theta}{r} \\ \psi_{ij} &= \chi_{ij} = 0 \quad \text{per} \quad i \neq j ; \end{aligned}$$

e dalle (14), a meno di una costante:

$$U - p = \frac{1}{2} \rho \frac{k^2}{r^4} + 2\sqrt{3} h \lg r .$$

Si vede che anche ora, come nel caso piano, se il mezzo è in quiete, anche se  $U$  è costante,  $p$  non lo è, come non lo sono quelle componenti degli sforzi che rappresentano il contributo della plasticità.

**Meccanica** (Ondulatoria). — *Sulla generalizzazione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale.* Nota di C. TOLOTTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

#### I. INTRODUZIONE.

In un suo lavoro <sup>(2)</sup> del 1933 sulla estensione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale, il Levi-Civita rilevava come, per conseguire questa estensione, egli stesso e molti altri fossero stati costretti ad introdurre nel cronotopo un reticolo ausiliario (sistema di quattro congruenze di linee mutuamente ortogonali), che, quale puro spediente matematico privo di significato fisico, non avrebbe dovuto avere influenza sostanziale sulle equazioni finali, come invece sembrava inevitabile. Onde, abbandonando l'idea della generalizzazione diretta delle equazioni di Dirac, il Levi-Civita proponeva in sostituzione un'equazione vettoriale del tipo di Schrödinger con termine addizionale.

Molti altri lavori, ancora su questo tema della generalizzazione delle equazioni di Dirac, sono comparsi in questi ultimi anni. Mi limiterò a nominare, quali indirizzi principali, il lavoro di Infeld e van der Waerden <sup>(3)</sup>, che fondano la loro costruzione sulla estensione del concetto di spinore alla relatività generale, ed il lavoro di Whittaker <sup>(4)</sup>, che, con acuta analisi delle relazioni tra tensori e spinori in uno spazio pseudoeuclideo, riesce a dare alle equazioni di Dirac una forma puramente tensoriale e quindi immediatamente generalizzabile cogli ordinari metodi del calcolo differenziale assoluto. Ma citerò anche il recente lavoro del Ruse <sup>(5)</sup>, dove quei due indirizzi sono chiaramente esposti e collegati.

Nella presente Nota noi abbiamo creduto utile di riesaminare, alla luce della difficoltà segnalata dal Levi-Civita, quella che è ormai la estensione

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) T. LEVI-CIVITA, *Diracsche und Schrödingersche Gleichungen*. «Berichte der Preussischen Akad. der Wiss.», 1933, pp. 240-250; cfr. anche T. LEVI-CIVITA, *Alcuni aspetti matematici della nuova meccanica*. «Nuovo Cimento», marzo 1934.

(3) L. INFELD und B. L. VAN DER WAERDEN, *Die Wellengleichung des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie*. «Berichte der Preussischen Akad. der Wiss.», 1933, pp. 380-401.

(4) E. T. WHITTAKER, *On the relations of the tensor-calculus to the spinor-calculus*. «Proc. of the Roy. Soc. of London», gennaio 1937, pp. 38-46.

(5) H. S. RUSE, *On the geometry of Dirac's equations and their expression in tensor form*. «Proc. of the Roy. Soc. of Edinburgh», gennaio 1937, pp. 97-127.

comunemente accettata per le equazioni di Dirac. E ciò non perchè sotto questo aspetto l'estensione si manifesti difettosa, ma sia per dare una risposta alla questione che il Levi-Civita aveva lasciata aperta, e sia perchè effettivamente ci sembra che da questo esame risulti maggiormente chiarito tutto l'interessante problema di generalizzazione.

## 2. RICHIAMO DELLE EQUAZIONI DI DIRAC DELLA RELATIVITÀ RISTRETTA.

Supponiamo dapprima il cronotopo  $V_4$  pseudoeuclideo e riferito a coordinate pseudocartesiane  $x^0$  (temporale),  $x^1, x^2, x^3$  (spaziali).

Denoti  $c$  la velocità della luce nel vuoto;  $e$  la carica dell'elettrone;  $m$  la sua massa;  $2\pi h$  la costante di Planck;  $\varphi_k$  il potenziale elettromagnetico <sup>(1)</sup>;  $\bar{D}_k$  l'operatore

$$(1) \quad \bar{D}_k = \frac{h}{i} \frac{\partial}{\partial x^k} - \frac{e}{c} \varphi_k \quad (k = 0, 1, 2, 3; i = \sqrt{-1}).$$

Le equazioni di Dirac dell'elettrone sono <sup>(2)</sup>

$$(2) \quad \begin{cases} \bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^k \bar{D}_k \psi^{\dot{\mu}} + m c \chi_\lambda = 0, \\ \bar{\sigma}_{\mu\dot{\lambda}}^k \bar{D}_k \chi^\mu - m c \psi_{\dot{\lambda}} = 0 \end{cases} \quad (\lambda = , 1 \ 2)$$

colle  $\bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^k$  date da

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, & \bar{\sigma}_{\lambda\dot{\mu}}^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

rispettivamente matrice unità e matrici di Pauli; e dove va inoltre avvertito che per i simboli delle incognite funzioni d'onda si è usata la convenzione

$$\psi_{\dot{\lambda}} = \varepsilon_{\mu\dot{\lambda}} \psi^{\dot{\mu}}, \quad \chi_\lambda = \varepsilon_{\mu\lambda} \chi^\mu,$$

$\varepsilon_{\lambda\mu}$  denotando la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

(1) Precisamente:  $\varphi_0$  corrisponde all'ordinario potenziale scalare,  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  alle componenti (cambiate di segno) del potenziale vettore.

(2) Cfr., ad es., B. L. VAN DER WAERDEN, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Berlin, Springer, 1932, § 23.

(3) Come d'uso, abbiamo ommesso il segno di somma in relazione agli indici (latini o greci), che compaiono una volta in alto ed una volta in basso. Per gli indici latini la somma va estesa ai valori 0, 1, 2, 3; per i greci ai valori 1, 2.

Riportiamo infine l'espressione della tetracorrente

$$(3) \quad J^k = -ce \sigma_{\lambda\mu}^k (\psi^\lambda \psi^\mu + \chi^\lambda \chi^\mu)^{(1)};$$

la cui componente  $J^0$  fisicamente corrisponde (a meno del fattore  $c$ ) alla densità elettrica (probabilistica) e le altre  $J^1, J^2, J^3$  alle componenti della densità (probabilistica) di corrente.

### 3. ESTENSIONE DELLE EQUAZIONI DI DIRAC ALLA RELATIVITÀ GENERALE MEDIANTE L'AUSILIO DI UN RETICOLO.

Supponiamo ora il cronotopo  $V_4$  dotato di una metrica qualsiasi e riferito a coordinate assolutamente generali; ne sia

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

la forma quadratica fondamentale (precisamente forma indefinita ad indice d'inerzia 3).

Scelto arbitrariamente in  $V_4$  un reticolo ortogonale a parametri  $\lambda_a^k$  funzioni definite del posto <sup>(2)</sup>, formiamoci gli elementi (contravarianti rispetto all'indice  $k$ )

$$(4) \quad \sigma_{\lambda\mu}^k = \lambda_a^k \bar{\sigma}_{\lambda\mu}^a;$$

ed assumiamo *per ora*, come forma generalizzata delle equazioni (2), le seguenti

$$(2') \quad \begin{cases} \sigma_{\lambda\mu}^k \bar{D}_k \psi^\mu + m c \chi_\lambda = 0, \\ \sigma_{\mu\lambda}^k \bar{D}_k \chi^\mu - m c \psi_\lambda = 0, \end{cases} \quad (\lambda = 1, 2)$$

a cui associeremo, come nuove espressioni della tetracorrente, le

$$(3') \quad J^k = -ce \sigma_{\lambda\mu}^k (\psi^\lambda \psi^\mu + \chi^\lambda \chi^\mu).$$

Poichè le funzioni d'onda  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$  ( $\lambda = 1, 2$ ) non hanno significato fisico diretto, ma solo attraverso le formazioni (3'), è lecito assumere ad arbitrio la loro legge di trasformazione in un cambiamento di coordinate nel cronotopo, purchè ne risulti di conseguenza un comportamento contravariante per le espressioni (3') delle  $J^k$ , come richiesto dal significato fisico di queste.

(1) Due quantità, che differiscono soltanto perchè quegli indici greci che sono puntati nell'una non lo sono nell'altra e viceversa, sono da ritenersi complesse coniugate.

(2) Useremo costantemente, nel presente lavoro, la convenzione di denotare colle prime lettere  $a, b \dots$  dell'alfabeto latino quegli indici, che corrispondono alla numerazione 0, 1, 2, 3 delle quattro congruenze di cui è formato il reticolo.

Una legge di trasformazione delle  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$  che soddisfi a questa esigenza è, ad es., la legge di invarianza.

Ebbene, se si assume precisamente che le incognite funzioni d'onda  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$  si comportino come invarianti di fronte a trasformazioni generali di coordinate nel cronotopo, tali anche risultano le equazioni (2').

D'altra parte per un  $V_4$  pseudoeuclideo e riferito a coordinate pseudo-cartesiane, e per un reticolo ausiliario coincidente col sistema delle linee coordinate, le equazioni (2') si riducono alle ordinarie equazioni (2).

Quindi le (2') costituiscono una effettiva estensione delle equazioni di Dirac che rende soddisfatto il principio di relatività generale.

Vedremo tuttavia ai prossimi numeri che, per poter essere accettate, esse devono subire una ulteriore leggera modificazione.

#### 4. L'ANALISI SPINORIALE GENERALE ED I CAMBIAMENTI DEL RETICOLO AUSILIARIO.

Come accennavamo nella introduzione, il reticolo ausiliario introdotto non è una caratteristica intrinseca del fenomeno fisico, e quindi, nei suoi cambiamenti, le equazioni finali assunte devono restare sostanzialmente inalterate per poter essere accettabili. È appunto sotto questo aspetto che le nostre provvisorie equazioni (2') si presentano difettose.

Per concretare questo esame, cominceremo coll'indagare quali degli elementi, che compaiono nelle (2'), dipendano dal reticolo introdotto e quale influenza abbiano su di essi i cambiamenti del reticolo stesso.

Anzitutto, dipendono dal reticolo gli elementi  $\sigma_{\lambda\mu}^k$  definiti dalle (4). Precisamente ne dipendono pel tramite dei suoi parametri  $\lambda_a^k$ , che, nel passaggio da quel reticolo ad altro ortogonale, subiscono sull'indice  $a$  una trasformazione lorentziana a coefficienti  $L_b^a$  funzioni del posto. Ed è un risultato noto della teoria della rappresentazione del gruppo di Lorentz<sup>(1)</sup>, che le  $\sigma_{\lambda\mu}^k$ , date dalle (4), subiscono di conseguenza una sostituzione del tipo

$$\sigma_{\rho\nu}^k = T_\rho^\lambda T_\nu^\mu \sigma_{\lambda\mu}^k \quad (2),$$

colle  $T_\rho^\lambda$  coefficienti (funzioni del posto) di una opportuna trasformazione binaria complessa unimodulare, che resta così collegata in ogni punto alla corrispondente lorentziana  $L_b^a$  e quindi al cambiamento eseguito di reticolo.

Ma non sono soltanto le  $\sigma_{\lambda\mu}^k$  che, nelle (2'), dipendono dal reticolo introdotto. Tali anche occorre ammettere che siano le funzioni d'onda  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$ , se si desidera conservare le espressioni (3') per la tetracorrente. E difatti è essenzialmente richiesto dal significato fisico delle  $J^k$  che il comportamento (a priori arbitrario) delle  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$  sia tale che ne risulti l'indipen-

(1) Cfr., ad es., B. L. VAN DER WAERDEN, op. cit., § 20.

(2) Secondo la convenzione già introdotta,  $T_\lambda^\mu$  denota il complesso coniugato di  $T_\lambda^\mu$ .



denza delle (3') dai mutamenti di reticolo. Il che facilmente si ottiene ammettendo che le  $\psi^\lambda, \chi^\lambda$  si trasformino secondo la matrice  $(l_\lambda^0)$  reciproca della  $(T_\lambda^0)$ .

In conclusione:

Associato nel modo anzidetto ad ogni cambiamento del reticolo ausiliario una trasformazione binaria complessa unimodulare o (come anche si dice) una *trasformazione spinoriale*, a coefficienti  $T_\lambda^0$  funzioni del posto, ed assunte le matrici  $(T_\lambda^0)$  e l'inversa  $(l_\lambda^0)$  come leggi di trasformazione rispettivamente per gli indici greci (spinoriali) covarianti e contravarianti <sup>(1)</sup>, la condizione affinché le (2') siano indipendenti dai cambiamenti di reticolo è che esse siano invarianti per trasformazioni spinoriali qualsiasi.

#### 5. FORMA GENERALIZZATA DELLE EQUAZIONI DI DIRAC INDIPENDENTE DAL PARTICOLARE RETICOLO INTRODOTTO.

Il semplice esame delle (2') è sufficiente per convincersi che esse sono invarianti solo per le trasformazioni spinoriali a coefficienti costanti e non per trasformazioni spinoriali generali. Onde, come già avevamo preannunciato, si rende necessaria una loro modificazione.

Sull'esempio di quanto è solito procedimento nel calcolo differenziale assoluto, si è portati ad assumere come nuove equazioni (ed è questa la generalizzazione comunemente assunta delle equazioni di Dirac) le seguenti

$$(2'') \quad \begin{cases} \sigma_{\lambda\mu}^k D_k \psi^\mu + mc \chi_\lambda = 0 \\ \sigma_{\mu\lambda}^k D_k \chi^\mu - mc \psi_\lambda = 0 \end{cases} \quad (\lambda = 1, 2)$$

con

$$D_k = \frac{h}{i} \Delta_k - \frac{e}{c} \varphi_k,$$

che differisce dal  $\bar{D}_k$  delle (2') per contenere, al posto dell'ordinaria derivazione  $\frac{\partial}{\partial x^k}$ , una derivazione spinoriale covariante  $\Delta_k$ .

Come coefficienti  $\Gamma_{\lambda k}^0$  della connessione spinoriale che definisce il  $\Delta_k$ , si può assumere un qualsiasi sistema di funzioni che, per una trasformazione  $x \rightarrow x'$  di coordinate ed una trasformazione spinoriale  $T_\lambda^0$ , si trasformino secondo la legge

$$\Gamma_{\lambda k}^0 = \left( \Gamma_{\mu i}^0 T_\lambda^\mu + \frac{\partial T_\lambda^\nu}{\partial x^i} l_\nu^0 \right) \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}.$$

(1) Al solito, per gli indici puntati vanno prese rispettivamente le matrici complesse coniugate  $(T_\lambda^0)$  e  $(l_\lambda^0)$ .

Un esempio è <sup>(1)</sup>

$$\Gamma_{\lambda k}^0 = \frac{1}{2} \sigma_i^{0\lambda} \left( \frac{\partial \sigma_{\lambda \mu}^i}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^i \sigma_{\lambda \mu}^i \right),$$

le  $\Gamma_{lk}^i$  denotando gli ordinari simboli di Christoffel.

**Chimica** (Chimica fisica). — *Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze* <sup>(2)</sup>. Nota I di L. CAVALLARO, presentata <sup>(3)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

I dielettrici a struttura polare, allo stato liquido e gassoso, mostrano ad elevatissime radiofrequenze bande di assorbimento caratteristiche, il cui studio è appena all'inizio, anche se la loro esistenza era prevista dalla teoria del Debye <sup>(4)</sup>.

Lo sviluppo di queste ricerche procede di pari passo col progresso della radiotecnica che ha reso oggi accessibile il campo delle frequenze  $10^7 \div 10^9$  Herz, corrispondente alle onde corte, ultracorte, e, in parte, alle microonde.

Introducendo nella formula di Clausius Mosotti il termine dovuto alla polarizzazione dipolare, secondo il calcolo del Debye, si ottiene la:

$$(1) \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} N \left( \alpha_0 + \frac{\mu^2}{3kT} \right)$$

che è stata applicata alla determinazione, attraverso  $\varepsilon$  ed  $\alpha_0$ , del momento dipolare  $\mu$ ; essa rende conto della dipendenza dalla temperatura della costante dielettrica  $\varepsilon$  delle sostanze polari.

Per frequenze molto elevate, confrontabili con il periodo di rotazione della molecola, la (1) non è più valida: infatti la polarizzazione molecolare  $P$  varia in funzione della frequenza. Applicando, in luogo della legge di Boltzmann, un'altra legge di distribuzione, basata sulla teoria del moto Browniano, il Debye ottiene, in questo caso, la:

$$(2) \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} N \left( \alpha_0 + \frac{\mu^2}{3kT(1 + i\omega\tau)} \right)$$

(1) Per le considerazioni che portano a preferire questa particolare scelta dei coefficienti della connessione spinoriale, rimandiamo al lavoro del Ruse citato nell'introduzione.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(3) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(4) P. DEBYE, *Polare Molekeln* Hirzel, 1929, e «Phys. Zeitschr.», 35, p. 101, 1934 e 36, p. 100 e 193, 1935.

nella quale  $\omega = 2\pi\nu$  è la pulsazione del campo elettromagnetico di frequenza  $\nu$ , e  $\tau$  viene definito come il « tempo di rilassazione » della molecola; esso rappresenta il tempo necessario perchè, per improvvisa scomparsa del campo orientante, la molecola si sposti di  $\frac{1}{e}$  dalla sua posizione di equilibrio.

Il valore di  $\tau$  risulta legato dalla:

$$(3) \quad \tau = \frac{\zeta}{2kT}$$

ad una variabile  $\zeta$  che rappresenta la resistenza di attrito incontrata nella sua rotazione dalla molecola; assimilando questa ad una sfera di raggio  $a$ , ruotante in un mezzo di viscosità  $\eta$ , si ottiene applicando la legge di Stokes:

$$(4) \quad \zeta = 8\pi\eta a^3.$$

Sostituendo quest'ultima relazione nella (3), si ha:

$$(5) \quad \tau = \frac{4\pi\eta a^3}{kT}.$$

Riprendendo in esame la (2) si identificano due casi limiti: per  $\omega\tau \simeq 0$ , si torna alla (1); per  $\omega\tau \simeq \infty$  si ha la:

$$(6) \quad P = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} \frac{M}{d} = \frac{4\pi}{3} N\alpha_0$$

nella quale è scomparso il termine dovuto alla polarizzazione dipolare.

Confrontando la (1) con la (6), si vede che, al variare di  $\nu$  da  $\nu_1$  a  $\nu_0$  ( $\nu_1 \ll \nu_0$ ),  $\varepsilon$  diminuisce da un valore  $\varepsilon_1$  ad un valore  $\varepsilon_0$ ; poichè questa diminuzione ha luogo col crescere della frequenza, siamo qui di fronte ad un effetto di « dispersione anomala ».

Nell'intervallo di frequenza  $\nu_1 \div \nu_0$ , tanto  $P$  che  $\varepsilon$  hanno quindi un valore complesso; dalla (2), mettendo in evidenza  $\varepsilon$ , e servendosi delle  $\varepsilon_1, \varepsilon_0$ , definite come sopra, il Debye ottiene l'espressione complessa di  $\varepsilon$ . Si ha:

$$(7) \quad \varepsilon = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 + 2}}{\frac{1}{\varepsilon_1 + 2} + i\omega\tau \frac{1}{\varepsilon_0 + 2}} = \varepsilon' - i\varepsilon''.$$

Scindendo  $\varepsilon$  in  $\varepsilon'$  e in  $\varepsilon''$ , si ottiene:

$$(8) \quad \varepsilon' = \varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_0}{1 + x^2 \omega\tau}$$

$$(9) \quad \epsilon'' = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{x}{1 + x^2 \omega \tau}$$

dove:

$$(10) \quad x = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_0 + 2} \omega \tau.$$

Per comprendere il significato fisico di  $\epsilon'$  ed  $\epsilon''$ , si consideri un sistema costituito da un condensatore di capacità  $C_0$  a vuoto, collegato in parallelo con una resistenza antiinduttiva  $R$  (cfr. fig. 1). Quando tra le armature di

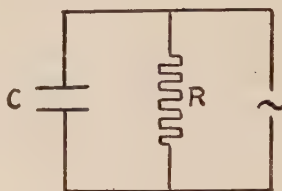


fig. 1

questo condensatore sia posto un dielettrico di costante dielettrica  $\epsilon$  e si porti su di esse una differenza di potenziale alternata:  $V = V_0 e^{i\omega t}$  in cui:  $\omega = 2\pi\nu$  sia così elevato che  $\nu$  ricada nel campo di frequenza  $\nu_1 \div \nu_0$ , per cui  $\epsilon$  è definita dalla (7), potremo scrivere per il valore dell'intensità di corrente le due relazioni:

$$(11) \quad \left( i\omega C + \frac{1}{R} \right) V e^{i\omega t} = i\omega \left( C - \frac{i}{\omega R} \right) V e^{i\omega t}$$

$$(12) \quad \frac{d}{dt} (\epsilon C_0 V e^{i\omega t}) = i\omega (\epsilon' - i\epsilon'') C_0 V e^{i\omega t}$$

dal confronto delle quali si ottiene:

$$(13) \quad \epsilon' = \frac{C}{C_0}$$

$$(14) \quad \epsilon'' = \frac{1}{\omega R C_0}.$$

Si vede così che  $\epsilon'$  rappresenta il valore di  $\epsilon$  quale viene misurato con uno dei metodi abitualmente impiegati (risonanza, battimenti, ponte, 2° metodo di Drude); segue da ciò che in questo campo di frequenze la misura di costante dielettrica non dà l'intero valore di  $\epsilon$ , ma soltanto quello della sua parte reale  $\epsilon'$ .

Per comprendere ora il significato fisico di  $\epsilon''$ , si consideri ancora lo schema della fig. 1; se il dielettrico contenuto nel condensatore avesse una conduttività  $\kappa$ , la resistenza nel condensatore stesso sarebbe espressa da:

$$(15) \quad R = \frac{1}{9 \times 10^{11}} \frac{1}{\kappa} \frac{1}{4\pi C_0}.$$

Questo valore, introdotto nella (11), dà:

$$(16) \quad \left( i\omega C + \frac{1}{R} \right) V e^{i\omega t} = i\omega \left( C - i \cdot 9 \cdot 10^{11} \frac{4\pi C_0}{\omega} \right) V e^{i\omega t}$$

segue, per la (13):

$$(17) \quad \epsilon'' = 9 \cdot 10^{11} \frac{4\pi\kappa}{\omega}$$

Questa relazione che lega la  $\epsilon''$  ad una conduttività  $\kappa$ , permette di trarre la seguente conclusione:

« qualunque dielettrico polare, anche se assolutamente privo di conduttività, mostra, nella zona di dispersione anomala, una conduttività apparente, dovuta allo sfasamento fra campo elettrico e dipoli che si manifesta nella zona suddetta. Ne segue un assorbimento di energia da parte del dielettrico, assorbimento che può essere determinato, sia attraverso  $\epsilon''$ , sia attraverso l'angolo di perdita  $\operatorname{tg} \vartheta$  quale è definito in elettrotecnica, sia attraverso l'indice di assorbimento  $k$ , quale è definito dalla relazione fondamentale di Maxwell:

$$(18) \quad \epsilon = n^2 (1 - ik)^2$$

fra l'indice di rifrazione  $n$ , ed  $\epsilon$  e  $k$  ».

Per stabilire ora come l'assorbimento vari con la frequenza, per determinare cioè la « banda di assorbimento » il Debye, facendo sistema fra la (18) e la (7), ottiene l'espressione di  $n^2 k^2$ , in funzione di  $\omega\tau$ ; si ha così:

$$(19) \quad k^2 n^2 = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_0^2 x^2}{1 + x^2}} + \frac{\epsilon_1 + \epsilon_0 x^2}{1 + x^2} \right]$$

dove:

$$x = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_0 + 2} \omega\tau$$

si vede che nell'intervallo:  $\omega = 0 \div \omega = \infty$ , vale a dire nel passaggio dal campo elettrostatico al campo ottico,  $n^2 k^2$  passa da un valore zero ad un massimo per ritornare ad annullarsi; nello stesso intervallo  $n^2$  passa dal valore  $\epsilon_1$  ad  $\epsilon_0$ . Infine  $k$  sarà massimo per:

$$(20) \quad \omega\tau = \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_1 + 2} \sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_0}}$$

ed assumerà il valore:

$$(21) \quad k = \frac{\sqrt{\epsilon_1} - \sqrt{\epsilon_0}}{\sqrt{\epsilon_1} + \sqrt{\epsilon_0}} \sim 1.$$



Essendo poi:

$$(22) \quad \varepsilon'' = 2kn^2$$

e:

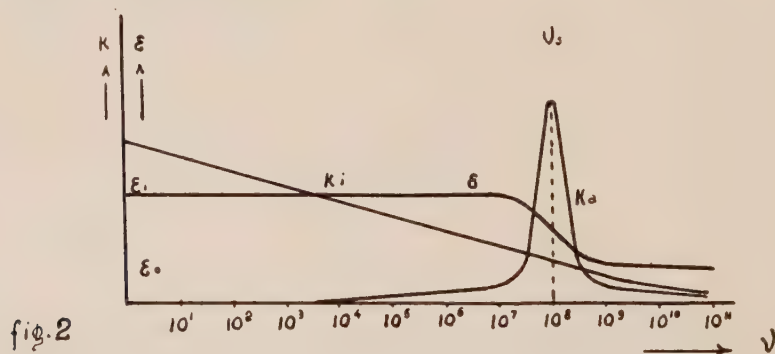
$$(23) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} = \frac{2k}{1 - k^2}$$

$\varepsilon''$  e l'angolo di perdita  $\operatorname{tg} \vartheta$  avranno andamento analogo a quello di  $k$  testè definito.

Possiamo così concludere nel seguente modo: « ogni dielettrico polare, oltre all'assorbimento dovuto alla sua conduttività (che, per quanto piccola, non è mai nulla) mostra in un campo di frequenze molto elevato, una banda di assorbimento che può essere ascritta ad una conduttività apparente, ma che è dovuta non agli joni bensì ai dipoli che, col crescere della frequenza, gradualmente si sfasano rispetto alle alternanze del campo fino a fermarsi del tutto.

Dal valore del tempo di rilassazione dei dipoli dipende la giacitura della banda stessa nello spettro elettromagnetico.

Per quanto dipendenti da cause così diverse, i due tipi di assorbimento non possono essere misurati separatamente; possono soltanto essere distinti l'uno dall'altro in base al loro diverso andamento in funzione della frequenza (cfr. fig. 2, nella quale  $k_j$  è l'assorbimento dovuto alla conduttività e  $k_d$  quello dovuto ai dipoli).



In conformità alla (3) le bande di assorbimento di sostanze molto viscose, quali gli oli lubrificanti o gli oli da trasformatori <sup>(1)</sup>, o di sostanze macromolecolari, quali le proteine in soluzioni acquose diluite <sup>(2)</sup>, si presentano per frequenze relativamente basse ( $\nu \sim 10^7$  Herz).

(1) K. KRAUSE, « Phys. Zeitschr. », 35, p. 684, 1934; JOHNSTON e WILLIAM, « Phys. Rev. », 34, p. 1483, 1929; H. RIECHE, « Zeitschr. f. Phys. », 95, p. 158, 1935; ROHDE, WULFF e SCHWINDT, « Zeitschr. f. angew. Chem. », p. 437, 1936; G. TODESCO, « Nuovo Cimento », 8, p. 45, 1931 e 9, p. 125, 1932.

(2) L. CAVALLARO, « Arch. Sc. Biol. », 20, p. 237 e 585, 1934; J. ERRERA, « Journ.

Per contro sostanze di piccole dimensioni molecolari, e non associate, mostrano bande di assorbimento per frequenze molto elevate; per l'acqua ad esempio esse sono previste per  $\nu \sim 1.5 \times 10^{10}$  ( $\lambda \approx 2$  cm.). Per quanto anche quest'ultima zona sia stata espugnata nel costante progresso della radiotecnica, l'uso di oscillatori a tali frequenze non riesce ancora tanto sicuro da permettere misure molto precise.

Alle basse temperature o per dissoluzione in solventi molto viscosi<sup>(1)</sup>, le bande di assorbimento si spostano verso frequenze più basse. In ogni modo sono oggi possibili misure corrette fino a frequenze di  $10^9$  Herz, corrispondenti ad onde di cm. 30.

Dalla succinta esposizione della teoria appare l'interesse chimico fisico a queste misure dalle quali, attraverso il tempo di rilassazione, si risale alle dimensioni molecolari, alla viscosità microscopica, certo diversa da quella che si misura al viscosimetro, nonchè dallo studio dei fenomeni di associazione dipolare ed ai rapporti reciproci fra dipoli ed joni.

**Chimica.** — *Su alcune  $\alpha$ -Naftilammine sostituite*<sup>(2)</sup>. Nota XIII sui Nitroderivati aromatici di A. MANGINI, presentata<sup>(3)</sup> dal Corrisp. G. BARGELLINI.

Nella Nota X<sup>(4)</sup>, fu messo in rilievo la elevata reagibilità del cloro nella 1-2-4-cloro-dinitro-naftalina-I: tale reagibilità, sostituibilità dell'alogeno, è maggiore di quella dell'1-2-4-cloro-dinitro-benzolo-II, e minore di quella corrispondente al cloruro di picrile-III; questo fatto, come è stato dimostrato nelle precedenti ricerche<sup>(5)</sup>, è dovuto alla particolare stabilizzazione statistica della configurazione molecolare della clorodinitronaftalina ( $> II$ , e  $< III$ ).

Simbolicamente, graficizzando come Bonino<sup>(6)</sup> la maggiore permanenza statistica della orientazione centrica con la lunghezza delle frecce, si può schematizzare:

d. chim. phys.», 29, p. 577, 1932; FERGUSON, MALONE, CASE, « Journ. of chem. phys. », 2, p. 94, 1934 e 3, p. 285, 1935; N. MARINESCO, « Koll. Zeitschr. », 58, p. 285, 1932; J. WYMAN, « Journ. of biol. chem. », 1931.

(1) GOLDAMMER e SACK, « Phys. Zeitschr. », 31, p. 224, 1930; K. KRAUSE, loc. cit.; H. RIECHE, loc. cit.; R. LUTHI, « Helv. Phys. Acta », 6, p. 139, 1933.

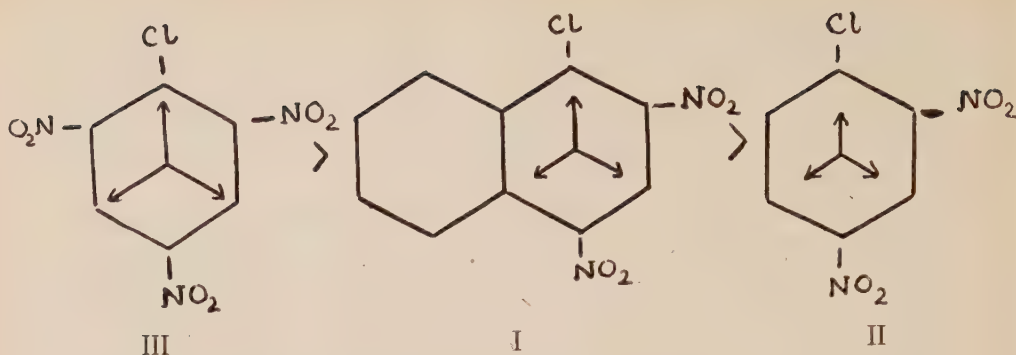
(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Perugia.

(3) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(4) A. MANGINI, B. FRENGUELLI, *Su alcuni derivati naftalinici* (Nota X). « Gazz. Chim. Ital. » 67, 1937, in corso di stampa.

(5) Ib. ib., e Note precedenti sui nitroderivati aromatici.

(6) *Lo Spettro Raman dei nuclei aromatici e le nuove idee sulla loro costituzione* « Lavori IX Congresso Intern. Chim. pura e appl. », Madrid, 1934, p. 81.



Inoltre, tenendo conto dei risultati numerici di cui alla Nota X e che le velocità di reazione con il metilato sodico (sostituzione con l'ossimetile) ( $t = 0^\circ$ ), risultano <sup>(1)</sup>:

cloruro picrile (III)	molto elevata ( $> 3.42$ )
1-2-4-cloro-dinitro-naftalina (I)	$\approx 3.42$ <sup>(2)</sup>
1-2-4-cloro-dinitro-benzolo (II)	0.11
1-3-dinitro-4-6-dicloro-benzolo	1.20

si può anche dire da un punto di vista più quantitativo che « l'effetto attivante » sulla reagibilità del cloro, riferendosi al clorodinitro-II, indotto dal gruppo  $C_6H_4 = (5)-(6)$ , si può considerare come intermedio fra quello di un cloro e quello di un  $NO_2$  rispettivamente nelle posizioni 5-6 (che sono posizioni « canoniche »):



queste relazioni possono riuscire utili anche nelle applicazioni pratiche.

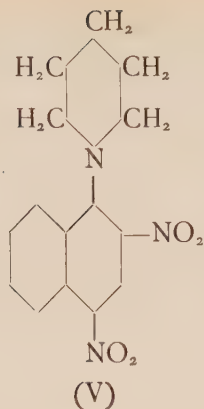
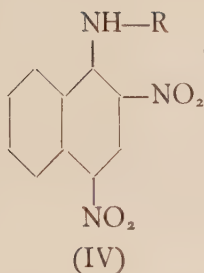
Successivamente (Note XI e XII) <sup>(3)</sup> è stata studiata la reazione di sostituzione dell'alogeno mediante diverse diammine e idrazine; dato, ora le numerose applicazioni che trovano le difenilamine <sup>(4)</sup>, come è dimostrato dai numerosissimi brevetti richiesti sulla loro preparazione, ho approfittato della elevata reagibilità dell'alogeno nel composto (I) per preparare alcune  $\alpha$ -naftilamine sostituite (IV), per azione di diverse amine primarie alifatiche e aromatiche; inoltre per azione della piperidina, ho ottenuto la 2-4-dinitro- $\alpha$ -piperidil-naftalina (V)

(1) Cfr. Nota X, loc. cit.

(2) « Chem. Zentr. », 1928, 1, 1768.

(3) A. MANGINI, « Gazz. Chim. Ital. », 67, 1937, in corso di stampa; e questi « Rendiconti », 1937.

(4) Cfr. anche A. MANGINI, *Su alcune fenilammine sostituite*. « Atti V Congresso Nazion. Chim. pura e appl. », Sardegna, 1935.



Tutti questi prodotti sono stati preparati facendo reagire gr. 2.50 (1 mol.) di clorodinitronaftalina-1-2-4-(I) con 2 mol. di base, in presenza di alcool. La reazione in qualche caso procede già operando sulle sospensioni o sulle soluzioni calde e senza ulteriore ebollizione; in altri casi è necessario far bollire per un tempo più o meno lungo. Il prodotto greggio di reazione veniva filtrato alla pompa, e opportunamente purificato.

Nella seguente tabella sono raccolti i dati relativi alla preparazione dei differenti prodotti (I, reattivo usato; II, periodo di ebollizione; III, specie del radicale R unito al gruppo NH-, e form. del composto), le loro proprietà fisiche (IV, colore del prodotto, forma cristallina, punto di fusione, e solvente di cristallizzazione), il rendimento della reazione (V), e i dati analitici (VI); più oltre, nei casi richiesti, si specificano i particolari di manualità.

Riferisco qui di seguito i particolari di alcune reazioni, e precisamente con meta-amino-fenolo, acido solfanilico e  $\alpha$ -amino-piridina; è inoltre descritto il p-nitro-fenil-idrazone della 2-4-dinitro- $\alpha$ -naftil-fenil-(4'-acetil)-amina.

#### *2-4-Dinitro- $\alpha$ -Naftil-3'-Ossi-Fenilammina (4).*

La soluzione alcoolica madre di reazione, colorata in rosso, non cristallizza per raffreddamento. Per isolare il prodotto di reazione, la soluzione (circa 150 cc. di alcool) viene aggiunta di 250 cc. di acido acetico diluito; in questo modo si ottiene il prodotto cristallizzato in tavolette esagonali allungate rosso-chiaro, già sufficientemente puro.

Si purifica ulteriormente da un miscuglio di benzolo-ligroina.

#### *Acido-2-4-Dinitro- $\alpha$ -Naftil-Fenilammina-4'-Solfonico (9).*

Si opera come segue: la soluzione di gr. 1.25 di clorodinitronaftalina in 100 cc. di alcool, viene aggiunta di gr. 4.20 di acido solfanilico e di

N.	(I) Reattivo	(II) Periodo eboll.	(III) Formula (R =)	(IV) Solvente colore f. cristal. p. f.	(V) Rend. %	(VI) ANALISI	
						calcolato CH	trovato CH
1	Etilammina	—	$\begin{array}{c} \text{—C}_2\text{H}_5 \\ \text{C}_{12}\text{H}_{11}\text{O}_4\text{N}_3 \end{array}$	Ac. acetico aghi gialli 165 $\frac{1}{2}$ . 166 $\frac{1}{2}$	90	55.17-4.21	55.12-4.17
2	Allilammina	—	$\begin{array}{c} \text{—CH}_2\text{—CH=CH}_2 \\ \text{C}_{13}\text{H}_{11}\text{O}_4\text{N}_3 \end{array}$	Ac. acetico stan- ghette acic. giallo arancio- ne 146-147	80	57.14-4.02	57.12-3.92
3	Piperidina	—	$\text{C}_{15}\text{H}_{15}\text{O}_4\text{N}_3$ (V)	Alcool aghi gialli 135-136	92	59.80-4.98	59.98-5.09
4	m-amino-fenolo	10 min.	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{OH—3—} \\ \text{—C}_{16}\text{H}_{11}\text{O}_5\text{N}_3 \end{array}$	Rose di aghi ros- so-vivo 176- 177	70	59.07-3.38	59.31-3.34
5	Acido o-amino- benzoico	12 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COOH} \\ (2) \\ \text{C}_{17}\text{H}_{11}\text{O}_6\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico prismi rosso- arancione 260 dec.	60	57.78-3.11	58.05-3.03
6	Etere etilico aci- do o-amino-ben- zoico	50 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COOC}_2\text{H}_5 \\ (2) \\ \text{C}_{19}\text{H}_{15}\text{O}_6\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico tavolette ros- so - arancione 185-186	65	59.83-3.93	59.71-4.20
7	Acido m-amino- benzoico	2 $\frac{1}{2}$ ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COOH} \\ (3) \\ \text{C}_{17}\text{H}_{11}\text{O}_6\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico tavolette pri- smatiche gial- lo-car. 250 dec.	90	57.78-3.11	57.31-3.38
8	Etere etilico aci- do m-amino-ben- zoico	5 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COOC}_2\text{H}_5 \\ (3) \\ \text{C}_{19}\text{H}_{15}\text{O}_6\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico tavolette rett. aranc. 152 $\frac{1}{2}$ 153 $\frac{1}{2}$	65	59.83-3.93	59.54-4.14
9	Acido solfanilico	50 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{SO}_3\text{H—4} \\ \text{C}_{16}\text{H}_{11}\text{O}_7\text{N}_3 \end{array}$	Stanghette gial- lo-oro 190 dec.	100	S = 8,22	S = 7.99
10	p-amino-aceto- fenone	5 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COCH}_3 \\ (4) \\ \text{C}_{18}\text{H}_{13}\text{O}_5\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico prismi rossi 170-171	70	61.51-3.70	61.62-3.85
11	p-amino-benzo- fenone	12 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_6\text{H}_4\cdot\text{COC}_6\text{H}_5 \\ (4) \\ \text{C}_{23}\text{H}_{15}\text{O}_5\text{N}_3 \end{array}$	Acido acetico prismi rossi 200-201 dec.	82	66.82-3.63	66.67-3.81
12	$\alpha$ -amino-piridina	30 ore	$\begin{array}{c} \text{—C}_5\text{H}_4\text{N—}\alpha\text{—} \\ \text{C}_{15}\text{H}_{10}\text{O}_4\text{N}_4 \end{array}$	Alcool aghi e ta- volette giallo- car. 189-190 dec.	—	58.06-3.22 N = 18.06	58.28-3.03 N = 17.81

50 cc. di acqua; dopo 50 ore di ebollizione continua si filtra bollente. La soluzione, che per raffreddamento abbandona solo tracce di prodotto cristallizzato, viene acidificata con acido cloridrico diluito: si ottiene allora un abbondante precipitato giallo, cristallizzato in aghi.

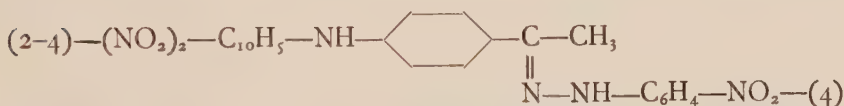


È insolubile in etere di petrolio, e benzolo; molto solubile in alcool, acido acetico, acqua bollente. Il prodotto si purifica precipitando con etere di petrolio, la soluzione in alcool assoluto.

*2-4-Dinitro- $\alpha$ -Naftil-4'-Acetil-Fenilammina (10).*

Durante il corso delle presenti ricerche, il prodotto è stato descritto anche da W. Chr. Raadsvela<sup>(1)</sup> a p. f. 162; cristallizzato dall'acido acetico, fonde a 170-171. Trattando la soluzione acetica con ugual peso di para-nitro-fenilidrazina, si ottiene dopo breve ebollizione (circa 10 minuti) il corrispondente

*2-4-Dinitro- $\alpha$ -Naftil-4'-Acetil-(p-nitro-fenilidrazone)-Fenilammina.*



si purifica sciogliendo il prodotto greggio della reazione in nitrobenzolo e precipitando quindi con alcool assoluto: aghetti raggruppati violetti, p. f. 255 dec.

	trov. %	C = 59.11 ;	H = 3.76
per $\text{C}_{24}\text{H}_{18}\text{O}_6\text{N}_6$	calc.	59.25 ;	3.70

*2-4-Dinitro- $\alpha$ -Naftil- $\alpha'$ -Piridil-ammina (12).*

In 200 cc. di alcool si sciolgono gr. 2.50 di clorodinitroderivato (I), e alla soluzione vi si aggiunge la  $\alpha$ -amino-piridina<sup>(2)</sup> (gr. 1.90 - 2 mol. - sciolti in 20 cc. di alcool); il tutto si fa bollire a ricadere: la soluzione che dapprima è giallastra, diventa nello spazio di 10 minuti verdastra. Dopo 30 ore di ebollizione continuata, la soluzione viene filtrata bollente e versata in acqua: si ottiene una emulsione giallastra, che solo dopo 2-3 giorni abbandona un precipitato giallo-sporco. Il prodotto non è di facile purificazione, e solo dopo numerose cristallizzazioni dall'alcool in presenza di nero decolorante si riesce ad ottenerlo sufficientemente puro; la resa della reazione non supera il 10 %, anche operando in altre condizioni.

(1) « Bull. Docum. », 1936, 487.

(2) L' $\alpha$ -amino-piridina reagisce anche con il gruppo nitrico mobile: MANGINI, Nota IV sui Nitroderivati, « Gazz. Chim. Ital. », 65, 1191 (1935).

**Chimica.** — *Sullo spettro Raman dell'*N*-deuteriopirrolo.* Nota di G. B. BONINO e R. MANZONI ANSIDEI, pres. dal Socio M. BETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sulle righe attribuite ad una eventuale forma pirroleninica nello spettro Raman del pirrolo.* Nota di G. B. BONINO e R. MANZONI ANSIDEI, pres. dal Socio M. BETTI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Geologia.** — *La struttura geologica delle Austridi.* — Nota V. Ancora sul sistema austroalpino delle Alpi Orientali. Nota di GB. DAL PIAZ, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. CHECCHIA RISPOLI.

Già in precedenti lavori ho accennato all'inesistenza delle falde austroalpine inferiori (= Grigionidi inferiori di STAUB 1924 e 1934, Grigionidi di DAL PIAZ 1936) lungo l'intero perimetro della finestra tettonica degli Alti Tauri. Con la presente nota porto ulteriori dati a chiarimento e sostegno della mia idea e, nello stesso tempo, tento di abbozzare un primo schema stratigrafico delle Austridi delle Alpi Orientali, che armonizzi con la nuova concezione tettonica da me sostenuta (b. 1-4).

I fatti che mi hanno condotto a negare l'esistenza delle Grigionidi (*nobis*) tutt'attorno alla finestra dei Tauri sono i seguenti:

a) Appartenenza alle Tirolidi (*nobis*) di tutto il Cristallino antico austroalpino a mezzogiorno della finestra dei Tauri (b. 2).

b) Esistenza di un fianco rovesciato delle Tirolidi (*nobis*), con termini permio-triassici, lungo vasti tratti dell'orlo meridionale della finestra stessa, a contatto diretto con termini alto penninici (b. 2 e 5). Questo fatto e il precedente escludono che lungo il bordo meridionale della finestra possano affiorare elementi strutturali riferibili alle Grigionidi.

c) Appartenenza alle Tirolidi (*nobis*) di tutto il Cristallino antico austroalpino che si estende lungo il limite occidentale della finestra e che forma lo zoccolo normale, primario, dei terreni permomesozoici del Tribulaun e delle Cime Bianche di Telve (b. 1 e 7).

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

d) Inesistenza di sicuri termini austroalpini nelle scaglie del Castello di Sprechenstein presso Vipiteno (b. 1 e 5). Ciò rende verosimile che la zona di scaglie Vipiteno-Steinach (= austroalpino inferiore secondo STAUB b. 8 e DÜNNER b. 9) derivi in realtà da una digitazione basale delle Tiroliidi, che, presso Vipiteno, sembra ancora collegata direttamente con la massa principale del ricoprimento austroalpino superiore dell'Oetztal (b. 1,5 e 10-11).

e) Presenza di vasti relitti del fianco rovesciato delle Austridi (= Tiroliidi *nobis*) anche lungo l'orlo occidentale e settentrionale della finestra dei Tauri (presso Vipiteno secondo SANDER b. 10-11 e DAL PIAZ b. 1 e 4; nei Tarntalerköpfe secondo BLESER b. 12; nei Radstättertauern secondo KOBER b. 13 e BLATTMANN b. 18). Questa circostanza corrobora l'idea che le Austridi delle Alpi Orientali siano formate da un unico, gigantesco complesso tettonico, fornito di importanti relitti del suo fianco rovesciato e riferibile esclusivamente all'Austroalpino superiore (Tiroliidi *nobis*).

f) L'assenza di potenti masse intrusive pretriassiche, equivalenti a quelle ben note delle falde Err-Bernina. Nella stessa zona di scaglie Vipiteno-Steinach manca in via assoluta qualsiasi traccia di questi terreni (b. 1). Sebbene i caratteri offerti dalle formazioni prealpine non possano da soli esser invocati per distinguere fra loro le unità tettoniche alpine, purtuttavia essi costituiscono spesso buoni elementi sussidiari di giudizio, come si verifica appunto nel nostro caso.

Quali sono invece i motivi che si possono addurre a favore dell'esistenza dell'Austroalpino inferiore lungo i bordi della finestra dei Tauri? Uno dei più forti argomenti avanzato in proposito da R. STAUB (b. 8) consiste nella presunta corrispondenza della Schwarzeckbreccie dei Radstättertauern e dell'analoga breccia dei Tarntalerberge con le caratteristiche breccie cretacee dell'Austroalpino inferiore dei Grigioni (Saluver, Sassalbo, Engadina inferiore). Ultimamente lo SCHWINNER (b. 14) ha criticato il modo di vedere di STAUB, affermando che la Schwarzeckbreccie e la Tarntalerbreccie sono delle formazioni complesse, di natura in parte sedimentaria e in parte tettonica; i processi di erosione e di deposito si sarebbero verificati all'inizio del Lias, mentre il successivo rimaneggiamento tettonico sarebbe una conseguenza dell'orogenesi alpina <sup>(1)</sup>. Se le conclusioni di SCHWINNER dovessero corrispondere a realtà, esse infirmerebbero completamente l'idea del parallelismo fra le breccie dei Tauri e quelle dei Grigioni e in tal modo verrebbe a cadere uno dei principali argomenti invocati dallo STAUB per riferire

(1) Nella mia quarta Nota sulla struttura geologica delle Austridi (b. 4, p. 12) ho scritto che, secondo SCHWINNER, i processi di erosione e di deposito, che hanno dato origine alla Schwarzeckbreccie e alla Tarntalerbreccie, si sarebbero verificati «verso la fine del Trias». Sono grato al prof. SCHWINNER per aver voluto gentilmente richiamare la mia attenzione su questa inesattezza, il cui doveroso riconoscimento non viene però ad alterare in nessun modo le conclusioni esposte in quel mio lavoro.

all'Austroalpino inferiore quasi tutta la serie sedimentaria dei Tarntalerköpfe e gran parte di quella dei Radstätterberge.

A dir il vero, i geologi svizzeri che hanno avuto occasione di studiare sul terreno la Schwarzeckbreccie e la Tarntalerbreccie, sono concordi nell'affermare l'esistenza di una evidente analogia fra queste formazioni clastiche e le breccie austroalpine inferiori dei Grigioni. Così per esempio il BLESER inclina all'idea che il conglomerato poligenico della Tarntal sia un equivalente della Saluverbrecchie (b. 12 p. 81). In una lettera del 21 gennaio del corrente anno, il mio illustre Amico prof. JOOS CADISCH, ben noto specialista della geologia dei Grigioni, così si esprime: « Die Tarntalerbreccie und erst recht die Schwarzeckbreccie, die ich beide gesehen habe, sind eben doch weitaus am ähnlichsten den bündnerischen unterostalpinen Vorkommen ». Egli mi dichiara inoltre di non poter accogliere le conclusioni cronologiche dello SCHWINNER.

Infine, secondo i recentissimi studi di BLATTMANN (b. 18) e di CLAR (b. 19), la Schwarzeckbreccie sarebbe riferibile al Giurese superiore, età che del resto è stata attribuita da vari autori anche alla Saluverbrecchie dei Grigioni <sup>(1)</sup>.

Sebbene la questione sopra accennata sia ancora *sub iudice*, si può però ritenere che l'idea di una notevole corrispondenza litologico-cronologica fra i conglomerati dei Tauri (Tarntal e Radstätterberge) e quelli cretacei dei Grigioni abbia al giorno d'oggi molte probabilità di risultare ben fondata. Tuttavia, anche se le affermazioni espresse a tale riguardo da STAUB e dagli altri Colleghi svizzeri dovessero corrispondere a realtà, non credo che si sarebbe costretti per questo solo motivo ad ammettere l'esistenza dell'Austroalpino inferiore lungo il bordo settentrionale della finestra degli Alti Tauri.

*È infatti possibile, ed io ritengo anche molto probabile, che, su notevoli distanze di spazio e di tempo, formazioni geologiche fra loro analoghe o magari del tutto identiche ed appartenenti ad un unico bacino di sedimentazione, possano in certi casi aver subito un diverso destino tettonico.* Ciò perchè è inammissibile che le medesime unità strutturali si estendano da un capo all'altro dell'edificio orogenetico, conservando più o meno le stesse forme e proporzioni su tutta la loro lunghezza, come sostengono alcuni autori. Certamente il principio della conservazione della forma geometrica dei singoli solidi tettonici in direzione assiale è fuori discussione e costituisce la base della moderna geologia strutturale, ma è altrettanto vero che, se questo stesso principio è applicabile su distanze di molti chilometri, esso diventa fallace quando si

(1) Un'approfondita discussione sull'età della Saluverbrecchie si trova nell'opera fondamentale di H. P. CORNELIUS, *Geologie der Err-Julier Gruppe*, «Materiali per la Carta Geol. della Svizzera», N. S., f. 70, § I, 1935, p. 240. Questo Autore riafferma, sia pure con qualche riserva, la sua antica opinione, secondo cui la Saluverbrecchie apparterebbe al Cretaceo.



pretende di vederlo realizzato sopra distanze di centinaia e centinaia di chilometri. Quale aderenza con la realtà può offrire ad esempio il tentativo di ricercare la triplice suddivisione del ricoprimento Dent Blanche (VI) delle Alpi Pennine nel lontano ricoprimento Margna dei Grigioni e nell'ancor più distante ricoprimento Grossglockner degli Alti Tauri? Osservazioni analoghe si potrebbero ripetere per i ricoprimenti del Monte Rosa (V) e del Gran S. Bernardo (IV) delle Alpi occidentali, che nella parte centrale della catena sono rappresentati da elementi tettonici di tutt'altre forme e proporzioni. È quindi tempo ormai di riconoscere l'assurdità di certi esagerati parallelismi, sostenuti da Autori anche insigni, e ciò va detto non solo a proposito delle singole, modeste particolarità strutturali dei vari ricoprimenti, il che è ovvio, ma anche a riguardo delle maggiori unità tettoniche che formano la catena alpina. E se ciò, come si è detto, è vero per le Pennidi, lo deve essere a tanto maggior ragione per le Austridi, le quali, a causa del loro particolare stile tettonico, presentano una molto maggior variabilità e incostanza di forme.

Le considerazioni suesposte e le conclusioni a cui sono giunto nei precedenti lavori sulle Austridi (b. 1-5), mi portano ad ammettere che *la zona austroalpina di sedimentazione abbia subito una diversa evoluzione tettonica, a seconda che si trattava del settore corrispondente alle Alpi Centrali, oppure di quello corrispondente alle Alpi Orientali*. Nel primo settore la zona è stata deformata dall'orogenesi alpina nei due grandi complessi delle Austridi superiori e inferiori, mentre invece nel secondo settore la prosecuzione orientale della stessa zona ha dato luogo ad una sola grande unità tettonica, quella delle Austridi superiori<sup>(1)</sup>. In tal modo alcune caratteristiche formazioni sedimentarie, che nei Grigioni sono tipiche per l'Austroalpino inferiore (per esempio la Saluverbreccie), si ritroverebbero negli Alti Tauri sul fianco rovesciato del complesso Austroalpino superiore. *Rebus sic stantibus*, la Schwarzeckbreccie e la Tarntalerbreccie potrebbero essere stratigraficamente equivalenti ai depositi clastici cretacei dei Grigioni e non esserlo dal punto di vista tettonico. Si comprende da ciò come non sia possibile stabilire un completo e preciso parallelismo tettonico-stratigrafico fra le Austridi delle Alpi Orientali e quelle delle Alpi Centrali.

A sostegno della suesposta concezione posso addurre un altro fatto importantissimo, che ho già lumeggiato in precedenti lavori (b. 2- e 5). Lungo il bordo meridionale della finestra dei Tauri, le Austridi (Tirolidi *nobis*) presentano vasti relitti del loro fianco rovesciato, costituito fra l'altro da terreni del Permiano e del Trias, molto simili se non addirittura identici alle formazioni coeve della contigua zona pennidica. Questa circostanza riesce

(1) Ricordo al lettore che nella mia nuova sintesi del sistema austroalpino (b. 1-4) le Austridi superiori o Tirolidi abbracciano le Tirolidi + le Grigionidi superiori di STAUB e che le Austridi inferiori o Grigionidi si limitano a comprendere le Grigionidi inferiori di STAUB.



del tutto inesplicabile volendo applicare alla geologia degli Alti Tauri i rigidi schemi di R. STAUB e dei suoi allievi, ma rientra nell'ordine normale delle cose se si accettano le nuove vedute esposte nel presente lavoro.

Infatti, se si ammette l'inesistenza dell'Austroalpino inferiore lungo il bordo meridionale della finestra dei Tauri, si deve per necessità riconoscere che in questa zona siamo ormai prossimi alla soglia stratigrafica fra le Pennidi e le Tirolidi (*nobis*) delle Alpi Orientali. Nessuna meraviglia quindi che ivi esista una debole differenza o addirittura un'analogia di *facies* fra i sedimenti permo-triassici di questi due grandi sistemi tettonici. Ciò chiarito, e tenuto presente che il Permo-mesozoico del fianco normale delle Tirolidi (*nobis*) nelle Alpi Orientali presenta di solito la tipica *facies* austroalpina superiore, non apparirà strano che in posizioni tettonicamente intermedie, e cioè nelle parti settentrionali del fianco rovesciato delle stesse Tirolidi, compaiano dei sedimenti <sup>(1)</sup> che per la loro *facies* si rivelano intermedi fra quelli pennidici e quelli austroalpini superiori, accostandosi sotto molti riguardi a quelli caratteristici dei ricoprimenti austroalpini inferiori dei Grigioni. Come si è visto in precedenza, l'idea dell'esistenza del fianco rovesciato delle Austridi (Tirolidi *nobis*) nelle Alpi Orientali, sia pure sotto forma di relitti più o meno importanti, è validamente suffragata dalle ricerche mie e di SANDER per il bordo meridionale e occidentale della finestra dei Tauri, e da quelle di KOBER, di BLESER e di BLATTMANN per il lato settentrionale della finestra stessa (op. cit.) <sup>(2)</sup>.

Veniamo così alla conclusione che, per quanto riguarda i sedimenti permo-mesozoici, le Tirolidi delle Alpi Orientali presentano la caratteristica *facies* austroalpina superiore sul loro fianco normale (p. e. zona della Drava, Ortles, Cime Bianche di Telve-Tribulaun, Alpi Calcaree settentrionali), mentre invece offrono una *facies* per certi aspetti simile a quella austroalpina inferiore dei Grigioni nelle parti settentrionali del loro fianco rovesciato (Tarntalerberge, Radstädtertauern etc.), e infine possiedono una *facies* alquanto analoga a quella pennidica nella parte subradicale del medesimo fianco (orlo meridionale della finestra dei Tauri) <sup>(3)</sup>.

(1) Oltre alla Tarntalerbreccie e alla Schwarzeckbreccie si intendono naturalmente qui compresi anche quei terreni sedimentari dei Tarntalerköpfe e dei Radstädtertauern che mostrano o che potrebbero rivelare delle analogie stratigrafico-litologiche con terreni coevi delle falde austroalpine inferiori dei Grigioni.

(2) Nel suo recente lavoro (b. 18), il BLATTMANN riconosce che la tettonica dei Radstädtertauern è caratterizzata da una successione di pieghe coricate, con i nuclei formati da scisti cristallini e quarziti e con i fianchi superiori e inferiori costituiti da terreni più recenti. Si ha quindi un sistema di pieghe coricate, scorse le une sulle altre e più o meno scagliate, in modo da determinare una complicata alternanza di serie normali e di serie invertite.

(3) In quest'ultimo caso le suesposte considerazioni valgono solo per i sedimenti permo-triassici, poichè finora non vennero ancora scoperti terreni più recenti riferibili in modo sicuro alla parte meridionale del fianco rovesciato delle Tirolidi.

I fatti che ho illustrato e le considerazioni che ne ho tratto valgono a dimostrare che *non bastano le caratteristiche stratigrafiche e tanto meno quelle litologiche per stabilire l'identità di una determinata falda e le omologie sempre dubbie fra ricoprimenti di regioni molto lontane, ma che il solo criterio che ha veramente valore in questi casi è quello geometrico*. Ciò dipende come si è visto dalla circostanza, troppo spesso trascurata, che non sempre i limiti tettonici coincidono con i limiti di *facies*. Molto istruttivo sotto questo riguardo è l'esempio offerto dal ricoprimento V delle Alpi Occidentali, che nei gruppi del M. Rosa e del Gran Paradiso presenta un Trias ridotto, a tipica *facies* pennidica, mentre invece nelle parti meridionali del massiccio Dora-Maira possiede un Trias molto potente e suddiviso, a *facies* alquanto simile a quella austroalpina (b. 16). Se non si facessero intervenire argomenti di altro ordine, bisognerebbe riferire il massiccio Dora-Maira ad un ricoprimento ben distinto da quello del Gr. Paradiso-M. Rosa, se non addirittura ad un altro complesso tettonico! Alcuni anni or sono H. P. CORNELIUS menzionò un fenomeno analogo per la zona del Brianzonese (= ricoprimento del Gr. S. Bernardo, IV), la quale presenta nella sua parte meridionale potenti masse calcareo-dolomitiche del Trias medio e superiore, a carattere austroalpino; questa *facies* « pseudoaustroalpina » non si continua gran che nel senso della direzione della falda, scomparendo infatti verso nord est prima ancora di raggiungere il territorio svizzero (b. 17).

APPENDICE. — Mentre la presente Nota era già in corso di stampa ho ricevuto un interessante lavoro del dr. H. P. CORNELIUS, *Aufnahmebericht... über Blatt Grossglockner (5149)*, « Verhandl. d. geol. Bundesanstalt », 1937, p. 61, che tratta, fra l'altro, della zona di Matrei a sud dei Tauri. Secondo l'insigne geologo viennese, la presenza di sottili lamelle di dolomie, marmo o calcescisti fra il Cristallino antico austroalpino dello Schobergruppe e le quarziti, come pure la circostanza che le scaglie dello stesso Cristallino vengono a contatto meccanico con i termini più recenti (Lias fino a Giuresè superiore) della zona di Matrei, sembrano escludere l'esistenza del fianco rovesciato delle Austridi nella regione da lui studiata. In base a quanto è stato finora osservato nelle altre parti della finestra dei Tauri, credo però di poter ritenere che i fatti messi in luce da CORNELIUS rappresentino una caratteristica relativamente locale, in rapporto con complessi fenomeni di ripiegamento e di scagliamento listrico.

Nell'area abbracciata dal foglio Grossglockner, la zona meridionale di Matrei rivela in parte notevoli analogie di *facies* con i Radstädtertauern e con l'Austroalpino inferiore dei Grigioni. Questa circostanza si accorda benissimo con le conclusioni esposte nella presente Nota. Difatti nulla vieta di estendere al bordo meridionale della finestra dei Tauri i medesimi concetti che ho applicato al bordo settentrionale della finestra stessa. Si viene così a riconoscere che tutt'attorno alla finestra dei Tauri esiste una cintura quasi completa di elementi permo-mesozoici che presentano una *facies* in parte simile a quella austroalpina inferiore, ma che tettonicamente appartengono invece al fianco rovesciato dei ricoprimenti austroalpini superiori (Tirolidi *nobis*).

Volendo sostenere l'esistenza del *ricoprimento* austroalpino inferiore nella finestra dei Tauri, bisognerebbe anzitutto domandarsi da quali masse radicali potrebbero esser derivati gli elementi della predetta cintura. Orbene masse del genere non esistono assolutamente lungo il bordo meridionale-occidentale della finestra, dove le sottili radici delle Tirolidi

vengono talora a contatto diretto con i calcescisti pennidici, in seguito alla totale assenza della zona di Matri (l. s.) (b. 1). Anche presso l'orlo meridionale-orientale della finestra non si trovano masse cristalline sufficienti a rappresentare il corpo principale dell'originario substrato stratigrafico dei Radstädtertauern. Dove sono dunque negli Alti Tauri gli equivalenti degli enormi complessi pretriassici che nei Grigionì formano i nuclei delle falde austroalpine inferiori dell'Err e della Bernina? D'altra parte, con la mia nuova concezione della relativa autoctonia delle Tirolidi a mezzogiorno dei Tauri, rimane assolutamente escluso che al disotto di esse si possano trovare delle grandi masse di Cristallino antico riferibili ai ricoprimenti austroalpini inferiori. Il Mesozoico austriaco, che affiora presso i bordi della finestra dei Tauri, deve quindi appartenere nella sua totalità al fianco rovesciato delle Tirolidi.

MODIFICA alla IV Nota sulla struttura geologica delle Austridi, «Studi Trentini di Scienze Naturali», XVII, 1936, fasc. 3, p. 272, righe 27-29: per un *lapsus calami* ho scritto che le falde austroalpine inferiori sono rappresentate soltanto nella Svizzera occidentale e in Valtellina, mentre in realtà esse sono tipicamente sviluppate nella Svizzera orientale (Grigionì) ed hanno le loro radici nella bassa Valtellina e, con ogni probabilità, anche nella zona d'Ivrea.

BIBLIOGRAFIA. — 1. G. B. DAL PIAZ, *La struttura geologica delle Austridi*. Nota I. *Il sistema austroalpino lungo il bordo occidentale della finestra dei Tauri*, «Atti R. Istituto Veneto di Scienze ecc.», vol. XCV, p. II, 19 gennaio 1936, p. 353. — 2. G. B. DAL PIAZ. *La struttura geologica delle Austridi*. Nota II. *Il sistema austroalpino a sud della finestra tettonica degli Alti Tauri*, «Rendiconti R. Accademia dei Lincei», vol. XXX, ser. VI, 16 febbraio 1936, p. 269. — 3. G. B. DAL PIAZ, *La struttura geologica delle Austridi*. Nota III. *Il sistema austroalpino nelle Alpi Breonie e Venoste e nel massiccio dell'Ortles*. Nuovo schema tettonico delle Austridi della Venezia Tridentina e del Tirolo orientale, «Atti R. Accademia Scienze di Torino», vol. 71, 16 maggio 1936. — 4. G. B. DAL PIAZ, *La struttura geologica delle Austridi*. Nota IV. *Sui rapporti tettonici che intercorrono fra gli elementi austroalpini dei Grigionì e della Valtellina e quelli delle Alpi orientali*. «Studi Trentini di Scienze Naturali», XVII, 1936. — 5. G. B. DAL PIAZ, *Studi geologici sull'Alto Adige orientale e regioni limitrofe*, «Memorie Istituto Geologico di Padova», vol. X, 1934. — 6. A. BIANCHI, *Studi petrografici sull'Alto Adige orientale e regioni limitrofe*, «ibidem». — 7. G. B. DAL PIAZ, *Sui rapporti geologici che intercedono fra la serie delle Cime Bianche di Telve e il complesso del Tribulaun, nella regione del Brennero*, «Atti Accademia Scientifica Veneto-Trentino-Istrian», XXIV, 1933. — 8. R. STAUB, *Der Bau der Alpen*, «Beiträge z., geologisch. Karte d. Schweiz», N. F. 52 L., 1924. — 9. H. DÜNNER, *Zur Geologie des Tauernwestende am Brenner*, «Inaugur. Dissertation», Univers. Zürich, 1934. — 10. B. SANDER, *Erläuterungen zur geologischen Karte Meran-Brizen*, «Schlern-Schriften», Innsbruck 1929. — 11. B. SANDER e W. HAMMER, *Foglio Merano della «Carta geologica delle Tre Venezie» alla scala 1: 100.000 e relative Note illustrative*, Padova 1926. — 12. P. BLESER, *Geologische Studien am Westende der Hohen Tauern, östlich der Brennerlinie*, Luxemburg, 1934. — 13. L. KOBER, *Das alpine Europa*, Berlino 1931. — 14. R. SCHWINNER, *Zur Stratigraphie der Tarntaler und der Radstädter Berge*, «Jahrb. geol. Reichsan.», 85 Bd. 1935, p. 51. — 15. JOOS CADISCH, *Geologie der Schweizer - Alpen*, Beer e Co., Zurigo 1934. — 16. *Carta geologica delle Alpi occidentali* alla scala 1: 400.000 pubblicata dal R. Ufficio Geologico; vedansi anche i relativi fogli geologici alla scala 1: 100.000. — 17. H. P. CORNELIUS, *Zur Vorgeschichte der Alpenfaltung*, «Geologische Rundschau», 1925, pp. 369-370 ecc. — 18. S. BLATTMANN, *Ueberblick über die Tektonik der Radstädter Tauern*, «Zentralblatt für Mineralogie etc.», Abt. B., 1936, p. 47. — 19. E. CLAR, *Zur Stratigraphie und Tektonik der südlichen Radstädter Tauern*, «Anzeig. Ak. d. Wiss. Wien», 1935.



**Mineralogia.** — *La morenosite di Val Malenco*<sup>(1)</sup>. Nota di A. CAVINATO presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. BOERIS.

Il signor Pietro Sigismund di Milano, intelligente collezionista e conoscitore dei minerali di Valtellina, ha raccolte delle incrostazioni verdi sui massi di serpentino ai lati della carrozzabile che da Chiesa porta a Primolo, nell'alta Val Malenco.

Queste incrostazioni mi furono offerte perchè le studiassi. Ho accettato perchè uno studio mi sembrava opportuno data la loro larga diffusione, la loro notevole quantità e l'alta omogeneità che presentavano: e ringrazio dell'offerta il sig. Sigismund.

Esse hanno colore verde-celeste: spessore che arriva sino ad un centimetro; hanno carattere concrezionare tipico, talvolta sono spugnose o bollose sino a cavernose, includono molti frammenti di antigorite le cui dimensioni massime sono di uno millimetri e pochi frammenti di altri minerali. Sono composte di minutissimi cristallini fibrillari, aggregati in fascetti paralleli e talvolta anche radiali.

I singoli cristallini aciculari non hanno mai abito poliedrico, neppure alle estremità libere. Esaminati al microscopio si riconosce che sono molto omogenei: sono tutti rombici, hanno lo stesso angolo degli assi ottici, lo stesso colore, la stessa potenza birefrattiva: questi costanti caratteri corrispondono a quelli della morenosite.

Per sincerarmi sulla natura di queste incrostazioni ne ho fatto l'analisi chimica.

Dapprima ho estratto e analizzato la parte solubile in acqua: poi ho provato se sul residuo vi erano minerali solubili in acidi, ma invano: in ultimo ho analizzato il residuo insolubile.

Dall'analisi della parte solubile in acqua ho avuto i risultati che qui sotto riporto:

$\text{SO}_4 = 35.94 \%$		$\text{SO}_3 = 29.94 \%$
$\text{Ni} = 13.55 \%$	ossia	$\text{NiO} = 17.23 \%$
$\text{Mg} = 3.56 \%$		$\text{MgO} = 5.89 \%$

Scaldando il materiale « grezzo », comprese le sue inclusioni di antigorite e d'altro, ho determinato le seguenti perdite % di peso:

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1937.

in essiccatore il 3.42; a 110° il 29.53; a 300° il 36.63; a 500° il 41.97.

Nel residuo insolubile in acqua ho determinato:

$\text{SiO}_2 = 38.33$ ; Fe, Al, Ti (non separati) = 13.14;  $\text{MgO} = 35.48$ .

Ho pesato g. 2,2960 di materiale « grezzo »: il residuo insolubile in acqua che rimaneva, pesava g. 0,2602: cioè la parte insolubile è 11,32 %. Questo residuo calcinato perdeva il 13 % del suo peso.

Se ammetto che questo 13 % che perde in peso il residuo insolubile sia tutta acqua, il che è la cosa più probabile, e se si tiene conto che il 41,97 % che il materiale « grezzo » perde in peso per riscaldamento è tutta acqua, ne segue che la frazione di acqua spettante alla parte del materiale « grezzo » solubile in acqua è del 47.33 %.

Questa parte solubile in acqua, quando, per i motivi suddetti, le si assegni una tale % in acqua e si tenga conto delle % in  $\text{SO}_4$ , Ni, ed Mg su scritte, risponde con altra approssimazione alla formula



E se ne può concludere che quelle incrostazioni sono di una *morenosite* impura per alquanto Mg.

Non vi è nessuna difficoltà ad ammettere che si tratti di cristalli di miscele in quanto è noto che i due solfati eptaidrati di nichel e di magnesio danno una serie isomorfa ed isodimorfa di cristalli misti (« Rec. des trav. chim. des Pays-Bas », 46° 105-123 1927; « Zeitschr. f. Krist. Referatenteil », 1° 159. 1928. Si veda anche nella stessa « Zeitschr. Referatenteil », 5° 83 1935).

Riassumendo i dati e riferendoli al peso delle croste « grezze » si hanno le seguenti % in peso:

$\text{SO}_4$ = g. 0.7320	31.87 %
Ni = g. 0.2749	11.97 %
Mg = g. 0.0712	3.11 %
$\text{H}_2\text{O}$ = g. 0.9637	41.97 %
Residuo ins. = g. 0.2682	11.32 %
	<hr/> 100.22 <hr/>

Un minerale poco diverso da quello di cui io qui riferisco lo ha descritto anche F. Pisani (« Bull. de la Soc. Fr. de Min. », 1891, p. 48): l'autore dice che era stato raccolto al Breithorn (Zermatt). Indicazioni di altre località dove la *morenosite* è stata trovata e accenni alla sua genesi (del resto facilmente indovinabile), si trovano in Dana e in Doelter IV°, 2°, p. 612.



Ho osservato al microscopio il residuo insolubile ed ho potuto riconoscere che è composto in gran parte di antigorite in lamelle, in granuli ed aciculi. Questo minerale ha colore verdolino chiaro, birefrangenza bassa, carattere ottico negativo, 2V compreso tra  $38^{\circ}$ – $40^{\circ}$ ; sfaldatura facile secondo 010; bisettrice acuta normale a questo piano.

In questo residuo oltre all'antigorite si trovano granellini di magnetite, un po' di limonite, qualche zirconcino.

Ma il minerale di gran lunga prevalente è l'antigorite: questa prevalenza spiega anche i risultati % dell'analisi del residuo: i quali si avvicinano a quelli di una antigorite ferrifera.

Incrostazioni di morenosite ha raccolto anche il Prof. Boeris sui serpentini a Comba Robert, presso Avigliana, e ad Alagna Valsesia sui serpentini affioranti a poca distanza dal paese sulla strada delle miniere d'oro.

Nonostante la sua larga diffusione il minerale non era stato sinora segnalato.

**Biologia.** — *Osservazioni sul parassitismo della « Sclerotinia libertiana » Fuck associata ad altri funghi*<sup>(1)</sup>. Nota di G. BORZINI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. PETRI.

Verso la fine dello scorso anno ho riscontrato un notevole attacco di *Sclerotinia libertiana* Fuck. (*S. sclerotiorum*) (Lib.). Mass., su piante di finocchio (*Foeniculum vulgare* L.) in orti nelle vicinanze di Roma.

La malattia, pur interessando in qualche appezzamento oltre un terzo delle piante, essendo comparsa tardivamente, non ha arrecato in genere un danno grave, limitandosi a colpire le tuniche esterne che potevano eliminarsi senza compromettere il valore commerciale dei bulbi.

Non mancavano però, disseminate negli appezzamenti infetti, piante colpite in modo grave e che ho particolarmente esaminate in laboratorio, riscontrando quasi costantemente su di esse la presenza oltre alla *Sclerotinia*, di fomiceti del genere *Pythium*, di cui ho isolati due tipi presentanti notevoli differenze morfologiche e fisiologiche per cui debbono ascriversi a specie distinte. Mi riprometto di classificarli in un secondo tempo, non avendo fin ora tutti gli elementi per la loro esatta determinazione.

L'infezione da parte di questi *Pythium*, che rivestiva di per sè una modesta importanza nel quadro generale della malattia — restando sopraffatti dalla *Sclerotinia* sullo stesso ospite — mi ha fatto supporre che la loro presenza fosse in qualche modo in rapporto col decorso tipicamente più grave della malattia, riscontrato appunto in questi casi.

(1) Lavoro eseguito nella R. Stazione di Patologia vegetale, Roma.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1937.

In seguito ad inoculazioni artificiali della *Sclerotinia*, associata secondo varie modalità a ciascuno dei *Pythium* isolati od altri funghi, come la *Phytophthora parasitica* Dast. e la *Phytophthora citrophthora* Sm. et Sm., ho ottenuto risultati alquanto singolari e che espongo brevemente.

Dato che la temperatura e l'umidità dell'ambiente hanno grande influenza sul comportamento dei singoli funghi associati <sup>(1)</sup>, è opportuno precisare che nelle mie esperienze le piante inoculate furono mantenute in camera umida ed alla temperatura media di 15,5°.

Inoculando nella stessa ferita il micelio della *Sclerotinia* intimamente mescolato con quello del fungo associato, si osservava un tipico fenomeno di antagonismo, per cui l'infezione della *Sclerotinia* aveva un decorso assai più lento di quello ottenuto inoculando lo stesso fungo da solo. Fenomeni analoghi sono stati segnalati per la *Sclerotinia fructigena* (Pers.) Schroet. e la *Botrytis alii* M. T. Munn. sulle mele <sup>(2)</sup>, e per la stessa *S. libertiana* associata con diversi funghi in piante di arancio e di limone <sup>(3)</sup>. Mescolando gli inoculi osservavo talvolta in seguito la tendenza dei due funghi a separarsi nel parenchima dell'ospite, ed allora l'andamento delle singole infezioni appariva meno ritardato.

Se i funghi venivano associati nella stessa ferita, senza mescolare intimamente i due inoculi, ma ponendo i blocchetti di agar l'uno accanto all'altro, ottenevo di regola invece lo sviluppo indipendente delle due infezioni dipartentesi da punti più o meno opposti della incisione; la rapidità di accrescimento delle macchie era soltanto lievemente inferiore rispetto al caso delle inoculazioni distinte.

Altrettanto è stato constatato da Machacek <sup>(4)</sup> associando la *S. libertiana* ed il *Bacillus carotovorus* Sm.

Praticando invece due incisioni sul bulbo, distanti 4-5 cm. tra loro, in una delle quali introducevo la *Sclerotinia*, e nell'altra uno dei funghi considerati (mettendomi cioè nelle condizioni più probabili a verificarsi in natura, quando si tratti di un attacco contemporaneo o quasi di due parassiti) ho ottenuto dapprima lo sviluppo delle due macchie con rapidità di accrescimento paragonabile a quella rispettivamente ottenuta nelle inoculazioni di controllo. Ma non appena le zone del parenchima invase dai due funghi si erano ravvicinate, verificavo un rapido incremento nell'attività

(1) G. SAVASTANO and H. S. FAWCETT, *A study of decay in Citrus fruits produced by inoculations with known mixtures of fungi at different constant temperatures*. « Journ. of Agric. Res. », XXXIX, 3, pp. 163-198, 1929.

(2) R. S. VASUDEVA, *Studies on the physiology of parasitism. XII. On the effect of one organism in reducing the parasitic activity of another*. « Ann. of Botany », XLIV, 175, pp. 557-573, 1930.

(3) G. SAVASTANO and H. S. FAWCETT, loc. cit.

(4) S. E. MACHACEK, *Studies on the association of certain phytopathogenes*. « Twentieth Ann. Rept. Quebec Soc. Protect. Plants ». 1927-1928, pp. 16-63, 14 diags. 1928.

patogena della *Sclerotinia* che rapidamente invadeva tutta la pianta, circoscrivendo ed arrestando completamente lo sviluppo dell'altro fungo. I tessuti della pianta si disorganizzavano rapidamente e si riducevano in un ammasso di sclerozî.

Le piante, inoculate alla stessa data con la sola *Sclerotinia*, presentavano i tessuti ancora notevolmente consistenti e l'infezione era localizzata in una porzione più o meno ampia del bulbo, senza interessare i piccioli carnosì e le foglie, come avveniva nel caso precedente.

In queste prove si sono dunque verificati fenomeni di antagonismo e di virulentazione della *Sclerotinia* a seconda delle modalità con cui i funghi venivano associati. Questi fenomeni non appaiono in rapporto alla patogenicità dei vari funghi considerati, tenendo presente che inoculati da soli, uno dei *Pythium* e le due specie di *Phytophthora* hanno rivelato una scarsissima attività patogena per le piante di finocchio.

I risultati ottenuti in queste prove sono stati confermati nel complesso seminando i funghi e seguendo le stesse modalità citate, su agar finocchio, in scatole Petri mantenute a 25°, per quanto sia dimostrato che inoculazioni di miscele di funghi su di una pianta ospite oppure in culture artificiali, possono dare risultati molto diversi <sup>(1)</sup>. Per altro, seminando i due funghi a 4 centimetri di distanza nella stessa scatola, ho ottenuto uno sviluppo della *Sclerotinia* maggiore nel caso della associazione con le specie di *Phytophthora* che non con i *Pythium*, pur ottenendosi anche in questi casi uno sviluppo superiore della *Sclerotinia* rispetto al controllo. Questi dati si riferiscono al periodo di tempo in cui le culture più sviluppate arrivano ad interessare tutta la superficie libera dell'agar. Più tardi il micelio aereo della *Sclerotinia* poteva diffondersi più o meno al di sopra della superficie occupata dagli altri funghi.

In seguito alle osservazioni sulle piante infettate in condizioni naturali ed ai risultati delle prove sopra substrato nutritivo artificiale, è logico ritenere che la eccezionale comparsa di infezioni di *Pythium* verificata su piante di finocchio, abbia contribuito alla comparsa od alla diffusione del mal degli sclerozî che — da quanto mi risulta — è nuovo in Italia su queste piante.

Non sembrerebbe pertanto superfluo tener conto, nel caso di diffusioni epidemiche della *Sclerotinia libertiana* su alcuni dei numerosissimi ospiti che può attaccare, della eventuale presenza di altri funghi, specialmente di *Pythium*, molto diffusi nel terreno. Questi funghi pur comportandosi più spesso come saprofiti, non possono mancare in particolari condizioni di ambiente di rilevare una attività parassitaria, sia pure modesta.

A tutti i possibili fattori che favoriscono l'attacco o la diffusione della *Sclerotinia libertiana*, come la suscettibilità della pianta, la presenza sull'ospite

(1) S. E. MACHACEK, loc. cit.

di sostanze organiche in decomposizione, come ebbe ad osservare da tempo il prof. Petri nel caso del mal degli sclerozi dei fagioli <sup>(1)</sup> ecc. si dovrebbero aggiungere quelli derivanti dalla virulentazione del parassita in seguito al contatto con i prodotti del metabolismo di un altro fungo associato. Ciò concorrerebbe a spiegare come la *Sclerotinia*, fungo polifago per eccellenza, si diffonda epidemicamente soltanto ad intervalli piuttosto ampi, nonostante la presenza immancabile di numerosi sclerozi nel terreno dopo una grave infezione, le condizioni particolarmente favorevoli allo sviluppo saprofitario del fungo nei terreni ortivi, ricchi di sostanze organiche, e dove la rapida e varia rotazione delle culture — quasi tutte suscettibili alla malattia — tenderebbe a creare, specie in alcuni periodi dell'anno, condizioni assai propizie alla comparsa del mal degli sclerozi.

**Fisiologia** (Chimica biologica). — *Ulteriore contributo allo studio dell'ipocloremia post-operatoria* <sup>(2)</sup>. Nota di A. SALVATORI, presentata <sup>(3)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

In un nostro precedente lavoro sull'argomento <sup>(4)</sup>, mettemmo in evidenza l'importanza di uno studio approfondito e dettagliato dei rapporti tra iperazotemia e ipocloremia post-operatorie, per penetrare più intimamente la genesi ed il significato biochimico di quest'ultima.

Allo stato attuale della questione, non è possibile decidere se tra le due manifestazioni vi sia un rapporto di causa ad effetto, o se ambedue procedano da una stessa causa. Nessun dubbio, che la somministrazione di cloruro di sodio in dosi massive, fa retrocedere le più minacciose iperazotemie post-operatorie, come pure nessun dubbio, che se il sale viene somministrato prima dell'intervento, non si osserva iperazotemia nel decorso post-operatorio, e se anche si osserva, è sempre di modica entità.

Bisogna pur dire però, che non raramente nel decorso post-operatorio si sono osservate iperazotemie anche notevoli, con cloremie del tutto normali, e più spesso, ipocloremie anche importanti senza apprezzabile iperazotemia. Ci sembra allora che questi due ordini di fatti, così egualmente bene stabiliti che contraddittori, debbano indurre ad abbandonare l'idea di un'iperazotemia da ipocloremia o viceversa, e ad istradare lo studio dell'ipocloremia post-operatoria decisamente sulla seconda ipotesi sopra affacciata, e cioè,

(1) L. PETRI, *Di una forma speciale della « malattia degli sclerozi » nei fagioli.* « Atti della R. Acc. dei Lincei », XIII; 2° sem., 1904, pp. 479-482, Roma.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(3) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(4) A. SALVATORI e V. PALUMBO, *Contributo allo studio dell'ipocloremia post-operatoria.* « Fisiologia e Medicina », vol. VII, 1936.



dipendere l'ipocloremia e l'iperazotemia post-operatoria da uno stesso fattore, direttamente o indirettamente emergente dall'atto operatorio.

Su questa strada sembra abbiano voluto avviarsi anche Chabannier e Lobo Onel <sup>(1)</sup>, nel formulare l'ipotesi che « il primum movens degli accidenti post-operatori, consisterebbe nella liberazione, a livello dei tessuti traumatizzati per l'atto operatorio, di sostanze azotate tossiche, sia che queste facciano normale parte del succo cellulare, o che siano prodotte da un'alterazione di origine infiammatoria o infettiva ». Alla luce di questa ipotesi, come ci si può spiegare l'ipocloremia post-operatoria? Chabannier e Lobo-Onel pensano che le sostanze azotate tossiche, liberatesi a livello dei tessuti traumatizzati per l'atto operatorio, determinino un afflusso di cloro dal sangue ai tessuti stessi, da cui l'ipocloremia. Questa interpretazione trova interessanti conferme sia in osservazioni sull'uomo e sia in esperimenti sul coniglio. Duval <sup>(2)</sup> in un paziente con una grave contusione muscolare, trovò nel muscolo contuso un tenore in cloro (espresso come NaCl) del 4.34 per mille. Legueu, Palazzoli, Fey e Lebert <sup>(3)</sup>, in un malato che presentava uno strappo dei muscoli del braccio, osservarono che il muscolo traumatizzato aveva un tenore in cloro (espresso in NaCl) del 5,38 per mille. Questi valori sono molto superiori a quelli normali, giacchè i dati che più comunemente si trovano riportati in molti trattati di chimica biologica sono dell'ordine dell'1 per mille. Il Rondoni <sup>(4)</sup> per es. dà 1.02 per mille. Per effetto del trauma si ha dunque un accumulo di cloro a livello dei tessuti traumatizzati. Non si può dire però, che nei casi ora citati, questo accumulo di cloro si sia prodotto a spese del cloro del sangue, mancando i dati della cloremia.

Questi ultimi autori <sup>(5)</sup> però, in un lavoro sperimentale sul coniglio, hanno studiato la questione in maniera completa, determinando cioè il cloro in organi o muscoli traumatizzati e nel sangue, e in questo sia prima che dopo il trauma, in modo da avere un preciso termine di confronto. I traumi furono realizzati chirurgicamente, senza anestesia, su organi e muscoli. Dopo qualche tempo l'animale fu sacrificato, e allora gli autori determinarono il cloro sia sul muscolo od organo traumatizzato che sui rispettivi simmetrici normali. I risultati di questa interessante ricerca sono oltremodo dimostrativi, come può rilevarsi dai seguenti dati che riportiamo dal lavoro originale, e che rappresentano le quantità di cloro trovate, in grammi di NaCl per mille di sostanza fresca.

(1) CHABANNIER e LOBO-ONEL, *Hypochlorémie et accidents post-opératoires*. Masson Edit., 1934, p. 126.

(2) P. DUVAL, *Azotémie post-opératoire*. « Soc. Nat. de Chir. », 14 giugno 1933, p. 975.

(3) Citati da CHABANNIER e LOBO-ONEL, loc. cit.

(4) P. RONDONI, *Elementi di Biochimica*. « Unione Tipografica Editrice Torinese », 1933, p. 4.

(5) F. LEGUEU, B. PALAZZOLI, FEY e LEBERT, « *Le déséquilibre des chlorures dans le choc opératoire*. » Bull. Acc. Méd., 27 giugno 1933, p. 879.



	Sangue		Muscoli	Reni
	Plasma	Globuli		
avanti trauma	6.20	2.90	Normale 0.95	Normale 4.83
dopo       »	6.10	2.80	Traumat. 3.41	Traumat. 7.32
avanti trauma	6.50	2.65	Normale 1.31	
dopo       »	6.00	2.60	Traumat. 4.94	

Queste esperienze sono state eseguite nel presupposto che il cloro si trovasse egualmente distribuito in organi e muscoli simmetrici. Riconosciamo che tale presupposto poteva presentarsi come ovvio; però, riflettendo che il cloro si trova molto irregolarmente distribuito nei vari tessuti, noi, in altro lavoro, nel proposito di ripetere sul ratto le esperienze ora illustrate, abbiamo prima istituito una serie di ricerche sistematiche per formarci un'idea precisa al riguardo. Da queste nostre ricerche preliminari è risultato, che in realtà il cloro si trova in maniera rigorosa egualmente distribuito in organi e muscoli simmetrici, come può rilevarsi dai seguenti dati che stralciamo dai protocolli del nostro citato lavoro, e che rappresentano le quantità di cloro trovate, espresse in grammi di NaCl per mille di sostanza fresca:

	Rene	Polmone	1/2 Encefalo	Testicolo	Muscoli della coscia	Muscoli dell'addome
Destro	4.2	4.1	2.2	4.2	1.6	1.1
Sinistro	4.2	4.4	2.3	4.0	1.7	1.1

Benchè le nostre esperienze si riferiscano al ratto, crediamo che, data la loro natura, il risultato di esse possa applicarsi al coniglio. Possiamo dunque ritenere, che effettivamente in seguito a trauma, si ha una migrazione di cloro dal sangue ai tessuti traumatizzati. Con ciò un'importante conseguenza dell'ipotesi di Chabannier e Lobo-Onel sopra riportata, avrebbe avuto una brillante conferma sperimentale, conferma che noi ci proponiamo di verificare nel ratto.

Resta ora da verificare sperimentalmente l'assunto principale dell'ipotesi stessa, e cioè, dipendere la migrazione di cloro dal sangue ai tessuti traumatizzati e quindi l'ipocloremia, dalla presenza di sostanze azotate tossiche a livello dei tessuti traumatizzati stessi.

Ora, se l'ipotesi è giusta, noi pensiamo, che introducendo nell'animale sostanze azotate tossiche, presumibilmente simili a quelle ora accennate, si dovrebbe osservare ipocloremia. È proprio questo che noi abbiamo fatto e che forma l'oggetto precipuo della presente Nota.

Concetto direttivo del nostro lavoro è stato il seguente: l'atto operatorio importa incisione, slabbramento, pressione, etc., dei tessuti, dunque messa in libertà di succo cellulare. Poichè nella maggior parte degli interventi

oltre che l'organo oggetto dell'operazione, questi traumi interessano necessariamente anche i muscoli, questo succo cellulare conterrà certamente sostanze provenienti dai muscoli. Allora, come primo materiale azotato ad azione tossica, abbiamo pensato dovesse usarsi succo o estratto muscolare. In un secondo tempo, come è ovvio, si dovrà sperimentare con succo o estratto di organi, che più frequentemente sono sottoposti ad interventi operatori, e succo di detti organi e muscoli insieme. In tutto ciò che abbiamo ora detto, si è implicitamente ammesso che il succo o l'estratto muscolare siano tossici. A questo riguardo citiamo le ricerche di E. Quenu <sup>(1)</sup> e Duval e Grigaut <sup>(2)</sup>, dalle quali risulta, che il succo muscolare, come quello di fegato, reni, intestino, etc., hanno una marcata tossicità, che si manifesta anche quando un'autolisi possa essere esclusa. Si deve allora pensare che l'azione tossica è dovuta a sostanze normalmente contenute nelle cellule dei diversi tessuti e liberate dall'azione meccanica esercitata sui tessuti stessi.

Dalle ricerche ora citate risulta inoltre, che almeno una frazione di queste sostanze, concorre a formare l'azoto non proteico dei tessuti. Infatti si è osservato che nei tessuti traumatizzati, nei muscoli per es. l'azoto non proteico diminuisce, nel mentre si nota aumento di esso nel plasma. D'altra parte gli autori sopra citati hanno constatato uno stretto parallelismo tra aumento dell'azoto non proteico del plasma ed evoluzione dei fenomeni ossici. Risulta dunque attendibile ritenere, che i muscoli contengano sostanze azotate tossiche, che si mettono in libertà per azione meccanica esercitata su di essi.

#### PARTE SPERIMENTALE.

Il materiale azotato per le nostre esperienze fu preparato con la seguente tecnica: una certa quantità di muscoli di ratto prelevati in genere dalla coscia, dalla gamba e dalla regione glutea, venivano pestati in mortaio di porcellana, fino ad ottenere una poltiglia molto densa e fortemente vischiosa. Si estraeva allora ripetutamente con acqua distillata e si filtrava prima attraverso cotone idrofilo e poi per carta da filtro rapida. Il filtrato si presentava come un liquido torbido, per poco tempo discretamente omogeneo. Infatti nel liquido lasciato a se stesso, non tardava a formarsi un coagulo che in parte ritornava fluido per sbattimento. Su questo liquido di volta in volta che veniva preparato, abbiamo determinato l'azoto totale, l'azoto non proteico e l'azoto amminico. Per le prime due determinazioni abbiamo usato

(1) «Soc. Nat. de Chir.», 5 dicembre 1917 e 26 marzo 1919.

(2) DUVAL e GRIGAUT, *L'intoxication par plaïves de guerre. La désintégration azotée des tissus traumatisés*. «Soc. Nat. de Chir.», 16 ottobre 1918, p. 1506; *La Théorie chimique du shock toxique et la toxémie microbienne*. «Soc. Nat. de Chir.», 26 marzo 1919, p. 565; *L'intoxication par les plaïves de guerre*. «Compt. R. Acc. Scien.», 1918, CLXVII, 562.

il metodo di Kjeldahl, servendoci dell'apparecchio di Parnas e Wagner. Per la determinazione dell'azoto amminico abbiamo usato l'apparecchio di Van Slyke.

Come animali da esperimento ci siamo serviti di ratti adulti, di taglia la più grande possibile, tenuti ad alimentazione mista per tutta la durata delle esperienze. Su ogni ratto abbiamo determinato per tre giorni consecutivi sia l'azoto non proteico che il cloro del sangue, in modo da avere un sicuro dato medio normale. Al 3° giorno, eseguito il prelevamento del sangue per i valori normali, abbiamo iniettato profondamente nella regione glutea, 4 cc. di estratto muscolare acquoso, preparato di fresco con la tecnica sopra descritta. L'animale è stato poi seguito per altri tre giorni, determinando nel sangue ancora l'azoto non proteico e il cloro.

Il sangue per tutte queste determinazioni, venne prelevato facendo prima un piccolo taglio con una comune lama da barba, sulla punta della coda, e poi spremendo leggermente la vena caudale per tutta la sua lunghezza. Si otteneva così facilmente qualche goccia di sangue che veniva fatto assorbire da una listarella di carta da filtro senza ceneri, precedentemente bagnata con soluzione di ossalato di potassio e poi essiccata a temperatura ambiente. La listarella veniva poi sistemata in un piccolo pesafiltro munito di tappo a tenuta perfetta. Il tutto veniva pesato prima e dopo il prelevamento, e per differenza si aveva il peso del sangue prelevato, che in tutte le nostre esperienze, ha oscillato dai 30 ai 60 mg. Dopo ciò in uno dei pesafiltro si versavano 2 cc. di acqua distillata e con una bacchettina di vetro la listarella di carta da filtro imbevuta di sangue si riduceva in finissima poltiglia. Allora si aggiungevano  $1-1\frac{1}{2}$  cc. di acido tricolroacetico al 20 %, si agitava accuratamente e si lasciava in riposo per 3 o 4 ore, agitando di tanto in tanto. Passato tale tempo, si filtrava per carta ricevendo il liquido in un palloncino che noi, partendo da una comune provetta da batteriologia, avevamo forgiato alla maniera degli ordinari palloni da Kjeldhal, e nel quale già si trovavano 1 cc. di acido solforico concentrato e qualche mg. di solfato di rame. Si procedeva poi alla Kjeldhalizzazione con le usuali norme. Ottenuta la completa trasformazione dell'azoto non proteico del sangue in solfato di Ammonio, il liquido solforico veniva diluito prima con acqua distillata e poi con soluzione concentrata di idrato sodico, badando però che si avesse sempre reazione acida. Dopo raffreddamento si travasava quantitativamente nell'apparecchio di Parnas e Wagner per lo spostamento dell'ammoniaca, che nelle prime esperienze veniva raccolta o su 3 cc. di acido cloridrico N/100 e poi determinata per via titrimetrica, o su 5 cc. di acido solforico opportunamente diluito, contenuto in un palloncino tarato da 20 cc., e determinata poi per via colorimetrica previa nesslerizzazione.

Abbiamo voluto usare nelle prime esperienze tutti e due i metodi ora citati, per maggiore controllo, dato che non ci è stato possibile trovare nella letteratura, determinazioni su così piccole quantità di sangue. Avendo però

osservato ripetutamente che sia con l'uno che con l'altro metodo, i valori normali di uno stesso ratto, oscillavano intorno ad uno stesso valore medio, in seguito abbiamo usato soltanto il metodo titrimetrico, che si presenta più semplice e più rapido.

Per quanto riguarda la purezza dei reagenti, abbiamo fatto alcune prove in bianco, determinando il fattore di correzione che è risultato oscillante tra mg. 0.057 e mg. 0.052 di azoto, con un valore medio ricavato da 5 determinazioni, di mg. 0.0496, che noi abbiamo arrotondato a 0.05. Da tutti i valori delle nostre determinazioni nel sangue, abbiamo quindi detratto questa ultima cifra.

Tenuto conto che siamo partiti da una quantità piccolissima di sangue, i valori normali da noi ottenuti con la tecnica sopra descritta, riportati a 100 g. di sangue, sono buoni, benchè un po' alti, come del resto ci si doveva aspettare, essendo noto che anche partendo da 1-2 cc. di sangue si ottengono valori alquanto alti.

Per la determinazione del cloro, il sangue contenuto nel pesafiltri veniva quantitativamente passato in un becher da 50 cc. insieme alla listarella di carta da filtro imbevuta di sangue, la quale veniva ridotta in finissima poltiglia. Si aggiungevano poi 1 o 2 gocce di permanganato saturo, 1 cc. di nitrato di argento N/100, 20 gocce di acido nitrico concentrato e 10 gocce di allume ferrico. Si riscaldava a modico calore fino a completa decolorazione, e dopo raffreddamento si titolava con solfocianato.

Questa tecnica è risultata di una precisione massima, tanto che i dati normali con essa ottenuti, sono risultati sensibilmente uguali a quelli da noi stessi determinati su 2-3 g. di sangue.

Abbiamo sperimentato in complesso su 10 ratti, iniettando profondamente nella regione glutea, sempre 4 cc. di estratto muscolare preparato nella maniera precedentemente descritta, contenenti quantità di azoto da 1.78 a 6.72 mg. Diamo in una tabella i risultati ottenuti. I dati dell'azoto non proteico e del cloro nel sangue prima dell'iniezione sono la media delle tre determinazioni eseguite nei tre giorni precedenti l'iniezione stessa. I dati, invece, ottenuti dopo l'iniezione sono riportati, come è ovvio, singolarmente in ordine di tempo.

Dobbiamo dire inoltre, che il cloro è espresso in grammi di NaCl per mille di sangue, mentre l'azoto non proteico è espresso in mg. di azoto per 100 g. di sangue.



Ratto numero	Azoto iniettato mg.			Cloro o/oo		Azoto non proteico mg. o/oo g.		Ratto numero			Azoto iniettato mg.			Cloro o/oo		Azoto non proteico mg. o/oo g.	
	in tutto	non proteico	ammi- nico	prima della iniezione	dopo la iniezione	prima della iniezione	dopo la iniezione				in tutto	non proteico	ammi- nico	prima della iniezione	dopo la iniezione	prima della iniezione	dopo la iniezione
1	1.78	0.68	0.13	6.33	6.30	125	130	6	2.56	0.79	0.28	4.83	5.8	110	115		
					6.40		145						4.9		145		
					5.04		122						5.2		115		
2	2.00	0.84	0.20	5.60	5.60	88	115	7	3.66	1.16	0.52	6.00	5.30	73	310		
					6.00		90						6.10		200		
					5.89		95						5.90		180		
3	2.22	0.76	0.20	5.42	5.80	90	104	8	3.66	1.16	0.52	5.45	5.50	170	180		
					5.60		115						5.40		132		
					5.70		115						4.95		155		
4	2.24	0.82	0.21	6.15	6.00	160	180	9	6.72	2.01	0.64	5.40	5.60	120	125		
					6.20		210						5.40		140		
					5.33		170						5.00		130		
5	2.54	0.75	0.19	5.80	5.50	125	120	10	6.72	2.01	0.64	6.40	5.80	110	100		
					5.50		140						5.30		130		
					5.10		130						5.60		300		



Osservando i dati qui sopra riportati, si nota subito che in 7 ratti su 10 si è ottenuta ipocloremia. Questa però si è osservata tardivamente, al minimo dopo 48 ore, nella maggior parte dei casi dopo 72 ore dall'iniezione, contrariamente a quanto si osserva nell'uomo, nel quale l'ipocloremia si stabilisce nelle 24 ore successive all'intervento. Questa diversità potrebbe spiegarsi, a nostro parere, oltre che, naturalmente, con la diversità del soggetto e delle condizioni sperimentali generali delle due ricerche, anche con la diversità della via e della maniera di introduzione delle sostanze azotate tossiche nei due casi. Ma a questo riguardo, potremo formarci un'idea più fondata quando, dopo aver iniettato estratto o succo di fegato, intestino, reni ecc., sempre nella regione glutea, ripeteremo le stesse esperienze portando l'iniezione nella cavità addominale e endovena.

Un altro fatto che si nota osservando i dati della tabella, è la mancanza di qualsiasi proporzionalità tra la quantità di azoto non proteico iniettato, secondo Legueu e Duval espressione della quantità di sostanza tossica introdotta, e l'entità dell'ipocloremia osservata. Infatti nei ratti n. 4 e n. 5 l'azoto non proteico iniettato è stato di mg. 0.82 e 0.75 rispettivamente, e la cloremia ha avuto uno scarto, sempre rispettivamente, di 0.85 e 0.70 per mille. Nei ratti n. 9 e 10 con una quantità di azoto non proteico iniettato, quasi tripla, si è avuto uno scarto relativamente più piccolo, e cioè di 0.40 e 0.70 per mille rispettivamente. Egualmente nessuna proporzionalità si nota tra ipocloremia e aumento dell'azoto non proteico del sangue dopo l'iniezione. Infatti nei ratti 1, 5, 9 per es. l'azoto non proteico del sangue ha subito delle piccole variazioni rispetto al valore medio determinato prima dell'iniezione, mentre il cloro ha subito notevoli diminuzioni.

Viceversa nel ratto n. 7, nel quale si è avuto un notevolissimo aumento nell'azoto non proteico del sangue dopo l'iniezione, si è riscontrata una ipocloremia minima.

Per quanto riguarda il comportamento dell'animale nel periodo susseguente all'iniezione, dobbiamo dire che nei primi due giorni esso si è dimostrato un po' torpido, con tendenza a isolarsi in un angolo della gabbia e rimanervi immobile per lunghe ore, nella posizione caratteristica del ratto che dorme. Agli stimoli meccanici per toglierlo da questa sua posizione, rispondeva con minore vivacità di quella che si osserva con gli stessi stimoli in ratto normale. Al terzo giorno dopo l'iniezione l'animale appariva del tutto normale. Feci e urine per quantità e aspetto, normali. Alimentazione per qualità e quantità normale.

Quando avremo completato le presenti ricerche, sperimentando come abbiamo sopra detto, con succo o estratto di fegato, reni, intestino ecc., e succo o estratto di questi organi e muscoli insieme, discuteremo a fondo i risultati ora ottenuti, anche in rapporto alla forma dell'azoto introdotto.

Per ora, a conclusione del presente lavoro, ci contentiamo di poter affermare:

I) che in seguito ad iniezione di estratto muscolare acquoso, si è ottenuta ipocloremia in 7 ratti su 10.

II) che in tutti i ratti posti in esperienza si è osservato un aumento, di grado più o meno notevole, dell'azoto non proteico del sangue, dopo l'iniezione del suddetto estratto muscolare.

III) che nessun rapporto quantitativo è risultato tra la quantità di azoto non proteico iniettato e l'entità dell'ipocloremia osservata. Egualmente nessun rapporto è stato notato tra entità dell'ipocloremia stessa e aumento dell'azoto non proteico del sangue dopo l'iniezione.

IV) che l'ipotesi di Chabannier e Lobo-Onel, sulla possibilità che l'ipocloremia post-operatoria, possa essere prodotta da sostanze azotate tossiche liberatesi a livello dei tessuti traumatizzati per l'atto operatorio, trova riscontro e appoggio nei risultati sperimentali da noi ottenuti; dimodoché si dimostra fin da ora utile perseguirla in tutte le sue conseguenze.

N. P.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Seduta dell'8 maggio 1937 - Anno XV*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Biologia.** — *Trasmissione del « virus » dell'arricciamento della vite attraverso i tessuti di una varietà resistente.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. L. PETRI.

La pratica viticola ha posto in evidenza il fatto che reinnestando certe varietà di vite sopra altre colpite dall'arricciamento, si ottiene nuovamente una normale produzione non risentendo la varietà reinnestata gli effetti della malattia.

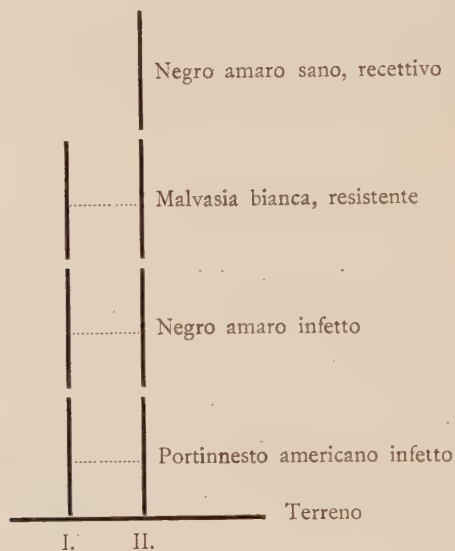
In Puglia sono la *Malvasia bianca* ed il *Somarello* che hanno mostrato questa loro particolare resistenza all'arricciamento, in Sicilia è la varietà ad uva bianca, chiamata *Pagadebito*, che presenta una simile preziosa proprietà. Sino dal 1934 ho istituito delle esperienze d'innesto per stabilire se la resistenza si espliciti in simili casi solo col non manifestare i sintomi esterni della malattia, come la dentellatura o laciniatura pronunziate delle foglie, l'accorciamento degli internodi e la colatura, presentando invece i sintomi interni (cordoni endocellulari), oppure col non manifestare tanto i sintomi esterni come quelli interni.

Era anche interessante stabilire se la varietà resistente permettesse il passaggio del virus attraverso i propri tessuti o lo arrestasse, distruggendolo, o ne attenuasse o ne modificasse l'azione patogena. Simili ricerche sono in relazione al problema di trovare un vitigno o un'altra ampelidea dotata di affinità d'innesto per la vite e immune dall'arricciamento, la quale, intercalata

(1) Presentata nella seduta dell'8 maggio 1937.

fra il soggetto americano e la marza di vite europea, preservi questa dagli effetti dannosi della malattia, permettendo nello stesso tempo al portinnesto di usufruire dei prodotti dell'attività fisiologica normale della parte aerea della pianta trimembre, ciò che determinerebbe una più prolungata resistenza del soggetto agli effetti dell'arricciamento.

Sopra viti di *Negro amaro*, innestate su soggetto americano ed affette da arricciamento, è stata reinnestata nel 1934 la *Malvasia bianca* e sopra alcune di queste piante nel 1935 è stato reinnestato il *Negro amaro*, prelevando le marze da viti sanissime (schema II). Si è ripetuto in queste esperienze lo stesso metodo seguito da Schaffnit e da Müller<sup>(1)</sup> per sperimentare sulla



eventuale conduzione diretta (*direkte Durchleitung*) del virus del mosaico di tabacco e del mosaico del pomodoro in una pianta trimembre, quando fra il soggetto e la marza terminale, suscettibile, viene intercalata una marza appartenente a una pianta immune. Un simile metodo è stato adoperato anche da Salaman e Le Pelley<sup>(2)</sup>, i quali però non intercalavano una marza di pianta immune o resistente, ma di una pianta suscettibile, lasciandole le foglie o togliendole, volendo stabilire l'influenza sul virus dei prodotti elaborati nelle foglie.

Nelle mie esperienze le foglie della *Malvasia bianca* erano state lasciate in posto per un periodo vegetativo, di poi la marza di *Malvasia* era stata reinnestata con *Negro amaro* privandola delle foglie.

(1) E. SCHAFFNIT u. W. MÜLLER, *Wechselseitige Virusübertragungen innerhalb der Familie der Solanaceen*. «Phytopathologische Zeitschrift», Bd. III, 1931, pp. 105-136.

(2) In «Roy. Soc. Proc.», ser. B, vol. 106, 1930, pp. 50-83, 140-175.

Nell'estate del 1936 le marze di *Negro amaro*, reinnestate sulla *Malvasia bianca*, presentavano tutti i sintomi esterni dell'arricciamento mentre la *Malvasia bianca* innestata su *Negro amaro* ammalato e non reinnestata con quest'ultima varietà (schema I) non presentava alcun sintomo della malattia. Si è proceduto allora alla ricerca dei cordoni endocellulari nel legno di tutte le piante trimembri e quadrimembri. Essi sono stati trovati facilmente nel portinnesto americano e nel *Negro amaro*, tanto in quello sul quale era innestata la *Malvasia bianca*, come di quello reinnestato su quest'ultima varietà, la quale non presentava affatto i cordoni endocellulari. Anche la *Malvasia bianca* reinnestata su *Negro amaro* ammalato e non reinnestata a sua volta con *Negro amaro* (schema I) non presentava i cordoni endocellulari e ciò in evidente rispondenza all'assenza di deformazioni delle foglie e dei tralci.

Come primo risultato di queste esperienze si deve ammettere che esse confermano ancora una volta e dimostrano in modo definitivo che la formazione dei cordoni endocellulari costituisce un sintomo specifico interno dell'arricciamento, in secondo luogo esse dimostrano che il virus, causa della malattia, è trasmesso integralmente dalla vite infetta alla marza recettiva, attraverso i tessuti della marza intermedia di varietà resistente, senza che in questa alcuna reazione apprezzabile accenni a un'azione locale patogena del virus. È inoltre ammissibile che il virus non sia reso inattivo né sia attenuato da un'azione distruggitrice o modificatrice proveniente dai tessuti della varietà resistente anche se provvista di foglie.

A questo riguardo è da osservare che nelle mie esperienze non è stata fatta la prova di reinnestare il *Negro amaro*, recettivo, sulla marza intermedia di *Malvasia bianca* lasciando questa provvista di foglie. Non si può affermare quindi che la resistenza di questa varietà dipenda o non da sostanze protettive elaborate nelle foglie e non si può neppure affermare o negare una possibile attenuazione o neutralizzazione del virus in simili condizioni. In attesa che questa esperienza sia effettuata è lecito ritenere che la *Malvasia bianca*, come altre varietà resistenti all'arricciamento, non reagiscano al virus, di cui sono vettrici, mascherandone la presenza, un fenomeno che è ben noto per numerosi casi simili riscontrati specialmente nelle virosi delle solanacee. Da un punto di vista puramente viticolo, la distruzione o l'attenuazione del virus da ottenersi mediante l'intercalazione di una marza di varietà resistente, provvista di foglie, non potrebbe avere probabilmente una pratica applicazione o per lo meno richiederebbe particolari accorgimenti colturali non in tutti i casi realizzabili.

Schaffnit e Müller dedussero dalle loro esperienze d'incisione anulare sulla marza intermedia che il passaggio del virus avveniva attraverso il floema, perchè nelle piante trimembri con marza intermedia, a cui era stato tolto un anello di corteccia, la marza suscettibile sovrainnestata rimaneva sana, deducendone così che l'interruzione dei tessuti corticali aveva impedito



il passaggio del virus che evidentemente non era trasmissibile attraverso il cilindro legnoso.

L'incisione anulare, oltre ai tessuti corticali, asporta in parte ed uccide il cambio, per cui non si può escludere che il passaggio del virus possa avvenire anche o esclusivamente attraverso il cambio, specialmente nel caso dell'arricciamento della vite, che presenta tutti i caratteri di una malattia dei meristemi, come lo dimostra l'originarsi dei cordoni endocellulari nelle cellule embrionali.

L'utilità pratica di ricerche sperimentali come quelle di cui ho brevemente riferito deriva non tanto dalla possibilità di aumentare il numero di quelle viti che innestate su soggetto americano affetto da arricciamento, possono continuare a dare una normale fruttificazione per un tempo più o meno lungo, quanto dalla probabilità di poter continuare a coltivare varietà pregiate, ma suscettibili al virus, quando fossero reinnestate su marze intermedie di varietà o specie refrattarie e neutralizzanti l'azione dannosa dell'arricciamento. La soluzione di un simile problema è certamente irta di difficoltà, ma non si può escludere che essa possa esser raggiunta insistendo nelle ricerche.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Sulla formula d'inversione di Widder.* Nota di F. TRICOMI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

1. Una delle più semplici formule finora conosciute per l'inversione della trasformazione di Laplace:

$$(1) \quad f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \equiv \mathcal{L}_s [F(t)],$$

è quella recentemente trovata da G. D. WIDDER<sup>(2)</sup>, che — sotto le poco restrittive ipotesi che la funzione  $F(t)$  sia L-integrabile in ogni intervallo finito dell'asse  $t$  positivo, e che l'integrale (1) non sia dappertutto divergente — fornisce «quasi dappertutto»  $F(t)$ , per  $t > 0$ , sotto forma del seguente limite:

$$(2) \quad F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{n}{t} \right)^{n+1} f^{(n)} \left( \frac{n}{t} \right),$$

dove  $f^{(n)}(s)$  denota la derivata  $n$ -esima della funzione (analitica)  $f(s)$ .

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) G. D. WIDDER, *The inversion of the Laplace integral and the related moment problem.* «Trans. American Math. Soc.», 36 (1934), pp. 107-200.

Il risultato è assai elegante e così pure il semplice procedimento con cui è stato ottenuto; solo possono affacciarsi dei dubbi sulla misura della sua « pratica » utilità, chè certo la (2) non pare molto adatta per calcoli numerici e simili. Questa breve Nota ha lo scopo di far vedere come — anche a prescindere dalle interessanti applicazioni teoriche della (2) fatte dal Widder stesso nel suo lavoro precedentemente citato e in uno successivo <sup>(1)</sup> — la formula in discorso abbia una non trascurabile importanza dal seguente punto di vista: applicando la (2) ad opportune, già note coppie  $(F, f)$  di funzioni coniugate rispetto alla trasformazione di Laplace, si ottengono subito delle spesso interessanti relazioni di limite che, anche quando non sono nuove, non sono però — generalmente — ottenibili per altra via con altrettanta facilità.

2. Un primo, semplicissimo esempio di applicazione della precedente idea si ha partendo dalla nota formula <sup>(2)</sup>:

$$(3) \quad \mathcal{L}_s [\log t] = -\frac{C + \log s}{s}, \quad (C = \text{costante euleriana}),$$

cioè dalla coppia di funzioni coniugate:

$$F_1(t) = \log t, \quad f_1(s) = -\frac{C + \log s}{s}.$$

Invero, avendosi inoltre — più generalmente — che

$$(4) \quad \mathcal{L}_s [t^n \log t] = \frac{\Pi(n)}{s^{n+1}} [\Psi(n) - \log s]$$

dove  $\Psi(n)$  denota la derivata logaritmica della classica funzione euleriana  $\Pi(n) = \Gamma(n+1)$ ; tenuto conto della ben nota formula

$$(5) \quad \mathcal{L}_s [t^n F(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} \mathcal{L}_s [F(t)],$$

avremo subito che

$$f_1^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} [\Psi(n) - \log s],$$

epperò, in virtù della (2), potremo senz'altro scrivere che

$$\log t = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \Psi(n) - \log \frac{n}{t} \right], \quad (t > 0)$$

(1) G. D. WIDDER, *A classification of generating functions*. Ibid., 39 (1936), pp. 244-298.

(2) La seguente formula (4), di cui la (3) è un caso particolare, trovasi fra l'altro (salvo una contraddizione fra il significato ivi dato a  $\Psi$  e la citazione che lo accompagna) a p. 29 dell'opuscolo di P. HUMBERT: *Le calcul symbolique*. « Actualité scient. et industr. », n. 147, Paris, Hermann & C., 1934.

donde segue subito che

$$(6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} [\Psi(n) - \log n] = 0,$$

ch'è una nota, importante formula della teoria delle funzioni euleriane<sup>(1)</sup>.

3. Un secondo esempio di applicazione della (2) si ottiene partendo dalla elementarissima formula<sup>(2)</sup>:

$$(7) \quad f_2(s) \equiv \mathfrak{L}_s [T_\lambda(t)] = \frac{1}{s} e^{-\lambda s} \quad , \quad (\lambda > 0),$$

dove  $T_\lambda(t)$  denota la funzione « a scalino » definita dalle formule:

$$T_\lambda(t) = 0 \quad , \quad (0 \leq t \leq \lambda) \quad ; \quad T_\lambda(t) = 1 \quad , \quad (t > \lambda).$$

Invero, con l'aiuto della formula di Leibniz sulla derivata  $n$ -esima di un prodotto, si trova subito che

$$f_2^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} e^{-\lambda s} \sum_{k=0}^n \frac{(\lambda s)^k}{k!};$$

pertanto, detta per brevità  $E_n(\gamma)$  la somma dei primi  $n+1$  termini della serie esponenziale, posto cioè:

$$E_n(\gamma) = \sum_{k=0}^n \frac{\gamma^k}{k!},$$

in virtù della (2) si avrà che, eccettuato al più il punto di discontinuità  $t = \lambda$ , è

$$T_\lambda(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda \frac{n}{t}} E_n\left(\lambda \frac{n}{t}\right).$$

Se ne conclude, posto per maggior semplicità  $\lambda/t = x$ , che sussiste la curiosa formula:

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{E_n(nx)}{e^{nx}} = \begin{cases} 0 & (x > 1) \\ 1 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

(1) Cfr., p. es., JAHNKE-EMDE, *Funktionentafeln* (Leipzig, Teubner, 1933) dove, a p. 92, trovasi lo sviluppo asintotico:

$$\Psi(\gamma) = \log \gamma + \frac{1}{2\gamma} - \frac{1}{12\gamma^2} + \dots$$

(2) Cfr., p. es., F. TRICOMI, *Ancora sull'inversione della trasformazione di Laplace*. « Rend. Lincei » (6), 21 (1935), 420-426. Ved. a p. 423.

che non mi risulta essere stata finora mai osservata<sup>(1)</sup>. Essa può però mettersi in connessione con un fatto noto della teoria della crescenza di certe classi di trascendenti intere, e cioè con la circostanza che nel loro sviluppo in serie di Taylor vi è un termine (variabile da caso a caso) il cui modulo è preponderante rispetto a tutti gli altri<sup>(2)</sup>.

4. Un terzo ed ultimo esempio di applicazione della (2) ci sarà offerto dalla importante formula:

$$(9) \quad f_3(s) \equiv \mathfrak{L}_s \left[ t^{\frac{\nu}{2}} J_\nu(2\sqrt{kt}) \right] = \frac{k^{\frac{\nu}{2}}}{s^{\nu+1}} e^{-\frac{k}{s}}, \quad (\nu > -1, k > 0),$$

dove  $J_\nu$  denota la funzione di Bessel di prima specie ed ordine  $\nu$ , di cui io mi sono altra volta avvalso per ricondurre la trasformazione di Hankel a quella di Laplace e per altri scopi<sup>(3)</sup>. Accanto alla (9) sarà però opportuno considerar anche — analogamente a quel che si è fatto nel § 2 — l'altra formula più generale:

$$(10) \quad \mathfrak{L}_s \left[ t^{\frac{\nu}{2}+n} J_\nu(2\sqrt{kt}) \right] = \frac{n! k^{\frac{\nu}{2}}}{s^{n+\nu+1}} e^{-\frac{k}{s}} L_n^{(\nu)} \left( \frac{k}{s} \right),$$

dove  $n$  denota un qualsiasi intero non negativo e  $L_n^{(\nu)}$  l' $n$ -esimo polinomio di Laguerre generalizzato, d'ordine  $\nu$ , che può, com'è noto, definirsi per mezzo della formula:

$$L_n^{(\nu)}(x) = \frac{e^x x^{-\nu}}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^{n+\nu} e^{-x}).$$

La formula (10) è stata da me, in altra occasione<sup>(4)</sup>, attribuita ad E. Hille<sup>(5)</sup>; essa però — in sostanza — si trova di già, come ho potuto successivamente constatare, in un molto antecedente lavoro di E. Le Roy<sup>(6)</sup>, citato, fra gli altri, da S. Wigert<sup>(7)</sup>.

(1) La (8) può essere ritrovata, ma assai più faticosamente, servendosi dell'espressione del resto della serie di Taylor mediante un integrale definito e applicando a questo il cosiddetto « metodo del colle ». Si vede così che per  $x=1$  il limite del primo membro è  $1/2$ .

(2) Cfr., p. es., G. VIVANTI, *Elementi della teoria delle funzioni analitiche e delle funzioni trascendenti intere*. (Milano, Hoepli, 1928), § 197.

(3) F. TRICOMI, *Sulla trasformazione e il teorema di reciprocità di Hankel e Un teorema abeliano per la trasformazione di Hankel e alcune nuove applicazioni di una formula sulle funzioni di Bessel*. « Rend. Lincei » (6), 22 (1935), 564-571 e 572-576.

(4) F. TRICOMI, *Ancora sulla rappresentazione di una legge di probabilità mediante esponenziali di Gauss*. « Giorn. Ist. Ital. d. Attuari », 7 (1936), 42-44.

(5) E. HILLE, *On Laguerre's series. First Note*. « Proc. National Acad. of Sciences » (U. S. A.), 12 (1926), 261-265.

(6) E. LE ROY, *Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor*. « Annales Faculté des Sciences de Toulouse » (2), 2 (1900), 317-430. Ved. a p. 384 dove si trova una formula equivalente alla (10) nel caso  $\nu=0$ .

(7) S. WIGERT, *Contributions à la théorie des polynômes d'Abel-Laguerre*. « Arkiv för Mat. Astron. och Fysik », 15 (1921), n. 25 (22 pp.).

Dalla (10) si ricava, tenuta presente la (5), che nel caso attuale è

$$f_3^{(n)}(s) = (-1)^n \frac{n!}{s^{n+1}} \frac{k^{\frac{v}{2}}}{s^v} e^{-\frac{k}{s}} L_n^{(v)}\left(\frac{k}{s}\right);$$

potremo pertanto, senz'alcun calcolo, dedurre dalla (2) che si ha:

$$t^{\frac{v}{2}} J_v(2\sqrt{kt}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{\frac{v}{2}}}{(n/t)^v} e^{-\frac{kt}{n}} L_n^{(v)}\left(\frac{kt}{n}\right), \quad (t > 0)$$

donde, posto  $kt = x$ , segue senz'altro che

$$J_v(2\sqrt{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{v}{2}}}{n^v} e^{-\frac{x}{n}} L_n^{(v)}\left(\frac{x}{n}\right), \quad (x > 0),$$

ossia che

$$(11) \quad J_v(2\sqrt{x}) = x^{\frac{v}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{-v} L_n^{(v)}\left(\frac{x}{n}\right), \quad (v > -1, x > 0).$$

Non so se la formula (11) che, nel suo caso particolare  $v = 0$ :

$$(12) \quad J_0(2\sqrt{x}) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n\left(\frac{x}{n}\right), \quad (x > 0)$$

ricorda da vicino la classica <sup>(1)</sup> formula

$$J_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n\left(\cos \frac{x}{n}\right)$$

esprimente la funzione  $J_0$  di Bessel come limite di polinomi sferici  $P_n$  di Legendre, sia mai stata esplicitamente osservata. Si tratta comunque di una di quelle formule che, per così dire, « si respirano nell'aria » e, ad ogni modo, il caso particolare (12) rientra in alcune formule più « taglienti », p. es. nella seguente:

$$L_n(x) = J_0(2\sqrt{nx}) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

contenute in un recente lavoro di E. Moecklin <sup>(2)</sup>.

(1) E. HEINE, *Theorie der Kugelfunctionen* (Berlin, Reimer, 1878-1881), 1. Bd. S. 184.

(2) E. MOECKLIN, *Asymptotische Entwicklungen der Laguerreschen Polynome*. « Comment. Math. Helvetici », 7 (1934-35), 24-46. (Ved. a p. 29, badando al significato leggermente diverso del simbolo  $L_n$ ).



5. Le formule (11)-(12) sono certo suscettibili di varie applicazioni. Una delle più spontanee ma non delle meno interessanti consiste nel servirsene per aver qualche lume sugli zeri dei polinomi di Laguerre, su cui finora, specie nel caso  $\nu \neq 0$ , molto non si sa<sup>(1)</sup>.

Dalla (11) segue invero che, detto  $\lambda_{n,k}^{(\nu)}$  il  $k$ -esimo (per  $x$  crescente, a partire dall'origine) zero di  $L_n^{(\nu)}(x)$  e  $j_k^{(\nu)}$  il  $k$ -esimo zero della funzione  $J_\nu(x)$  di Bessel; per  $k$  fisso e  $\nu > -1$ , la differenza fra

$$\frac{1}{4} j_k^{(\nu)^2} \quad \text{e} \quad n \lambda_{n,k}^{(\nu)}$$

dovrà andare attenuandosi al crescere di  $n$ . Si avrà cioè che

$$(13) \quad \lambda_{n,k}^{(\nu)} \sim \frac{1}{4n} j_k^{(\nu)^2},$$

dove però al simbolo  $\sim$  non può però ancora darsi, in base soltanto alle considerazioni precedenti, il significato preciso che suole avere in Analisi (e cioè il significato che il limite del rapporto fra il primo ed il secondo membro è uno) bensì quello più vago che gli si suole talvolta attribuire nelle Matematiche applicate.

Prima di passare ad uno studio più approfondito della (13), ho voluto comunque assoggettare detta formula ad un controllo numerico nel caso di  $\nu = 0$ ,  $k = 1$ ,  $1 \leq n \leq 10$ , servendomi del noto valore  $j_1^{(0)} = 2,4048$  del primo zero della funzione  $J_0$  di Bessel. Eccone i risultati, che sembrano incoraggianti:

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valori di $\lambda_{n,1}^{(0)}$ { esatti . .	1.000	0.582	0.413	0.323	0.260	0.222	0.193	0.160	0.152	0.134
{ form. (13)	1.446	0.723	0.483	0.362	0.289	0.241	0.207	0.181	0.161	0.145

(1) W. HAHN, *Die Nullstellen der Laguerreschen und Hermite'schen Polynome*. « Schriften Math. Seminar Berlin », 1:7 (1933), 213-244.

**Matematica.** — *Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive*<sup>(1)</sup>. Nota di L. CESARI, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. CASTELNUOVO.

Il presente lavoro del dott. Lamberto Cesari, coadiutore della Direzione dell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo, apporta un notevolissimo contributo al problema della risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari algebriche.

Con gli apporti recati dal presente lavoro, i metodi di risoluzione numerica dei sistemi di equazioni lineari algebrici, ricevono una sistemazione assai progredita nella quale, come è ben lecito presumere, l'Istituto potrà sempre trovare quanto occorre per le difficili definitive valutazioni numeriche, con un sufficiente grado di approssimazione, relative agli ardui problemi che gli sono assegnati dalla Scienza e dalla Tecnica.

MAURO PICONE.

Sia

$$(I) \quad \sum_{h=1}^n a_{ih} x_h = b_i \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

un sistema di  $n$  equazioni lineari in  $n$  incognite. Sia  $A$  la matrice di tipo  $(n, n)$  dei coefficienti reali o complessi di (I),  $X$  e  $H$  le matrici di tipo  $(n, 1)$  delle incognite e dei termini noti. Il sistema (I) può scriversi

$$(I) \quad AX = H.$$

Sia  $|A| \neq 0$ . Siano inoltre  $B$  e  $C$  due matrici di tipo  $(n, n)$  e  $c$  un numero reale o complesso, tali che

$$B + C = cA, \quad C \neq 0, \quad |B| \neq 0.$$

Se ora  $\lambda$  è un parametro corrente nel corpo complesso,  $R$  una matrice di tipo  $(n, 1)$ , pure del corpo reale o complesso, arbitraria, il sistema

$$(2) \quad (B + \lambda C) X(\lambda) = cH + (\lambda - 1) CR$$

che, per  $\lambda = 1$  coincide col sistema (I), ha per soluzione la matrice  $X(\lambda)$ , funzione razionale di  $\lambda$ . Se  $r$  è il più piccolo modulo delle radici della equazione algebrica

$$(3) \quad |B + \lambda C| = 0$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto per le Applicazioni del Calcolo.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

per tutti i numeri  $|\lambda| < r$  si ha

$$(4) \quad X(\lambda) = X(0) + \frac{\lambda}{1!} X'(0) + \frac{\lambda^2}{2!} X''(0) + \dots$$

ove  $X = X(1)$  è la soluzione del sistema (1). Posto

$$X_0 = X(0), \quad X_1 = X(0) + \frac{1}{1!} X'(0), \quad X_2 = X_1 + \frac{1}{2!} X''(0), \dots$$

si ha dalla (2), derivando, ponendovi successivamente  $\lambda = 0$  e sommando

$$(5) \quad BX_0 = cH - CR, \quad BX_{p+1} = cH - CX_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

Le (5) rappresentano un algoritmo di approssimazioni successive che ha per  $n$ -pla iniziale gli elementi della matrice  $R$  e che converge allora e soltanto allora che converge la serie (4) e quindi allora che è  $r > 1$ .

Questo teorema, che il prof. Picone espone nel suo *Corso di Calcolo numerico* per una  $n$ -pla iniziale nulla ( $R = 0$ ), è stato da me generalizzato come qui ho esposto.

L'algoritmo (5) comprende, come casi particolari, i vari noti metodi di approssimazioni successive: delle *iterate*, di *Picone*, di *Seidel*, di *von Mises*.

Teoremi particolari di convergenza sono stati dati, per il metodo di Picone, dal Mignosi e dal Cherubino; per il metodo di Seidel ho dato, in un recente lavoro, un teorema di convergenza, nonché un criterio generale di convergenza dell'algoritmo (5). A tale lavoro<sup>(1)</sup> rimando per ogni altra considerazione e per la bibliografia.

2. Sia  $A$  una matrice normale, cioè sia  $A$  la matrice dei coefficienti (reali) di una forma quadratica definita positiva. Siano  $\eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n > 0$  le sue radici caratteristiche. Il metodo di von Mises rientra nell'algoritmo (5) ove si ponga

$$B + \lambda C = I + \lambda(cA - I)$$

ove  $I$  è la matrice unitaria e  $c$  è un numero reale tale che

$$\frac{1}{c} \geq \eta_1 \geq \eta_2 \geq \dots \geq \eta_n > 0.$$

Le radici  $\lambda_i$  di  $|B + \lambda C| = 0$  sono date, con un opportuno ordinamento, da  $\lambda_i = 1 : (1 - c\eta_i)$  onde  $1 < r \leq 1 : (1 - \eta_n : \eta_1)$ .

(1) L. CESARI, *Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive*. « Rassegna delle Poste, dei Telegrafi e dei Telefoni », Anno IX, n. 4.

È chiaro ora che quanto più il rapporto  $\frac{\eta_1}{\eta_n}$  è grande tanto più  $r$  è vicino ad 1 e quindi, in generale, tanto più il metodo di von Mises sarà poco convergente. Praticamente si riconosce che già per  $\eta_1 : \eta_n > 10$ , il metodo di von Mises risulta praticamente di troppo scarsa convergenza.

3. Sia  $f(x)$  un polinomio della variabile reale  $x$  tale che  $f(0) = 0$ , e tale che nell'intervallo  $(\eta_n, \eta_1)$  sia sempre  $f(x) > 0$ .

La matrice  $f(A)$  per il teorema di Sylvester ha le radici caratteristiche  $f(\eta_1), f(\eta_2), \dots, f(\eta_n)$ , tutte  $> 0$ , e quindi è anche  $|f(A)| > 0$ .

Inoltre, posto  $x f_1(x) = f(x)$ , è  $A f_1(A) = f(A)$  onde anche  $|f_1(A)| \neq 0$ . Moltiplicando la (1) a sinistra per  $f_1(A)$  si ottiene il sistema

$$(6) \quad f(A) X = f_1(A) H$$

equivalente al sistema (1). Diremo il sistema (6) trasformato del sistema (1) mediante la trasformazione  $f(x)$ .

4. Il metodo di von Mises applicato al sistema (6) convergerà più rapidamente che applicato al sistema (1) se il rapporto tra il più grande e il più piccolo dei numeri  $f(\eta_i)$  è minore di  $\eta_1 : \eta_n$ .

Sia  $\mu'$  il massimo e  $\mu$  il minimo di  $f(x)$  in  $(\eta_n, \eta_1)$ ; allora i polinomi  $f(x)$  di dato grado  $q$ , soddisfacenti alle condizioni viste nel n. 3 e per i quali è minimo il rapporto  $\mu' : \mu$  sono, a meno di un fattore inessenziale, per i primi gradi  $q = 2, 3, 4$

$$(7) \quad q = 2 \quad f(x) = (\eta_1 + \eta_n)x - x^2, \quad \mu = \eta_1 \eta_n, \quad \mu' = \frac{1}{4} (\eta_1 + \eta_n)^2;$$

$$q = 3 \quad f(x) = 3 \left( m^2 - \frac{\delta^2}{4} \right) x - 3 m x^2 + x^3,$$

$$\mu = \frac{1}{16} (3 \eta_1 + \eta_n)^2 \eta_n, \quad \mu' = \frac{1}{16} (3 \eta_n + \eta_1)^2 \eta_1$$

$$q = 4 \quad f(x) = 4 m \left( m^2 - \frac{\delta^2}{2} \right) x - 2 \left( 3 m^2 - \frac{\delta^2}{2} \right) x^2 + 4 m x^3 - x^4$$

$$\mu = \left( m^2 - \frac{\delta^2}{2} \right)^2, \quad \mu' = m^2 (m^2 - \delta^2),$$

ove

$$m = \frac{1}{2} (\eta_1 + \eta_n), \quad \delta = \frac{1}{2} (\eta_1 - \eta_n).$$

5. Il vantaggio di dette trasformazioni può essere utilmente espresso dal rapporto

$$\rho_q = \frac{\mu'}{\mu} : \frac{\eta_1}{\eta_n}.$$

Eseguiti i calcoli si vede allora che, quando sia  $\eta_n$  piccolo rispetto ad  $\eta_1$ , ( $\eta_n < 10^{-1} \eta_1$ ), si ha

$$\rho_2 \cong \frac{1}{4} \quad , \quad \rho_3 \cong \frac{1}{9} \quad , \quad \rho_4 \cong \frac{1}{16}.$$

Però il rapporto

$$\frac{f(\eta_r) \max}{f(\eta_r) \min} : \frac{\eta_1}{\eta_n},$$

che rappresenta l'effettivo vantaggio della trasformazione adoperata, può risultare più piccolo del relativo  $\rho_q$  poichè non necessariamente  $f(\eta_r) \max$  e  $f(\eta_r) \min$  raggiungono i valori  $\mu'$  e  $\mu$  rispettivamente.

Tuttavia si osservi che non è necessario conoscere esattamente i valori di  $\eta_1$  e  $\eta_n$ . Si può infatti porre, nelle trasformazioni ora considerate, al posto di  $\eta_1$  una sua valutazione approssimata per eccesso (anche al 10 %) e, quando  $\eta_n$  sia piccola rispetto ad  $\eta_1$  ( $\eta_n < 10^{-1} \eta_1$ ), si può porre semplicemente al posto di  $\eta_n$  il valore  $10^{-1} \eta_1$ , il che non altera sensibilmente i rapporti  $\rho_q$ , come si riconosce facilmente.

Per l'applicazione di tali trasformazioni perciò, quando sia  $\eta_n$  piccolo rispetto ad  $\eta_1$  (il che in generale accade quando i termini della diagonale<sup>o</sup> principale non sono predominanti) basta conoscere una valutazione approssimata di  $\eta_1$ , il che può ottenersi in svariati modi.

6. Queste trasformazioni, per quanto nel calcolo dei prodotti di matrici  $f_1(A)A$  e  $f_1(A)H$  occorranò in generale più prodotti [ $\sim n^2(n+1)$ ] di due numeri che nell'ordinario metodo delle eliminazioni successive [ $\sim \frac{n^3}{3}$ ], tuttavia possono essere utili là ove contemporaneamente accade che questo ultimo metodo non sia consigliabile per la scarsa approssimazione che esso dà talvolta per  $n$  grande, che gli ordinari metodi di approssimazioni successive direttamente applicati siano di convergenza così lenta da renderli assolutamente impraticabili per il calcolo numerico, e dove infine, per la presenza di moderne macchine calcolatrici, l'esecuzione delle combinazioni lineari (soltanto  $\sim n^2$ ) occorrenti per il prodotto di matrici riesca del tutto agevole.

Queste trasformazioni possono inoltre essere iterate.

7. *Esempi.* — Sia il sistema normale

$$(8) \quad \begin{cases} 1.137 x + 0.981 y + 0.873 z = 5.718 \\ 0.981 x + 1.241 y + 0.735 z = 5.668 \\ 0.873 x + 0.735 y + 1.353 z = 6.402 \end{cases}$$

le cui radici esatte sono  $x = 1$  ,  $y = 2$  ,  $z = 3$ .



Il metodo delle iterate diverge. Vediamo altri metodi.

*Sistema (8) — Metodo di von Mises.*

È qui  $\text{Max}_{i=1,2,3} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) < 3$  onde  $\eta_i < 3$ . Poniamo  $c = \frac{1}{3}$ . Si ha

$p$	$x(p)$	$y(p)$	$z(p)$
0	0	0	0
1	1.906	1.889333	2.134
...	.....	.....	.....
10	1.4703142	1.7433838	2.7808432

*Sistema (8) — Metodo di Seidel.*

$p$	$x(p)$	$y(p)$	$z(p)$
0	0	0	0
1	5.0290237	0.5918837	1.1652829
...	.....	.....	.....
10	1.1233414	1.9451968	2.9501872

*Esempio di applicazione delle trasformazioni  $f(x)$ .*

Applichiamo la prima delle trasformazioni (7) al sistema (8). Possiamo ritenere  $\eta_n$  piccola rispetto ad  $\eta_1$ .

Poniamo perciò al posto di  $\eta_1 + \eta_n$  il numero 3.3 che differisce certo da  $\eta_1$  di almeno il 10 %. Si ha

$$f_1(A) = 3.3 I - A = \begin{vmatrix} 2.163 & -0.981 & -0.873 \\ -0.981 & 2.059 & -0.735 \\ -0.873 & -0.735 & 1.947 \end{vmatrix}$$

e quindi il sistema (6), trasformato del sistema (8), diviene

$$(9) \quad \begin{cases} 0.734841 x + 0.262827 y - 0.013905 z = 1.218780 \\ 0.262827 x + 1.052633 y - 0.337503 z = 1.355584 \\ -0.013905 x - 0.337503 y + 1.331937 z = 3.306900. \end{cases}$$

In questo sistema i termini della diagonale principale sono predominanti, onde anche il metodo delle iterate converge.

*Sistema (9) - Metodo delle iterate.*

$p$	$x(p)$	$y(p)$	$z(p)$
0	0	0	0
1	1.6585629	1.2878031	2.4827751
...	.....	.....	.....
6	1.0065968	1.9909421	2.9953449
7	1.0031516	1.9968603	2.9977737
8	1.0010808	1.9984993	2.9992373
9	1.0005223	1.9994855	2.9996310
10	1.0001770	1.9997512	2.9998751

*Sistema (9) - Metodo di von Mises.*

È qui  $\text{Max}_{i=1,2,3} (a_{i1} + a_{i2} + a_{i3}) < 1.7$  onde fatto  $c = 1:1.7$ , si ha

$p$	$x(p)$	$y(p)$	$z(p)$
0	0	0	0
1	0.7169294	0.7974024	1.9152353
...	.....	.....	.....
6	1.0672012	1.9319727	2.9655496
7	1.0483884	1.9568659	2.9795854
8	1.0339738	1.9720404	2.9874124
9	1.0235080	1.9816014	2.9920017
10	1.0161255	1.9877714	2.9948079

*Sistema (9) - Metodo di Seidel.*

$p$	$x(p)$	$y(p)$	$z(p)$
0	0	0	0
1	1.6585629	0.8736843	2.7214751
2	1.3975735	1.8114290	2.9563681
3	1.0666196	1.9693765	2.9929357
4	1.0108193	1.9950336	2.9988545
5	1.0017546	1.9991946	2.9998142
6	1.0002845	1.9998694	2.9999699

**Matematica.** — *Sulle trasformazioni cremoniane del piano con curva di punti uniti.* Nota di G. POMPILJ, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

In un lavoro con lo stesso titolo, che sarà pubblicato nei « Rendiconti » del Seminario Matematico di Roma, mi sono occupato delle trasformazioni cremoniane, tra piani sovrapposti, con curva di punti uniti, proponendomi di determinare i tipi cremonianamente distinti di tali trasformazioni.

Sono arrivato al seguente risultato:

**TEOREMA.** — *Una trasformazione cremoniana, non degenera, tra piani sovrapposti, che possiede una curva di punti uniti non riducibile ad un gruppo di punti, si può trasformare in uno dei seguenti tipi:*

1° *trasformazione di de Jonquières di ordine  $n$ , con curva di punti uniti di ordine  $n$  con un punto  $(n-2)$ -plo;*

2° *trasformazione certamente non ciclica con curva di punti uniti formata da curve di un fascio (H) di Halphen, più forse eventuali componenti di (H);*

3° *trasformazione certamente non ciclica con curva di punti uniti d'ordine  $3r$  ( $r > 1$ ), con almeno 10 punti  $r$ -pli, a cui si aggiungono eventuali curve eccezionali; per  $r = 2$  la trasformazione esiste; per  $r > 2$  la cosa è dubbia; si prova che la  $C_{3r}$  ha per unica curva aggiunta o successiva aggiunta la curva d'ordine zero, ovvero è una curva multipla di una curva siffatta;*

[1] (1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

per  $r \leq 3$  esistono curve con unica curva successiva aggiunta d'ordine zero, ma per  $r > 3$  l'esistenza di tali curve è assai poco probabile;

4° trasformazione con curva di punti uniti del terzo ordine, a cui forse si debbono aggiungere eventuali curve eccezionali;

5° trasformazione ciclica di grado 3 con 8 punti fondamentali e con curva di punti uniti del sesto ordine che passa doppiamente per questi punti;

6° trasformazione involutoria di ordine 8 con 7 punti fondamentali tripli e con curva di punti uniti del sesto ordine che passa doppiamente per i 7 punti fondamentali;

7° trasformazione involutoria di ordine 17 con 8 punti fondamentali sestupli; la curva di punti uniti è del nono ordine e passa triplamente per i punti fondamentali.

All'infuori di questi tipi resta il dubbio circa l'esistenza di una trasformazione con curva di punti uniti, spezzata in curve eccezionali, priva del sistema aggiunto e di tutti i sistemi successivi aggiunti ma non riducibile ad un gruppo di punti.

Dal teorema si può raccogliere questo risultato parziale: una componente, irriducibile e non eccezionale, di una trasformazione cremoniana del piano, appartiene ad uno dei seguenti tipi:

CUBICA; SESTICA con 7, 8, 9, 10 punti doppi; CURVA DEL NONO ORDINE con 8 punti tripli; CURVA D'ORDINE  $3r$  con 9 punti  $r$ -pli; CURVA D'ORDINE  $m$  con un punto  $(m-2)$ -plo.

Le ricerche che si propongono di determinare i diversi tipi di enti che soddisfano a certe proprietà, cioè che hanno per scopo una classificazione, constano, in generale, di due fasi: nella prima si determinano i tipi possibili e nella seconda fase se ne prova l'esistenza.

Ho sviluppato la prima fase, cioè ho determinato i tipi possibili di trasformazioni cremoniane con curva di punti uniti, sfruttando un'idea direttrice del prof. Guido Castelnuovo il quale sin dal 1892 si era occupato di questo argomento ed aveva dimostrato che se la curva di punti uniti ha come componente irriducibile una curva  $M$  di genere maggior d'uno, la trasformazione è o ciclica o di de Jonquières<sup>(1)</sup>.

Il prof. G. Castelnuovo raggiunse questo risultato servendosi del fatto che il sistema aggiunto puro di  $M$  è mutato in se stesso curva per curva.

Accanto al sistema aggiunto puro ho dovuto considerare i sistemi successivi-aggiunti puri, pluri-aggiunti puri, e di questi ultimi ho tenuto presente l'aggiunto puro e i successivi aggiunti puri: tutti sistemi invarianti.

(1) Ved. G. CASTELNUOVO, *Sulle trasformazioni cremoniane del piano che ammettono una curva fissa*. «Rend. R. Acc. Lincei», 1892; «Memorie Scelte» (Zanichelli, Bologna, 1937), Mem. XIX.

Con questo bagaglio di sistemi invarianti ho determinato i vari tipi di trasformazioni cremoniane con curve di punti uniti.

Alcuni di questi tipi: la trasformazione di de Jonquières, le due involuzioni di Bertini e di Geiser, . . . sono notissimi, ma altri sono una novità ed ho dovuto pertanto darne qualche esempio.

Mi si consenta di richiamare l'attenzione sopra il tipo 2, cioè su la trasformazione con curva di punti uniti spezzata in curve di un fascio di Halphen: la costruzione di esempi di questo tipo si riattacca alle ricerche del prof. Federico Enriques sulle superficie algebriche con una serie discontinua di trasformazioni birazionali<sup>(1)</sup>.

**Matematica.** — *Sullo scarto dalla permutabilità nella teoria degli operatori lineari.* Nota di L. TOSCANO, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Siano  $H$  e  $K$  due operatori lineari che intenderemo applicati agli elementi di uno spazio lineare a infinite dimensioni, e soddisfacenti alla sola condizione di non essere permutabili.

Denotiamo con  $(HK)$  lo scarto  $HK - KH$  di  $K$  rispetto a  $H$ , e poniamo inoltre

$$(HK)^0 = K$$

$$(HK)^{(i)} = H(HK)^{(i-1)} - (HK)^{(i-1)}H.$$

Vogliamo qui dimostrare che i successivi scarti di  $K$  rispetto a  $H$  sono legati dalla seguente formula

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad nKH^{n-1} &= \sum_{i=1}^{i=n} H^{i-1}KH^{n-i} + \binom{n}{1}\beta_1 \sum_{i=2}^{i=n} H^{i-2}(HK)H^{n-i} \\ &+ \binom{n}{2}\beta_2 \sum_{i=3}^{i=n} H^{i-3}(HK)^{(2)}H^{n-i} + \dots + \binom{n}{n-1}\beta_{n-1}(HK)^{(n-1)}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti  $\beta_i$  sono i numeri di Bernoulli definiti dallo sviluppo in serie

$$\frac{x}{e^x - 1} = \beta_0 + \beta_1 \frac{x}{1!} + \beta_2 \frac{x^2}{2!} + \dots + \beta_i \frac{x^i}{i!} + \dots$$

(1) Ved. F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche che ammettono una serie discontinua di trasformazioni birazionali.* «Rend. R. Acc. Lincei», 1906; Ved. ancora: F. ENRIQUES, *Sulle superficie algebriche con un fascio di curve ellittiche.* «Rend. R. Acc. Lincei», 1912.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.



2. Lo scarto di ordine  $i$  di  $K$  rispetto a  $H$  è dato dalla  $C$

$$(HK)^{(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} H^{i-j} KH^j,$$

e sostituendo nel secondo membro della  $(\alpha)$  si ha

$$\begin{aligned} nKH^{n-1} &= [KH^{n-1} + HKH^{n-2} + \dots + H^{n-2}KH + H^{n-1}K] \\ &+ \binom{n}{1} \beta_1 [(-KH^{n-1}) + (H^{n-1}K)] \\ &+ \binom{n}{2} \beta_2 [(KH^{n-1} - HKH^{n-2}) + (-H^{n-2}KH + H^{n-1}K)] \\ &+ \binom{n}{3} \beta_3 [(-KH^{n-1} + 2HKH^{n-2} - H^2KH^{n-3}) + \\ &\quad + (H^{n-3}KH^2 - 2H^{n-2}KH + H^{n-1}K)] \\ &+ \binom{n}{4} \beta_4 [(KH^{n-1} - 3HKH^{n-2} + 3H^2KH^{n-3} - H^3KH^{n-4}) + \\ &\quad + (-H^{n-4}KH^3 + 3H^{n-3}KH^2 - 3H^{n-2}KH + H^{n-1}K)] + \dots \\ &+ \binom{n}{r-1} \beta_{r-1} \left[ \left( (-1)^{r-1} \binom{r-2}{0} KH^{n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{r-2} \binom{r-2}{1} HKH^{n-2} + \dots - H^{r-2}KH^{n-r+1} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( (-1)^{r-2} H^{n-r+1}KH^{r-2} + \dots - \binom{r-2}{1} H^{n-2}KH + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{r-2}{0} H^{n-1}K \right) \right] \\ &+ \dots \\ &+ \binom{n}{n-1} \beta_{n-1} \left[ \left( (-1)^{n-1} \binom{n-2}{0} KH^{n-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (-1)^{n-2} \binom{n-2}{1} HKH^{n-2} + \dots - H^{n-2}KH \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( (-1)^{n-2} HKH^{n-2} + \dots - \binom{n-2}{1} H^{n-2}KH + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{n-2}{0} H^{n-1}K \right) \right]. \end{aligned}$$

(1) S. PINCHERLE, *Contributo alla teoria degli operatori lineari*. « Annali di Matematica », ser. IV, to. XV, 1936.

Denotando con  $\sigma_v$  il coefficiente di  $H^v KH^{n-v-1}$  nel precedente sviluppo, si deduce

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \sum_{r=1}^{r=n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r-1} \beta_{r-1} \\ \sigma_{n-1} &= \sum_{r=1}^{r=n} \binom{n}{r-1} \beta_{r-1} \\ \sigma_v &= \sum_{r=v+2}^{r=n} (-1)^{r-v-1} \binom{n}{r-1} \binom{r-2}{v} \beta_{r-1} + \\ &+ (-1)^{n-v-1} \sum_{r=n-v+1}^{r=n} \binom{n}{r-1} \binom{r-2}{n-v-1} \beta_{r-1} + 1 \\ \sigma_{n-v-1} &= \sigma_v,\end{aligned}$$

e quindi per stabilire la ( $\alpha$ ) basta dimostrare che

$$\sigma_0 = n, \quad \sigma_{n-1} = 0, \quad \sigma_v = 0, \quad 1 \leq v \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

La  $\sigma_0 = n$  si può successivamente scrivere

$$\begin{aligned}\frac{n+2}{2} + \sum_{r=3}^{r=n} (-1)^{r+1} \binom{n}{r-1} \beta_{r-1} &= n \\ \sum_{s=2}^{s=n-1} (-1)^s \binom{n}{s} \beta_s &= \frac{n-2}{2}, \quad n > 2\end{aligned}$$

e questa ultima è vera in quanto costituisce una formula fondamentale della teoria dei numeri di Bernoulli.

La  $\sigma_{n-1} = 0$  si trasforma facilmente nella precedente  $\sigma_0 = n$ .

La  $\sigma_v = 0$  si può successivamente scrivere

$$\begin{aligned}& \sum_{r=v+2}^{r=n} (-1)^{r-v-1} \frac{1}{r-1} \binom{n-v-1}{r-v-2} \beta_{r-1} + \\ &+ (-1)^{n-v-1} \sum_{r=n-v+1}^{r=n} \frac{1}{r-1} \binom{v}{r+v-n-1} \beta_{r-1} + \frac{v!(n-v-1)!}{n!} = 0 \\ & \sum_{\rho=0}^{\rho=n-v-2} (-1)^{n-v-\rho-1} \frac{1}{n-\rho-1} \binom{n-v-1}{\rho+1} \beta_{n-\rho-1} + \\ &+ (-1)^{n-v-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=v-1} \frac{1}{n-\rho-1} \binom{v}{\rho+1} \beta_{n-\rho-1} + \frac{v!(n-v-1)!}{n!} = 0.\end{aligned}$$

Posto ora  $n - 1 = 2m$  oppure  $n - 1 = 2m + 1$ , secondo che  $n$  è dispari o pari, la precedente si scinde nelle

$$\begin{aligned} & \sum_{q=0}^{q=2m-v-1} (-1)^q \frac{1}{2m-\rho} \binom{2m-v}{\rho+1} \beta_{2m-q} + \\ & + \sum_{q=0}^{q=v-1} \frac{1}{2m-\rho} \binom{v}{\rho+1} \beta_{2m-q} + \frac{(-1)^v v! (2m-v)!}{(2m+1)!} = 0 \\ & \sum_{q=0}^{q=2m-v} (-1)^{q+1} \frac{1}{2m-\rho+1} \binom{2m-v+1}{\rho+1} \beta_{2m-q+1} - \\ & - \sum_{q=0}^{q=v-1} \frac{1}{2m-\rho+1} \binom{v}{\rho+1} \beta_{2m-q+1} + \frac{(-1)^v v! (2m-v+1)!}{(2m+2)!} = 0, \end{aligned}$$

e queste ultime sono formule note sui numeri di Bernoulli <sup>(1)</sup>.

Risulta così stabilita la formula ( $\alpha$ ).

3. Tale formula è veramente notevole per la sua generalità, in quanto non richiede altra ipotesi che gli operatori  $H$  e  $K$  non siano permutabili. Essa discende pure da alcune ricerche di E. Pascal <sup>(2)</sup>, con procedimento che non ha alcun punto di contatto col nostro, e solo per operatori rappresentanti trasformazioni infinitesime, mentre la sua portata è ben più vasta.

E noi, estendendola opportunamente, la applicheremo in altro lavoro alla teoria degli operatori permutabili di secondo ordine.

**Matematica.** — *Sur une extension du principe de dégénérescence a la théorie des surfaces algébriques.* Nota di B. d'ORGEVAL, presentata dal Socio F. ENRIQUES.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. Gauthier-Villars, Paris, 1923, p. 188.

(2) *Sopra alcune identità fra i simboli operativi rappresentanti trasformazioni infinitesime.* « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », ser. II, vol. XXXIV, 1901.

**Matematica.** — *Le varietà, a quattro dimensioni, che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ .* Nota di M. VILLA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. E. BOMPIANI.

1. Com'è ben noto, sulla varietà di Segre, rappresentante le coppie di punti di due piani, vi sono  $\infty^7$  coniche, provenienti dalle proiettività fra le coppie di rette dei due piani. Queste coniche sono quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ <sup>(2)</sup> per la  $V_4$  di Segre.

È sorta così la questione di sapere se esistono altre  $V_4$  dotate di  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ . E, in caso affermativo: *trovare tutte le  $V_4$  che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ .*

La risoluzione di questo problema si trova in un mio lavoro che verrà prossimamente pubblicato. Nella presente Nota espongo il risultato e la trama della dimostrazione.

2. Ecco il risultato:

*Le  $V_4$  che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  sono le seguenti:*

1° In  $S_8$ , la  $V_4$  luogo delle rette che si appoggiano ad una curva piana  $C$  e a una superficie di Veronese di un  $S_5$  sghembo con l' $S_2$  di  $C$ , oppure ad una superficie di un  $S_m$  ( $5 < m \leq 8$ ), secante l' $S_2$  di  $C$  in un  $S_{m-6}$ , la cui proiezione da questo  $S_{m-6}$  sopra un  $S_5$  sghembo con l' $S_2$  di  $C$  è una superficie di Veronese.

2° In  $S_8$ , la  $V_4$  costituita da  $\infty^2$  superficie (anche piane) appartenenti agli  $S_3$  del cono proiettante da un  $S_2$  una superficie di Veronese di un  $S_5$  sghembo con l' $S_2$ <sup>(3)</sup>.

3° Le  $V_4$  di  $S_7$ <sup>(4)</sup>.

4° La  $V_4$  di Segre rappresentante le coppie di punti di due piani.

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) Com'è ben noto, una curva di  $V_4$  chiamasi, con BOMPIANI, quasi-asintotica  $\gamma_{1,3}$  quando l' $S_4$  tangente a  $V_4$  in un punto della curva e l' $S_3$  ivi osculatore alla curva hanno uno spazio congiungente di dimensione inferiore a quella che si avrebbe per una curva generica.

(3) Quando le  $\infty^2$  superficie sono piani, non è fissa la retta intersezione di essi con l' $S_2$ .

(4) Escluso il cono (dell' $S_7$ ) che proietta da una retta una superficie di Veronese, il quale possiede invece  $\infty^8 \gamma_{1,3}$ .

3. Per la dimostrazione: l'S<sub>4</sub> tangente in un punto  $x(T_1, T_2, T_3, T_4)$  a  $V_4$  è individuato dai punti  $x, x_1, x_2, x_3, x_4$  (avendo posto  $x_i = \frac{\partial x}{\partial T_i}$ ; porremo analogamente  $x_{ik} = \frac{\partial^2 x}{\partial T_i \partial T_k}$ ,  $x_{ikl} = \frac{\partial^3 x}{\partial T_i \partial T_k \partial T_l}$ )<sup>(1)</sup>; l'S<sub>3</sub> osculatore ad una curva di  $V_4$  in  $x$  è individuato dai punti  $x$ ,

$$dx = \sum x_i dT_i, \quad d^2x = \sum x_{ik} dT_i dT_k + \sum x_i d^2 T_i, \\ d^3x = \sum x_{ikl} dT_i dT_k dT_l + 3 \sum x_{ik} dT_i d^2 T_k + \dots \quad (i, k, l = 1, 2, 3, 4).$$

Affinchè l'S<sub>4</sub> e l'S<sub>3</sub> abbiano un S<sub>5</sub> congiungente dev'essere

$$(1) \quad \begin{vmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \sum x_{ik} dT_i dT_k \\ \sum x_{ikl} dT_i dT_k dT_l + 3 \sum x_{ik} dT_i d^2 T_k \end{vmatrix} = 0.$$

Perchè le equazioni (1) siano compatibili, considerate come equazioni lineari nei differenziali secondi  $d^2 T_1, d^2 T_2, d^2 T_3, d^2 T_4$ , dev'essere

$$(2) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{1i} dT_i \\ \sum x_{2i} dT_i \\ \sum x_{3i} dT_i \\ \sum x_{4i} dT_i \\ \sum x_{ikl} dT_i dT_k dT_l \end{vmatrix} = 0,$$

dove con  $S(1)$  si sono rappresentate brevemente le prime cinque orizzontali della matrice precedente.

Affinchè  $V_4$  contenga  $\infty^7 \gamma_{1,3}$  (cioè  $\infty^7$ , fissandone ad arbitrio un punto e la direzione in esso) è necessario e sufficiente che siano nulle,

(1) Supponiamo naturalmente che il punto generico di  $V_4$  non soddisfi ad una equazione a derivate parziali del 1° ordine.



identicamente rispetto ai  $dT_i$ , le matrici  $M$  che s'ottengono dalla (2) sopprimendo una delle ultime cinque orizzontali. Dovrà quindi essere, fra le altre, soddisfatta identicamente rispetto ai  $dT_i$  la

$$(3) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{1i} dT_i \\ \sum x_{2i} dT_i \\ \sum x_{3i} dT_i \\ \sum x_{4i} dT_i \end{vmatrix} = 0.$$

L'annullarsi della (3), identicamente rispetto ai  $dT_i$ , esprime che la varietà  $W$ , luogo degli  $S_4$  tangenti a  $V_4$ , ha dimensione minore dell'ordinario<sup>(1)</sup>, cioè 7<sup>(2)</sup>. Si ha intanto: *L'esistenza sopra  $V_4$  di  $\infty^7 \gamma_{1,3}$  trae con sé che la varietà  $W$ , luogo degli  $S_4$  tangenti a  $V_4$ , ha dimensione 7.*

Se  $V_4$  soddisfa a sette equazioni di Laplace linearmente indipendenti, l'annullarsi delle  $M$  (identicamente rispetto ai  $dT_i$ ) impone che  $V_4$  stia in  $S_7$ , e si ha il caso 3°<sup>(3)</sup>.

È lecito quindi supporre, nel seguito, che  $V_4$  soddisfi a sei equazioni di Laplace, *al più*.

Siccome la  $W$  degli  $S_4$  tangenti ha dimensione 7, le nostre  $V_4$  si dovranno ricercare nei tipi di  $V_4$  determinati dal Terracini<sup>(4)</sup>. Le nostre  $V_4$  si otterranno quindi imponendo alle  $V_4$  determinate dal Terracini, l'annullarsi delle  $M$ , diverse dalla (3).

Le  $M = 0$  non possono soddisfarsi quando  $V_4$  è un cono proiettante da un punto una  $V_3$ , oppure quando  $V_4$  è il luogo dei piani tangenti a

(1) Vedi: BOMPIANI, *Sistemi di equazioni simultanee alle derivate parziali a caratteristica*. «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 49, n. 12, 1914.

(2) Non può la  $W$  di  $V_4$  avere dimensione  $< 7$  perchè, per la (1), le  $\gamma_{1,3}$  di  $V_4$  sarebbero più di  $\infty^7$ .

(3) Non può  $V_4$  soddisfare a più di sette equazioni di Laplace, linearmente indipendenti, perchè, per la (1), le  $\gamma_{1,3}$  sarebbero più di  $\infty^7$ .

(4) Il TERRACINI è pervenuto al risultato seguente: Se una  $V_4$  rappresenta  $d \leq 6$  equazioni di Laplace, linearmente indipendenti, ed è tale che i suoi  $S_4$  tangenti ricoprono una varietà di dimensione 7, essa è un cono proiettante da un punto una  $V_3$ ; oppure essa è una generica sviluppabile con curva direttrice, o è formata dai piani tangenti ad una superficie generica, o è una  $\infty^2$  generica di piani tangenti a una curva; o è la  $V_4^6$  (di  $S_8$ ) di Segre, o è costituita da superficie (non piane) poste negli  $S_3$  di un cono generico proiettante da un piano una superficie (che non rappresenta nessuna equazione di Laplace), o infine è una generica  $\infty^2$  di piani con  $S_5$  tangente fisso lungo ogni piano generatore. (Vedi: TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti e osculatori ad una varietà*. Nota II, «Atti dell'Accademia di Torino», vol. 51, p. 714, 1916).

una superficie, e neppure quando  $V_4$  è sviluppabile, con curva direttrice, e le cui generatrici sono tangenti a una  $V_3$ .

Per le  $V_4$  sviluppabili con curva e superficie direttrice, le  $M = 0$  portano al caso 1° [vedi n. 4]. Per le  $V_4$  costituite da  $\infty^2$  superficie (non sviluppabili o sviluppabili, ma non piane) situate negli  $S_3$  di un cono proiettante da un piano una superficie che non rappresenta nessuna equazione di Laplace, le  $M = 0$  portano al caso 2°. Se  $V_4$  è una  $\infty^2$  di piani con  $S_3$  tangente fisso lungo ogni piano generatore, le  $M = 0$  impongono dapprima che gli  $\infty^2$  piani seghino in rette un piano fisso (la retta intersezione non essendo fissa) e infine che  $V_4$  rientri nel caso 2°. Se  $V_4$  è formata da  $\infty^2$  piani tangenti a una curva, le  $M = 0$  impongono dapprima che tale curva sia piana e infine si ricade nel caso 2°. Da ultimo: se  $V_4$  è la  $V_4$  di Segre si ha il caso 4°.

4. Nei casi 1°, 2° appare la superficie di Veronese oppure una superficie che ha per proiezione la superficie di Veronese. Vediamo come si perviene a tale superficie e, per fissar le idee, consideriamo il caso della  $V_4$  con curva e superficie direttrice.

Come equazioni parametriche di  $V_4$  si possono assumere le seguenti

$$(4) \quad x = A(T_2)T_1 + B(T_3, T_4).$$

Essendo  $x_{11} = 0$ ,  $x_{12} = \frac{1}{T_1}x_2$ ,  $x_{13} = 0$ ,  $x_{14} = 0$ , l'unica delle  $M = 0$  che non è già soddisfatta è la seguente

$$(5) \quad \begin{vmatrix} x \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \sum x_{2i} dT_i \\ \sum x_{3i} dT_i \\ \sum x_{4i} dT_i \\ \sum x_{ikl} dT_i dT_k dT_l \end{vmatrix} = 0$$

(identicamente rispetto ai  $dT_i$ ).

La (5) impone dapprima che la curva direttrice  $A$  sia piana (e che non sia una retta). Siano  $U, V, W$  tre punti (non allineati) del piano di  $A$ . Tenendo presente la (4), la (5) diviene

$$(6) \quad \left| \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ B \\ B_3 \\ B_4 \\ \sum B_{3s} dT_s \\ \sum B_{4s} dT_s \\ \sum B_{smn} dT_s dT_m dT_n \end{array} \right| = 0 \quad (s, m, n = 3, 4)$$

(identicamente rispetto ai  $dT_s$ )  $\left( B_3 = \frac{\partial B}{\partial T_3} \right.$  e analogamente).

La (6) afferma la compatibilità delle equazioni

$$(7) \quad \left| \begin{array}{c} U \\ V \\ W \\ B \\ B_3 \\ B_4 \\ \sum B_{sm} dT_s dT_m \\ \sum B_{smn} dT_s dT_m dT_n + 3 \sum B_{sm} dT_s d^2 T_m \end{array} \right| = 0,$$

considerate come equazioni lineari nei differenziali secondi.

Siccome si dimostra che  $V_4$  sta in  $S_8$ , la superficie direttrice  $B$  starà in un  $S_p$  ( $5 \leq p \leq 8$ ), segante l' $S_2$  della curva direttrice in un  $S_{p-6}$  <sup>(1)</sup>.

Se la superficie  $B$  sta in  $S_8$ , la (7) ci dice che  $B$  possiede  $\infty^2$  curve tali che in un punto di  $B$ , il piano tangente a  $B$ , l' $S_3$  osculatore alla curva, e il piano dei punti  $U, V, W$  stanno in un  $S_6$ . Proiettando questo  $S_6$  dal piano  $(U, V, W)$  sopra un  $S_5$ , sghembo col piano, si ottiene un  $S_3$ . Quindi proiettando la  $B$  dal piano  $(U, V, W)$  sopra l' $S_5$ , si ottiene una superficie (non soddisfacente ad alcuna equazione di Laplace) che possiede  $\infty^2$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ , e cioè la superficie di Veronese <sup>(2)</sup>.

(1) Se  $p = 5$ , l' $S_2$  e l' $S_5$  sono cioè sghembi.

(2) Vedi: BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. «Memorie Accademia dei Lincei», ser. 5°, vol. 13, p. 453, 1922.

Se B appartiene ad un  $S_7$ , segante il piano  $(U, V, W)$  in una retta (che possiamo supporre essere quella dei punti  $V, W$ ), nella (7) possiamo sopprimere la 1<sup>a</sup> orizzontale e la proiezione si farà dalla retta  $(V, W)$ . Se B appartiene ad un  $S_6$ , segante  $(U, V, W)$  in un punto (che possiamo supporre essere  $W$ ), nella (7) possiamo sopprimere le prime due orizzontali e la proiezione si farà da  $W$ . Infine se B è in un  $S_5$ , sghembo con  $(U, V, W)$ , nella (7) si possono sopprimere le prime tre orizzontali e la B stessa è la superficie di Veronese.

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota II di G. COLONNETTI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Consideriamo un solido elastico - occupante un certo spazio connesso  $V$  e limitato da una superficie o da un complesso di superficie  $S$  - il quale da uno stato iniziale *non deformato* sia passato ad uno stato di equilibrio per un dato sistema di forze esterne, mediante certi spostamenti dei suoi punti, le cui componenti  $u, v, w$  riterremo funzioni delle coordinate, continue, uniformi e piccolissime rispetto alle dimensioni del solido, e dotate di derivate parziali prime alla lor volta continue, uniformi e piccolissime a fronte dell'unità.

Supponiamo che a determinare quegli spostamenti  $u, v, w$  abbiano contribuito una deformazione elastica di componenti

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$$

ed una deformazione plastica (deformazione impressa) di componenti

$$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_z, \bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy}$$

sicchè si abbia

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x + \bar{\varepsilon}_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \gamma_{yz} + \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_y + \bar{\varepsilon}_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{zx} + \bar{\gamma}_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z + \bar{\varepsilon}_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{xy} + \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \end{array} \right.$$

Detta  $\varphi$  l'energia potenziale elastica elementare, forma quadratica, omogenea, essenzialmente positiva, delle sei componenti speciali di tensione

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

in funzione delle quali le sei componenti della deformazione elastica s. possono sempre esprimere colle note relazioni lineari:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_x} \quad , \quad \epsilon_y = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_y} \quad , \quad \epsilon_z = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_z} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{yz}} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{zx}} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_{xy}} \end{array} \right.$$

consideriamo l'energia potenziale elastica totale

$$\Phi = \int_V \varphi(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}) dV$$

e proponiamoci di determinare quale variazione essa subirebbe qualora si attribuissero idealmente alle

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}$$

delle variazioni piccolissime

$$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$$

compatibili colla deformazione impressa e col dato sistema di forze esterne.

Per soddisfare a quest'ultima condizione, della compatibilità della variazione colle leggi dell'equilibrio per il sistema dato di forze esterne, occorre e basta che siano verificate le equazioni:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} = 0 \end{array} \right.$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{zx} \cos(n, z) = 0 \\ \delta\tau_{xy} \cos(n, x) + \delta\sigma_y \cos(n, y) + \delta\tau_{yz} \cos(n, z) = 0 \\ \delta\tau_{zx} \cos(n, x) + \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + \delta\sigma_z \cos(n, z) = 0 \end{array} \right.$$

rispettivamente in tutto lo spazio V occupato dal solido e sulla superficie S che lo limita; sulla quale superficie  $n$  indica, come d'uso, la normale in un punto generico, rivolta sempre verso l'interno di V.

Poichè  $\varphi$  è una forma quadratica, si ha



$$\begin{aligned}\delta\Phi &= \int_V \varphi (\sigma_x + \delta\sigma_x, \sigma_y + \delta\sigma_y, \dots, \tau_{xy} + \delta\tau_{xy}) dV - \\ &\quad - \int_V \varphi (\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}) dV = \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_x} \delta\sigma_x + \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_y} \delta\sigma_y + \dots + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau_{xy}} \delta\tau_{xy} \right] dV + \\ &\quad + \int_V \left[ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x^2} \delta\sigma_x^2 + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma_x \partial\sigma_y} \delta\sigma_x \delta\sigma_y + \dots + \frac{1}{2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau_{xy}^2} \delta\tau_{xy}^2 \right] dV.\end{aligned}$$

Prescindendo dal gruppo dei termini del second'ordine — del quale importa soltanto rilevare che equivale a

$$\int_V \varphi (\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \dots, \delta\tau_{xy}) dV$$

epperò è essenzialmente positivo — potremo, giusta le (2), scrivere la proposta variazione sotto la forma:

$$\delta\Phi = \int_V (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \epsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx} + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy}) dV.$$

Ma per le (1):

$$\begin{aligned}\int_V \epsilon_x \delta\sigma_x dV &= \int_V \frac{\partial u}{\partial x} \delta\sigma_x dV - \int_V \bar{\epsilon}_x \delta\sigma_x dV = \\ &= \int_V \frac{\partial}{\partial x} (u \delta\sigma_x) dV - \int_V u \frac{\partial (\delta\sigma_x)}{\partial x} dV - \int_V \bar{\epsilon}_x \delta\sigma_x dV = \\ &= - \int_S u \delta\sigma_x \cos(n, x) dS - \int_V u \frac{\partial (\delta\sigma_x)}{\partial x} dV - \int_V \bar{\epsilon}_x \delta\sigma_x dV.\end{aligned}$$

Similmente:

$$\begin{aligned}\int_V \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} dV &= \int_V \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \delta\tau_{yz} dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta\tau_{yz} dV = \\ &= \int_V \left[ \frac{\partial}{\partial y} (w \delta\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (v \delta\tau_{yz}) \right] dV - \\ &\quad - \int_V \left[ w \frac{\partial (\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial (\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta\tau_{yz} dV = \\ &= - \int_S [w \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + v \delta\tau_{yz} \cos(n, z)] dS - \\ &\quad - \int_V \left[ w \frac{\partial (\delta\tau_{yz})}{\partial y} + v \frac{\partial (\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] dV - \int_V \bar{\gamma}_{yz} \delta\tau_{yz} dV.\end{aligned}$$

Operando queste sostituzioni e le loro analoghe, ed ordinando, si ottiene facilmente

$$\begin{aligned} \delta\Phi = & - \int_V [\bar{\epsilon}_x \delta\sigma_x + \bar{\epsilon}_y \delta\sigma_y + \bar{\epsilon}_z \delta\sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \delta\tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \delta\tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \delta\tau_{xy}] dV - \\ & - \int_V \left\{ \left[ \frac{\partial(\delta\sigma_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial z} \right] u + \right. \\ & + \left[ \frac{\partial(\delta\tau_{xy})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\sigma_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial z} \right] v + \\ & + \left[ \frac{\partial(\delta\tau_{zx})}{\partial x} + \frac{\partial(\delta\tau_{yz})}{\partial y} + \frac{\partial(\delta\sigma_z)}{\partial z} \right] w \left. \right\} dV - \\ & - \int_S \{ [\delta\sigma_x \cos(n, x) + \delta\tau_{xy} \cos(n, y) + \delta\tau_{zx} \cos(n, z)] u + \\ & + [\delta\tau_{xy} \cos(n, x) + \delta\sigma_y \cos(n, y) + \delta\tau_{yz} \cos(n, z)] v + \\ & + [\delta\tau_{zx} \cos(n, x) + \delta\tau_{yz} \cos(n, y) + \delta\sigma_z \cos(n, z)] w \} dS, \end{aligned}$$

dove i due ultimi integrali sono identicamente nulli, qualunque siano le  $u, v, w$ , poichè, secondo le (3) e le (4), sono nulli i rispettivi coefficienti.

Resta soltanto il primo integrale, nel quale è da osservarsi che le

$$\bar{\epsilon}_x, \bar{\epsilon}_y, \bar{\epsilon}_z, \bar{\gamma}_{yz}, \bar{\gamma}_{zx}, \bar{\gamma}_{xy}$$

sono da trattarsi come delle costanti — in quanto abbiamo convenuto di ricercar le possibili variazioni di  $\Phi$  compatibilmente coi valori attribuiti alle componenti della deformazione impressa — sicchè si può scrivere

$$\delta\Phi = - \delta \int_V (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\epsilon}_y \sigma_y + \bar{\epsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

o, ciò che fa lo stesso:

$$\delta \left[ \Phi + \int_V (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\epsilon}_y \sigma_y + \bar{\epsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV \right] = 0.$$

Di qui il teorema:

*Le tensioni interne che caratterizzano lo stato di equilibrio considerato sono quelle che rendono minima l'espressione*

$$\Phi + \int_V (\bar{\epsilon}_x \sigma_x + \bar{\epsilon}_y \sigma_y + \bar{\epsilon}_z \sigma_z + \bar{\gamma}_{yz} \tau_{yz} + \bar{\gamma}_{zx} \tau_{zx} + \bar{\gamma}_{xy} \tau_{xy}) dV$$

*per rapporto a tutti i valori che l'espressione stessa può assumere compatibilmente colla deformazione impressa e colle forze esterne date.*



**Meccanica** (Idrodinamica). — *Interazione cinetica tra vortici e correnti irrotazionali*. Nota di G. LAMPARIELLO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ 1. — INTRODUZIONE.

L'oggetto della presente Nota è la dimostrazione di una proprietà generale concernente l'energia cinetica di un liquido in moto intorno ad un solido fisso quando alla corrente irrotazionale, traslatoria all'infinito, si sovrapponga la più generale distribuzione di velocità indotte da vortici.

Sia  $\sigma$  il contorno (regolare) del solido fisso; sia  $\mathbf{V}'$  la velocità della generica particella fluida nel moto irrotazionale intorno a  $\sigma$ , traslatorio all'infinito di velocità  $\mathbf{V}_0$ ; sia  $\mathbf{V}''$  la velocità indotta dai vortici.

Essendo  $\sigma_\infty$  una sfera intorno a  $\sigma$  di raggio  $R$  comunque grande, si calcoli l'energia cinetica  $\bar{T}$  del liquido contenuto nel campo  $\bar{S}$  compreso tra  $\sigma$  e  $\sigma_\infty$ .

La  $\bar{T}$  consta di tre termini

$$\bar{T} = \bar{T}' + \bar{T}'' + \bar{T}''',$$

di cui  $\bar{T}'$  è dovuto al campo delle velocità  $\mathbf{V}'$ ,  $\bar{T}''$  a quello delle velocità  $\mathbf{V}''$  e  $\bar{T}'''$  è un termine misto dato da

$$\bar{T}''' = \rho \int_{\bar{S}} \mathbf{V}' \times \mathbf{V}'' d\bar{S},$$

se  $\rho$  denota la densità del liquido.

La  $\bar{T}'''$  è essenzialmente dovuta alla sovrapposizione dei due campi  $\mathbf{V}'$  e  $\mathbf{V}''$  e può opportunamente qualificarsi l'*interazione cinetica tra vortici e correnti irrotazionali*.

Ebbene, mostreremo che è sempre

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \bar{T}''' = 0,$$

cioè siffatta interazione cinetica tende ad annullarsi quando il campo  $\bar{S}$  tende ad abbracciare tutto l'esterno del solido fisso intorno a cui fluisce il liquido. Ciò vale qualunque sia la concomitante distribuzione dei vortici.

Vedremo in una prossima comunicazione come questo risultato semplifichi la valutazione della resistenza idraulica che sopporta una sfera solida,

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

animata da moto traslatorio uniforme in seno ad una massa liquida estendentesi all'infinito, quando si generalizzi il classico schema di Bénard-Kármán, mediante la considerazione di anelli vorticosi producentisi a valle della superficie sferica.

§ 2. — IL PROBLEMA DEL CALCOLO DI  $\mathbf{V}$  QUANDO SIA NOTO IL VORTICE  $\boldsymbol{\omega}$ .

Prima di esporre il contenuto principale della Nota non è inutile richiamare alcuni risultati intorno alla determinazione del campo delle velocità quando sia assegnato il campo dei vortici.

È noto che si tratta di integrare il sistema di equazioni a derivate parziali

$$(I) \quad \text{rot } \mathbf{V} = 2 \boldsymbol{\omega}$$

$$(II) \quad \text{div } \mathbf{V} = 0$$

con opportune condizioni al contorno.

Il vortice  $\boldsymbol{\omega}$  è dato e soddisfa alla condizione

$$\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0;$$

$\mathbf{V}$  è l'incognita velocità.

Più precisamente, se il liquido riempie lo spazio e se  $\boldsymbol{\omega}$  tende a zero convenientemente con  $1/R$ , si esige che

$$(III) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{V} = 0.$$

Se il liquido riempie lo spazio esterno ad un solido fisso di contorno  $\sigma$ , oltre la (III), deve essere soddisfatta su  $\sigma$  la condizione

$$(III)' \quad V_n = 0$$

che esprime l'annullamento della componente di  $\mathbf{V}$  secondo la generica normale a  $\sigma$ .

Per brevità, i problemi d'integrazione del sistema (I), (II) con le condizioni al contorno (III) e (III)' saranno rispettivamente indicati con le lettere A e B.

Ciò posto, la soluzione del problema A è stata assegnata da Helmholtz nel modo seguente.

Sia  $P'$  il generico punto del campo  $S'$  vorticoso e sia  $r$  la distanza di  $P'$  da un qualunque altro punto  $P$  dello spazio.

Se si denota con  $\boldsymbol{\Omega}$  il potenziale vettore del vortice

$$(I)'' \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{S'} \frac{\boldsymbol{\omega}'}{r} dS',$$



dove  $\omega'$  è il vortice in  $P'$ , la velocità  $\mathbf{V}$  è data da

$$(2) \quad \mathbf{V} = \text{rot } \boldsymbol{\Omega}.$$

La soluzione del problema B si consegue, con Poincaré, riconducendosi al caso A mediante l'introduzione di vortici fittizi distribuiti su di uno strato di piccolo spessore aderente a  $\sigma$  e, per via formale, si può anche stabilire più semplicemente seguendo l'esposizione recente del Pérès<sup>(1)</sup>.

Comunque, interviene accanto al potenziale vettore del vortice un integrale superficiale che implica l'incognita distribuzione delle velocità  $\mathbf{W}'$  al contorno  $\sigma$  (necessariamente tangenziali).

Vale allora la (2) con

$$(1') \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma'} \frac{\omega'}{r} dS' - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{n}' \wedge \mathbf{W}'}{r} d\sigma,$$

dove sotto il segno del secondo integrale  $\mathbf{W}'$  ed  $\mathbf{n}'$  (versore normale a  $\sigma$ ) sono associati ad ogni punto  $P'$  di  $\sigma$ , mentre  $r$  denota la distanza di  $P'$  dal generico punto  $P$  dello spazio esterno a  $\sigma$ .

Ma le ricerche di Birkeland, Delsarte, Villat<sup>(2)</sup> hanno mostrato come la risoluzione di un sistema di equazioni integrali di Fredholm permetta in ogni caso di determinare le velocità  $\mathbf{W}'$ , conoscendo la distribuzione dei vortici, e che effettivamente, quando al posto di  $\mathbf{W}'$  si ponga nella (1') l'espressione ottenuta da siffatta determinazione preventiva, il vettore  $\text{rot } \boldsymbol{\Omega}$  soddisfa alla condizione fondamentale (III)'<sup>(3)</sup>.

### § 3. — SOVRAPPOSIZIONE DI VORTICI ALLA CORRENTE IRROTAZIONALE INTORNO A $\sigma$ .

Ritorniamo ora alle condizioni espresse al § 1 e alle notazioni ivi introdotte.

(1) Cfr. J. PÉRÈS, *Cours de mécanique des fluides*. Paris, Gauthier Villars, 1936.

(2) Cfr. H. VILLAT, *Théorie des tourbillons*. Ch. II, Paris, Gauthier Villars, 1930.

(3) Osserviamo che la determinazione delle velocità  $\mathbf{W}'$  su  $\sigma$  può essere in taluni casi evitata. È ciò che accade, per es., quando  $\sigma$  sia una superficie sferica. Infatti in tal caso il metodo delle immagini consente di associare alla data distribuzione di vortici una distribuzione fittizia di vortici all'interno di  $\sigma$  tale che su  $\sigma$  sia soddisfatta la (III)'. Se  $\omega'$  è il vortice in  $P'$  esterno a  $\sigma$ , se  $O$  è il centro di  $\sigma$  e  $P''$  è l'immagine di  $P'$ , la (III)' è soddisfatta su  $\sigma$  se si suppone che il liquido riempia l'intero spazio e ad  $\omega'$  si associa un vortice  $\omega''$  in  $P''$  dato da  $\omega'' = -\frac{r'^5}{R^5} \omega'$ , dove  $R$  è il raggio della sfera  $\sigma$  ed  $r' = OP'$ .

Per la dimostrazione, cfr. G. LAMPARIELLO, *Un'applicazione del metodo delle immagini ai moti vorticosi*. «Rendiconti Lincei», 1936, vol. XXIII, pp. 426-431.

Il campo delle velocità ottenuto per sovrapposizione della corrente irrotazionale e delle velocità indotte dai vortici è dato da

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{V}'' = \text{grad } \Phi + \text{rot } \boldsymbol{\Omega},$$

dove, se si assume l'asse delle  $x$  parallelo e di verso concorde al vettore costante  $\mathbf{V}_0$ , il potenziale  $\Phi$  è del tipo

$$(3) \quad \Phi = \mathbf{V}_0 x + \Phi_1,$$

essendo  $\Phi_1$  regolare all' $\infty$  e di second'ordine almeno con  $\frac{1}{R}$ ; nel secondo termine di  $\mathbf{V}$  il vettore  $\boldsymbol{\Omega}$  è dato dalla formola generale (1').

Dunque, l'interazione cinetica nel campo  $\bar{S}$  è data da

$$\bar{T}''' = \rho \int_{\bar{S}} \text{grad } \Phi \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\bar{S} = \rho \int_{\bar{S}} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} u'' + \frac{\partial \Phi}{\partial y} v'' + \frac{\partial \Phi}{\partial z} w'' \right) d\bar{S},$$

dove  $u'', v'', w''$  denotano le componenti cartesiane di  $\text{rot } \boldsymbol{\Omega}$ .

Ma, poichè

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} u'' = \frac{\partial (\Phi u'')}{\partial x} - \Phi \frac{\partial u''}{\partial x}, \quad \text{ecc.}$$

si ha anche, notando che  $\text{div rot } \boldsymbol{\Omega} = 0$ ,

$$\bar{T}''' = \rho \int_{\bar{S}} \text{div } (\Phi \text{ rot } \boldsymbol{\Omega}) d\bar{S}$$

e per la formola della divergenza

$$\frac{1}{\rho} \bar{T}''' = \int_{\sigma} \Phi \mathbf{n} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\sigma + \int_{\sigma_{\infty}} \Phi \mathbf{n} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\sigma_{\infty}.$$

In virtù della conclusione del § 2, il primo integrale è nullo e quindi, ponendo al posto di  $\Phi$  l'espressione (1'), si ha

$$\frac{1}{\rho} \bar{T}''' = \mathbf{V}_0 \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\sigma_{\infty} + \int_{\sigma_{\infty}} \Phi_1 \mathbf{n} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\sigma_{\infty}.$$

Il secondo di questi integrali tende a zero con  $\frac{1}{R}$  grazie al comportamento asintotico di  $\text{rot } \boldsymbol{\Omega}$  e  $\Phi_1$  e resta in definitiva da studiare l'integrale

$$(4) \quad L = \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot } \boldsymbol{\Omega} d\sigma_{\infty}.$$

§ 4. — ANNULLAMENTO DELL'INTERAZIONE CINETICA.

Ponendo al posto di  $\text{rot } \mathbf{n}$  l'espressione fornita da (1'), si ha

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot} \int_{S'} \frac{\mathbf{w}'}{r} dS' d\sigma_{\infty} - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot} \int_{\sigma} \frac{\mathbf{n}' \wedge \mathbf{W}'}{r} d\sigma d\sigma_{\infty} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{S'} dS' \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot} \frac{\mathbf{w}'}{r} d\sigma_{\infty} - \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} d\sigma \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot} \frac{\mathbf{n}' \wedge \mathbf{W}'}{r} d\sigma_{\infty}. \end{aligned}$$

Se si osserva che i vettori  $\mathbf{w}'$  ed  $\mathbf{n}' \wedge \mathbf{W}'$  non dipendono da P si è condotti a studiare il comportamento asintotico di un integrale del tipo

$$(5) \quad I = \int_{\sigma_{\infty}} x \mathbf{n} \times \text{rot} \frac{\mathbf{H}'}{r} d\sigma_{\infty},$$

dove  $\mathbf{H}'$  è un vettore applicato ad un punto P' interno alla sfera  $\sigma_{\infty}$  ed  $r$  è la distanza di P' dal generico punto P di  $\sigma_{\infty}$ .

Mostrando che è

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = 0$$

risulta giustificata la tendenza a zero dell'interazione cinetica.

Per rendere più rapida la dimostrazione del nostro asserto, conviene scegliere un sistema cartesiano ortogonale così fatto che l'asse delle  $x$  sia parallelo e di verso concorde alla velocità limite  $\mathbf{V}_0$  della corrente irrotazionale ed il piano Oxy contenga il vettore  $\mathbf{H}'$  applicato nel punto P', con che emergono le due seguenti circostanze di fatto:

- a) la componente  $H'_x$  di  $\mathbf{H}'$  secondo l'asse  $x$  è nulla;
- b) il terzo coseno della direzione OP' è nullo.

Se allora si nota che l'operatore  $\text{rot}$  porta sulle coordinate  $x, y, z$  di P, si riconosce che le componenti di  $\text{rot} \frac{\mathbf{H}'}{r}$  sono

$$-H'_y \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}, \quad H'_x \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}, \quad H'_y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - H'_x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}$$

e quindi se  $\alpha, \beta, \gamma$  denotano i coseni direttori della generica normale a  $\sigma_{\infty}$ , si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \text{rot} \frac{\mathbf{H}'}{r} &= -\alpha H'_y \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} + \beta H'_x \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} + \gamma \left( H'_y \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - H'_x \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) = \\ &= H'_x \left( \beta \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} - \gamma \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r} \right) + H'_y \left( \gamma \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r} - \alpha \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right). \end{aligned}$$

Dunque

$$I = H_x I_1 + H_y I_2,$$

avendo posto

$$I_1 = \int_{\sigma_{\infty}} x \left( \beta \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial \chi} - \gamma \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial y} \right) d\sigma_{\infty}, \quad I_2 = \int_{\sigma_{\infty}} x \left( \gamma \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial \chi} \right) d\sigma_{\infty}.$$

Per trasformare questi integrali si potrebbe applicare il lemma di Green, tenendo presente che la funzione integranda è singolare nel punto  $P'$ , ma si può evitare la singolarità mediante l'uso di un corollario del teorema di Stokes, secondo cui se un vettore  $\mathbf{v}$  è regolare in uno strato includente al suo interno una superficie chiusa regolare  $\Sigma$ , si ha

$$\int_{\Sigma} \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v} d\Sigma = 0.$$

Ciò premesso, si osservi che l'integrando di  $I_1$  è la componente secondo la normale esterna a  $\sigma_{\infty}$  di  $\text{rot } \mathbf{v}$ , essendo  $\mathbf{v}$  il vettore di componenti  $\frac{x}{r}, 0, 0$ . Poichè  $\mathbf{v}$  è regolare in ogni campo che escluda  $P'$ , si ha senz'altro  $I_1 = 0$ .

Volgiamo oramai l'attenzione all'integrale  $I_2$ . Se  $\mathbf{v}$  è questa volta il vettore di componenti  $0, \frac{x}{r}, 0$ , le componenti di  $\text{rot } \mathbf{v}$  sono

$$-x \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial \chi}, \quad 0, \quad \frac{I}{r} + x \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial x}.$$

Si ha dunque

$$\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v} = x \left( \gamma \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \frac{I}{r}}{\partial \chi} \right) + \frac{\gamma}{r}.$$

L'integrando di  $I_2$  è allora  $\mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{v} - \frac{\gamma}{r}$  e quindi, poichè il primo termine, integrato su  $\sigma_{\infty}$  dà contributo nullo, resta

$$I_2 = - \int_{\sigma_{\infty}} \frac{\gamma}{r} d\sigma_{\infty}.$$

Posto  $OP' = \delta$ , se  $\chi$  è l'angolo  $P'OP$ , si ha

$$r^2 = R^2 + \delta^2 - 2 R \delta \cos \chi$$

e quindi, com'è ben noto,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \left( 1 + \sum_{\nu}^{\infty} P_{\nu}(\cos \chi) \left( \frac{\delta}{R} \right)^{\nu} \right),$$

dove  $P_{\nu}$  denota il  $\nu$ -mo polinomio di Legendre. Per il nostro scopo basta considerare solo i primi due termini dello sviluppo di  $\frac{1}{r}$ , poichè gli altri, com'è ovvio, danno ad  $I_2$  contributo tendente a zero per  $R \rightarrow \infty$ .

Poichè  $P_1(x) = x$ , si ha

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\delta}{R^2} \cos \chi + \dots$$

Per il lemma di Green è senz'altro

$$\int_{\sigma_{\infty}} \frac{\gamma}{R} d\sigma_{\infty} = 0.$$

Resta dunque l'integrale

$$\int_{\sigma_{\infty}} \frac{\delta}{R^2} \gamma \cos \chi d\sigma_{\infty} = \frac{\delta}{R^2} \int_{\sigma_{\infty}} \gamma \cos \chi d\sigma_{\infty}.$$

Profittando dell'osservazione *b)* fatta sulla scelta degli assi cartesiani, se  $\alpha', \beta'$ , o sono i coseni direttori di  $OP'$ , si ha

$$\cos \chi = \alpha \alpha' + \beta \beta'$$

e quindi

$$\int_{\sigma_{\infty}} \gamma \cos \chi d\sigma_{\infty} = \alpha' \int_{\sigma_{\infty}} \alpha \gamma d\sigma_{\infty} + \beta' \int_{\sigma_{\infty}} \beta \gamma d\sigma_{\infty}.$$

Gli integrali del secondo membro si annullano, come tosto si riconosce, considerando, per ciascuno di essi, elementi simmetrici rispetto al piano diametrale  $z=0$  (oppure  $x=0$  per il primo e  $y=0$  per il secondo).

Risulta in definitiva

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I = 0, \quad \text{c. d. d.}$$



**Meccanica.** — *Sul vento di gradiente.* Nota di MARIA LOMBARDINI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. GIORGI.

Negli studi di meteorologia dicesi *vento di gradiente* un vento teorico parallelo alle isobare il quale, nel nostro emisfero, sia diretto in modo da lasciare a sinistra la bassa pressione, a destra l'alta pressione, e che abbia il valore assoluto espresso dalle formule:

$$v = r \left( \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{G}{r \rho}} - \omega \sin \varphi \right); \quad v = r \left( \omega \sin \varphi - \sqrt{\omega^2 \sin^2 \varphi - \frac{G}{r \rho}} \right).$$

La prima si considera valida nel caso del ciclone, la seconda dell'anticiclone:  $r$  è il raggio di curvatura della isobara nel punto considerato,  $G$  il valore assoluto del gradiente barico,  $\rho$  la densità dell'aria,  $\omega$  la velocità della rotazione terrestre,  $\varphi$  la latitudine. Per ricavare tali formule si ammette che il vento si muova (rispetto alla terra) di *moto stazionario* piano e orizzontale, privo di attrito, e che tutto il sistema ruoti attorno ad un asse (perpendicolare al piano) con velocità di rotazione costante ed uguale a  $\omega \sin \varphi$ , cioè alla proiezione della velocità di rotazione terrestre sulla verticale del luogo. Tra queste ipotesi semplificatrici quella che maggiormente contrasta con le osservazioni, al suolo, è la mancanza di attrito; e la inattendibilità di questa ipotesi era sufficiente per spiegare lo scostamento fra il calcolo del vento di gradiente e i fatti osservati quando ci si limitava ad osservazioni presso il suolo. Ma se si prendono in esame le osservazioni a quota sufficientemente elevata (per es. superiore ai 1000 m. dal suolo) <sup>(2)</sup>, l'attrito diviene trascurabile, e le equazioni dell'idrodinamica semplificate dovrebbero rappresentare una approssimazione sufficiente. Oggigiorno si hanno le carte meteorologiche a quote diverse, e da tali carte si rileva che anche a distanza

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) La variazione del vento coll'altezza in funzione dell'attrito superficiale e dell'attrito interno dell'aria, viene rappresentata dalla spirale di Ekman (W. EKMAN, *Om jordrotationens inverkan paa vindströmmar i hafvet.* «Nyt Mag f. Natur v.», Bd. 40. H. 1. Kristiania (Oslo), 1902: una chiara dimostrazione si trova in F. J. W. WHIPPLE, *The Laws of approach to the Geostrophic Wind.* «Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society», vol. 46 (1920), p. 42 sgg. Studi italiani su questo argomento si trovano in M. LOMBARDINI, *Attrito interno dell'aria e costante di attrito superficiale alla stazione sperimentale di Vigna di Valle.* Questi «Rendiconti», 1929, vol. IX, 1° sem., fasc. I, p. 63; *Sul calcolo della turbolenza nei bassi strati atmosferici.* «Id.», 1929, vol. IX, 1° sem., fasc. 10, p. 898.

dal suolo esistono discordanze tra il vento osservato e quello definito più sopra; su queste discordanze che non trovano più la loro ragione di essere nell'attrito col suolo sono stati avviati studi da diversi autori<sup>(1)</sup>. Fra questi studi hanno attratto la mia attenzione quelli che danno esempi teorici di moti stazionari con vento che si scosta dal vento di gradiente per intensità e per direzione. Riflettendo su tali ricerche mi è occorso di venire alla conclusione che *tale scostamento per i moti stazionari non è una eccezione ma è una regola assai generale*, talchè il concetto di vento di gradiente, nella comune accezione, viene a perdere gran parte del suo significato.

Nuove conclusioni si presentano però quando si prendono in considerazione anche i moti non stazionari. Questa mia Nota<sup>(2)</sup> ha per oggetto principale lo studio di moti non stazionari con velocità diretta secondo le isobare. A tali moti estendo la denominazione di *vento di gradiente*.

I moti atmosferici orizzontali, stazionari e non stazionari, nelle ipotesi semplificatrici già enunciate, sono retti dalla equazione vettoriale:

$$(1) \quad -\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{d\mathbf{v}}{dt} + 2 \omega_{\varphi} \wedge \mathbf{v}$$

dove  $\rho$  è la densità,  $p$  la pressione,  $\mathbf{v}$  la velocità del vento,  $\omega_{\varphi}$  la componente dalla velocità di rotazione terrestre  $\omega$  sulla verticale del luogo, quindi  $\omega_{\varphi} = \omega \sin \varphi$ , dove  $\varphi$  è la latitudine.

Come è noto, se supponiamo il vento parallelo alle isobare moltiplicando le (1) scalarmente per  $\mathbf{v}$  otteniamo:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} = 0 \quad \text{o anche} \quad \frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = 0$$

dove  $m$  è la massa della particella. Quindi *supporre che il vento sia parallelo alle isobare equivale a supporre la conservazione della forza viva per ogni particella in movimento*. Vale anche la reciproca. Come si vede si tratta semplicemente di un adattamento del *teorema di Bernoulli* ai moti atmosferici orizzontali.

La (1) può anche scriversi:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{dv}{dt} \mathbf{t} + \frac{v^2}{r} \mathbf{n} + 2 \omega_{\varphi} \wedge \mathbf{v}$$

(1) J. MOLLER ha recentemente raccolto nel pregevole articolo *Druckfeld und Wind*, «Meteorologische Zeitschrift», Bd. 53, Heft. 8; Braunschweig, 1936, i lavori suoi e di altri sull'argomento.

(2) Abbiamo preparato lavori più diffusi sull'argomento che verranno pubblicati sulla «Rivista di Meteorologia Aeronautica» edita a cura del Ministero dell'Aeronautica.

dove  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{n}$  sono vettori unitari rispettivamente tangenti e normali alla traiettoria ed  $r$  è il raggio di curvatura della medesima. Ma  $\frac{dv}{dt} = 0$  quindi:

$$-\frac{1}{\rho} \text{grad } p = \frac{v^2}{r} \mathbf{n} + 2 \omega_{\varphi} \wedge \mathbf{v}.$$

I tre vettori che compaiono in questa ultima relazione hanno tutti il medesimo asse, perciò possiamo porre la seguente relazione tra le loro grandezze:

$$(2) \quad \pm \frac{G}{\rho} = \frac{v^2}{\rho} \pm 2 \omega \sin \varphi \cdot v$$

ricordando che abbiamo già posto  $G = |\text{grad } p|$ . Risolvendo la (2) come equazione di secondo grado in  $v$  si ottengono le formule ricordate in principio, ove però bisogna dare ad  $r$  il valore del raggio di curvatura della traiettoria.

Dal punto di vista teorico la differenza tra il nostro calcolo e quello comunemente accettato consiste nell'aver noi preso per base la sola ipotesi che la massa d'aria si muova conservando la propria forza viva, mentre il calcolo in uso si basa su due ipotesi *in generale contraddittorie* e cioè che sia conservata la forza viva e che il moto sia stazionario.

Dal punto di vista pratico, la differenza tra le nostre formule e quelle in uso è notevolissima, perchè il raggio di curvatura delle isobare risulta da una sola carta del tempo, mentre in generale non risulta la traiettoria delle particelle. Questa si può determinare solo approssimativamente in base al confronto di successive carte sinottiche, seguendo il cammino delle diverse masse d'aria.

Che il raggio di curvatura delle isobare, possa essere molto diverso da quello delle traiettorie è noto, e classico l'esempio del moto ondoso. Ad ogni modo possiamo considerare il semplice esempio seguente: sia per ogni punto

$$\mathbf{v} = a\mu (\cos \mu t \cdot \mathbf{i} + \sin \mu t \cdot \mathbf{j})$$

dove  $a, \mu$  sono costanti scalari,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  sono vettori unitari perpendicolari. È:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = a\mu^2 (-\sin \mu t \cdot \mathbf{i} + \cos \mu t \cdot \mathbf{j})$$

quindi

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{v} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{dv}{dt} = 0.$$

Perciò a tale moto si possono applicare le considerazioni precedenti, ma le isobare in ogni istante sono rette parallele e quindi con raggio di curvatura  $\infty$ , le traiettorie sono cerchi con raggio costante ed uguale ad  $\omega$ .

Abbiamo detto che *in generale sono contraddittorie* le due ipotesi: 1° che le masse d'aria si muovano conservando la propria forza viva; 2° che il moto sia stazionario. Per dimostrarlo ci limitiamo, nella presente Nota, al caso di  $\omega_\varphi = \text{costante}$ , cioè che il moto avvenga con non grandi variazioni di latitudine: in tal caso i soli campi isobarici che permettono moti stazionari con vento parallelo alle isobare sono quelli a rette parallele o a cerchi concentrici.

Per dimostrarlo osserviamo che il nostro vento parallelo alle isobare può sempre esprimersi nella forma:

$$\mathbf{v} = \frac{v}{G} \text{grad } p \wedge \mathbf{k}$$

dove  $\mathbf{k}$  è un vettore unitario perpendicolare al piano. Se la traiettoria coincide coll'isobara la pressione è costante per tutto il moto delle particelle, per cui nei moti *piezotropici* (dove cioè per ogni particella  $p$  e  $\rho$  sono legati da una relazione in cui non compaiono altre variabili), deduciamo attraverso la equazione di continuità  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ . Sarà perciò:

$$\begin{aligned} 0 = \text{div } \mathbf{v} &= \text{div} \left( \frac{v}{G} \text{grad } p \wedge \mathbf{k} \right) = \mathbf{k} \times \text{rot} \left( \frac{v}{G} \text{grad } p \right) - \\ &- \frac{v}{G} \text{grad } p \times \text{rot } \mathbf{k} = \mathbf{k} \times \text{rot} \left( \frac{v}{G} \text{grad } p \right) = \\ &= \mathbf{k} \times \left( \frac{v}{G} \text{rot grad } p + \text{grad } \frac{v}{G} \wedge \text{grad } p \right) = \mathbf{k} \times \text{grad } \frac{v}{G} \wedge \text{grad } p. \end{aligned}$$

Ma  $\text{rot} \left( \frac{v}{G} \text{grad } p \right)$  è perpendicolare al piano e perciò parallelo a  $\mathbf{k}$  così che la precedente espressione può annullarsi solo se  $\text{grad } \frac{v}{G}$  e  $\text{grad } p$  sono vettori fra loro paralleli, cioè se  $\frac{v}{G}$  e  $p$  hanno le stesse linee di livello. Siccome sulle isobare è  $p = \text{costante}$ ,  $v = \text{costante}$ , deve anche essere  $G = \text{costante}$ .

Dalla (2) risulta che sarà pure  $r = \text{costante}$ , cioè: quando le isobare e le traiettorie coincidono, possono solo essere rette o cerchi. Dalla costanza di  $G$  si deduce pure che *le rette devono essere parallele e i cerchi concentrici*.

Questo ragionamento cade in difetto quando nel campo considerato vi è una linea (diciamo linea e non superficie perchè supponiamo moti orizzontali) di discontinuità per  $\text{grad } p$  o per  $\mathbf{v}$  e andrebbe allora completato con altre considerazioni analitiche; ma ci sembra di poterci dispensare da

ciò perchè nei campi, come si presentano in natura, ogni caso di discontinuità compare solo come limite di un particolare andamento continuo.

Dai precedenti teoremi si sarebbe tentati di dedurre alcune norme utili per il presagio del tempo. Ma bisogna tener conto che le potenti formazioni bariche si estendono su paesi a diversa latitudine per cui non è lecito considerare senz'altro nella (1)  $\omega_{\varphi} = \text{costante}$ , come abbiamo fatto nel presente calcolo.

Un esame più approfondito del moto stazionario, con forti variazioni di latitudine, sarà esposto in una prossima Nota.

**Meccanica.** — *Sul moto rotazionale dei gas.* Nota di C. POSSIO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. M. PANETTI.

1. In una Nota comparsa nei « Rendiconti » della R. Accademia dei Lincei del 1936, il prof. L. CROCCO ha indicato il modo di risolvere rigorosamente il problema del moto rotazionale permanente di un fluido compressibile perfetto, limitatamente al caso di moto a due dimensioni, cioè di moto piano e moto con asse di simmetria. In questa Nota si vuole indicare come si possa risolvere il caso generale del moto permanente, cioè il moto a tre dimensioni.

Il problema non può più essere risolto, come nel caso trattato dal prof. Crocco, con l'introduzione di una sola funzione delle coordinate del campo di moto, cioè della funzione di corrente: è necessaria l'introduzione di due distinte funzioni. Nello spazio, infatti, l'equazione  $\psi(x, y, z) = \text{cost.}$  rappresenta una famiglia di superfici corrispondenti ciascuna ad un determinato valore della costante: se riusciremo a determinare due funzioni  $\psi$  e  $\chi$  tali che uguagliando ciascuna di esse ad una costante si ottenga una superficie di corrente, ciascuna linea di corrente verrà individuata come intersezione di due superfici  $\psi = \psi_i$ ,  $\chi = \chi_i$  appartenenti alle due famiglie  $\psi = \text{cost.}$ ,  $\chi = \text{cost.}$ , e quindi definita dai due parametri  $\psi_i$  e  $\chi_i$ .

Nel caso del fluido incompressibile, il problema si risolve, com'è noto <sup>(2)</sup>, ponendo:

$$\mathbf{V} = \text{grad } \psi \wedge \text{grad } \chi.$$

È ovvio che da questa posizione segue che il vettore velocità  $\mathbf{V}$  è tangente alle superfici  $\psi = \text{cost.}$ ,  $\chi = \text{cost.}$ , e che esse quindi sono superfici di corrente; inoltre si soddisfa automaticamente all'equazione di continuità, in quanto è identicamente:

$$\text{div}(\text{grad } \psi \wedge \text{grad } \chi) = 0.$$

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) V. *Handbuch der Physik*, Bd. VII, p. 47.



2. Scriviamo le equazioni del moto nella forma data loro dal professor Crocco nella Nota citata:

$$(1) \quad \operatorname{div} [(V_l^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}}] = 0$$

$$(2) \quad \operatorname{rot} \mathbf{V} \wedge \mathbf{V} = \frac{V_s^2}{kR} \operatorname{grad} S,$$

dove  $\mathbf{V}$  è il vettore velocità,  $V$  il suo modulo,  $V_s$  la velocità del suono,  $V_l$  la velocità limite, corrispondente all'espansione adiabatica sino a pressione 0,  $S$  l'entropia del gas,  $R$  la sua costante d'elasticità, e  $k$  l'esponente dell'adiabatica.

Ammettiamo senz'altro che  $V_l$  sia costante in tutto il campo di moto, che cioè il fluido sia isoenergetico, ad es. perchè la corrente all'infinito a monte dell'ostacolo è uniforme. Il caso che il fluido non sia isoenergetico presenta infatti scarso interesse: se d'altra parte, non si volesse fare l'ipotesi di  $V_l$  costante in tutto il campo, si dovrebbe porre, dato che  $V_l$  è, in ogni caso, costante lungo una linea di corrente,  $V_l = f(\psi, \chi)$ , dove  $f$  sarebbe determinata dalle condizioni ai limiti, ciò che non porterebbe che a complicazioni formali alle equazioni che troveremo.

Poniamo:

$$(3) \quad (V_l^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \mathbf{V} = \operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \chi.$$

Con questa posizione, per quello che s'è detto al n. 1, si soddisfa all'equazione di continuità, e  $\psi = \text{cost.}$ ,  $\chi = \text{cost.}$  risultano superfici di corrente. Le componenti della velocità e  $V_s$  si possono così esprimere in funzione delle derivate prime delle  $\psi$  e  $\chi$ . È noto inoltre che la entropia  $S$  del gas, fra due superfici di discontinuità, è costante lungo una linea di corrente: si può perciò scrivere  $S = f(\psi, \chi)$  dove  $f$  ha una forma diversa per ogni diversa zona del campo compresa fra due successive superfici di discontinuità, e viene determinata in corrispondenza di esse dalle equazioni dell'onda d'urto.

In questo modo, tutti i termini della (2) possono essere espressi in funzione delle  $\psi$  e  $\chi$  e delle loro derivate: eseguendo le sostituzioni e proiettando la (2) su due assi normali alla velocità, si ottengono le due equazioni del moto (per la sua forma stessa, la (2), proiettata sulla direzione della velocità, dà luogo ad un'identità).

Per semplicità di trattazione non adotteremo un sistema di riferimento fisso, ma proietteremo la (2), per ogni punto  $A$  del campo di moto, sui due assi  $x$  e  $y$  di un sistema di assi ortogonali, il cui asse  $x$  coincida colla direzione di  $\mathbf{V}$  nel punto  $A$ : è immediato il passaggio da un sistema di riferimento di questo genere ad un altro sistema qualsiasi, in quanto l'orientazione dell'asse  $x$ , cioè di  $\mathbf{V}$ , si ricava subito in funzione delle derivate prime di  $\psi$  e  $\chi$ .

3. Dalla (3) risulta:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{V} &= (V_l^2 - V^2)^{-\frac{1}{k-1}} \cdot \operatorname{rot} (\operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \chi) - \\ &- (\operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \chi) \wedge \operatorname{grad} (V_l^2 - V^2)^{-\frac{1}{k-1}}. \end{aligned}$$

Dobbiamo ora ricavare dalla stessa (3), le espressioni in funzione di  $\psi$  e  $\chi$  dei vari termini che compaiono nell'espressione di  $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ .

La componente secondo l'asse  $x$  di  $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \chi)$ , ricordando che per la scelta fatta dell'asse  $z$  è  $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0$ , vale:

$$\left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x} - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y}.$$

Quella secondo l'asse  $y$  si ricava dall'espressione precedente, scambiando  $x$  in  $y$  e viceversa.

La componente secondo l'asse  $x$  di  $\operatorname{grad} (V_l^2 - V^2)^{-\frac{1}{k-1}}$  è:

$$\frac{2}{k-1} \frac{V}{(V_l^2 - V^2)^{\frac{k}{k-1}}} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Basta quindi ricavare il valore di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ . Per questo, moltiplichiamo la (3) scalarmente per se stessa, e deriviamo rispetto a  $x$ . Si ottiene:

$$(V_l^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}} \cdot \left( 1 - \frac{V^2}{V_s^2} \right) \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Introducendo i valori così trovati nell'espressione di  $\operatorname{rot} \mathbf{V}$ , e sostituendo nel secondo termine di essa a  $\operatorname{grad} \psi \wedge \operatorname{grad} \chi$  il valore dato dalla (3), ricaviamo immediatamente dalla (2) le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} (4) \quad & \left( 1 - \frac{V^2}{V_s^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} - \\ & - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} = \\ & = \frac{k-1}{2kRV} \left( 1 - \frac{V^2}{V_s^2} \right) (V_l^2 - V^2)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (5) \quad & \left( 1 - \frac{V^2}{V_s^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} = \\ & = \frac{k-1}{2kRV} \left( \frac{V^2}{V_s^2} - 1 \right) (V_l^2 - V^2)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nel caso di moto a due dimensioni le equazioni si riducono, com'è naturale, a quelle ricavate dal prof. Crocco: vediamo, ad esempio, il caso del moto piano. In questo caso l'asse  $z$  è contenuto nel piano del moto: poniamo l'asse  $y$  normale a questo piano. Si deve allora porre  $\chi = y$ , con che la (4) si riduce alla forma:

$$-\left(1 - \frac{V^2}{V_s^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \chi^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{k-1}{2kRV} \left(1 - \frac{V^2}{V_s^2}\right) (V_1^2 - V^2)^{\frac{k}{k-1}} \cdot \frac{\partial S}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

In questo caso è per la (3)  $(V_1^2 - V^2)^{\frac{1}{k-1}} \cdot V = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ : eseguendo la sostituzione è facile verificare che l'equazione scritta coincide con quella data dal prof. Crocco, notando che, per la scelta fatta degli assi coordinati, la componente secondo l'asse  $x$  della velocità è nulla.

4. Quando la velocità è ovunque superiore alla velocità del suono, si può procedere ad una soluzione passo per passo, col metodo delle caratteristiche in un modo analogo a quello indicato per il moto irrotazionale a tre dimensioni dal prof. Ferrari<sup>(1)</sup>.

Vediamo anzitutto come esistano le superfici caratteristiche del sistema di equazione scritto, e come esse siano l'involuppo dei coni di Mach che da ogni punto propagano la perturbazione elementare in esso creata. Indichiamo, per semplicità, con  $x_1, x_2, x_3$  le coordinate  $x, y, z$ , con  $w(x_1, x_2, x_3)$  l'equazione delle superfici caratteristiche, e poniamo  $p_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}$ . È allora<sup>(2)</sup>:

$$\begin{vmatrix} \sum_{ik} E_{1\psi}^{ik} p_i p_k & \sum_{ik} E_{1\chi}^{ik} p_i p_k \\ \sum_{ik} E_{2\psi}^{ik} p_i p_k & \sum_{ik} E_{2\chi}^{ik} p_i p_k \end{vmatrix} = 0$$

dove  $E_{1\psi}^{ik}$  è il coefficiente di  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k}$  nella prima equazione,  $E_{2\psi}^{ik}$  è il coefficiente della stessa derivata nella seconda equazione, ..., secondo le notazioni dell'opera citata.

Introducendo i valori delle  $E$ , sviluppando e dividendo per

$$\frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

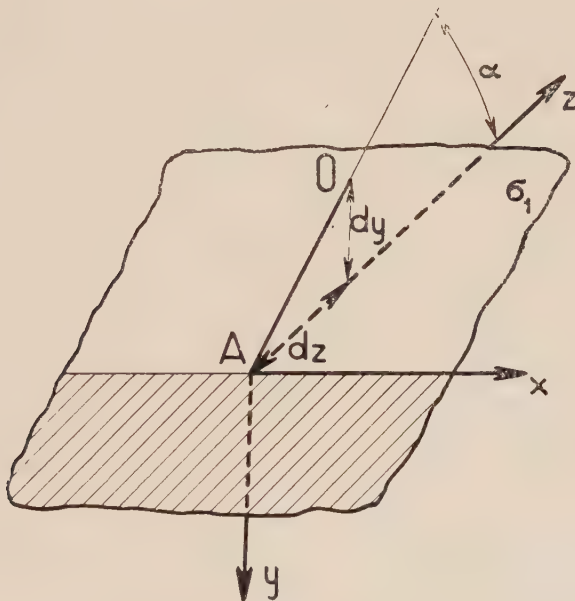
che non si annulla se non quando  $V = 0$ , si trova

$$p_3^2 \left( p_1^2 + p_2^2 + \left(1 - \frac{V^2}{V_s^2}\right) p_3^2 \right) = 0.$$

(1) C. FERRARI, *Determinazione delle pressioni sopra solidi di rivoluzione a prora acuminata*. « Atti Acc. Scienze Torino », vol. 72.

(2) LEVI-CIVITA, *Caratteristiche dei sistemi differenziali e propagazione ondosa*, pp. 9 e 13.

La soluzione  $p_3 = 0$  non ci dà una superficie caratteristica; essa interviene soltanto in quanto, eseguendo una trasformazione di coordinate che porti il piano  $xy$  a trasformarsi in una superficie tangente all'asse  $z$ , cioè alla velocità, una delle due equazioni scritte si riduce all'identità, e una delle orizzontali del determinante si annulla. L'altra soluzione è quella che ci interessa: si vede subito che per  $V < V_s$  le superfici caratteristiche sono immaginarie, e per  $V > V_s$  il coseno dell'angolo formato dalla normale alla caratteristica coll'asse  $z$ , cioè con  $\mathbf{V}$ , vale  $\pm \frac{V_s}{V}$ , e quindi le caratteristiche non sono altro che l'involuppo dei coni di Mach.



Vediamo ora l'applicazione del metodo delle caratteristiche. Con questo metodo, note le  $\psi$  e  $\chi$  e le loro derivate prime in una zona  $a$  del campo, si procede alla determinazione dei valori che le derivate prime di  $\psi$  e  $\chi$  assumono in un punto  $O$  molto prossimo alla zona  $a$ , passando da un punto  $A$  di  $a$  al punto  $O$ , lungo un archetto  $AO$  appartenente ad una superficie caratteristica. Consideriamo una caratteristica  $\sigma_1$ , e supponiamo di conoscere le  $\psi$  e  $\chi$  e le loro derivate prime in tutta la zona tratteggiata; disponendo l'asse  $x$  tangente alla  $\sigma_1$  l'intersezione  $AO$  del piano  $yx$  colla  $\sigma_1$  forma coll'asse  $z$  l'angolo  $\alpha = \arcsin \pm \frac{V_s}{V}$ :  $AO$  risulta cioè una generatrice del cono di Mach di vertice  $A$ . In queste condizioni si vogliono determinare le componenti, secondo tre direzioni date, di  $\text{grad} \psi$  e  $\text{grad} \chi$  nel punto  $O$ . Essendo noti i valori delle derivate prime nei punti dell'asse  $x$ , si conoscono

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z}$  e le analoghe derivate della  $\chi$  in A: sono quindi senz'altro noti in O  $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \chi}{\partial x}$ . Possiamo poi trovare una relazione in grazia dell'equazione del moto. Siccome ci spostiamo su AO, è, notando che in figura  $dy$  è  $< 0$ ,

$$d\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} dz - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \frac{dz}{\sqrt{\frac{V^2}{V_s^2} - 1}}$$

$$d\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} dz - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \frac{dz}{\sqrt{\frac{V^2}{V_s^2} - 1}}$$

da cui si ricava

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{1}{\sqrt{\frac{V^2}{V_s^2} + 1}} \frac{d}{dz} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{1}{\frac{V^2}{V_s^2} - 1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}.$$

Sostituiamo il valore così trovato di  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ , e il valore che si ricava in modo analogo di  $\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}$  nella (5); si ottiene:

$$\left(1 - \frac{V^2}{V_s^2}\right) \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x} d\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} d\left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right) \right] - \sqrt{\frac{V^2}{V_s^2} - 1} \left[ \frac{\partial \chi}{\partial x} d\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} d\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) \right] = B d\chi,$$

dove B è una funzione delle derivate prime, in cui i valori vanno presi in A, e quindi sono noti, e delle due derivate seconde  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \chi}{\partial x \partial y}$  che, come s'è detto sopra, sono pure note. Otteniamo così, colla considerazione della  $\sigma_1$  una relazione che unita alla conoscenza di  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  e  $\frac{\partial \chi}{\partial x}$  in O, ci dà tre relazioni fra le sei incognite (componenti di  $\text{grad } \psi$  e  $\text{grad } \chi$ ). Applichiamo poi lo stesso procedimento ad un'altra superficie caratteristica  $\sigma_2$  passante per O: considerando lo spostamento  $A_2 O$  su una generatrice del cono di Mach uscente da  $A_2$ , e tenendo conto della conoscenza di  $\frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \frac{\partial \chi}{\partial x_2}$  in O (derivate parziali rispetto alla direzione  $x_2$ , che è diversa da quella  $x$  sopra considerata, in quanto  $\sigma_2$  è distinto da  $\sigma_1$ ) si hanno altre tre relazioni che individuano completamente le sei incognite.

5. Resta da indicare come si possano utilizzare le condizioni ai limiti. Il caso più semplice sarebbe quello in cui si conoscessero velocità e con-



dizioni fisiche del fluido in ogni punto d'una superficie  $\tau$  intersecante le linee di corrente. In queste condizioni, per ogni punto di  $\tau$  sono noti  $S$  e  $\text{grad } \psi \wedge \text{grad } \chi$ . Fissiamo su  $\tau$  in modo arbitrario le linee  $\chi = \text{cost.}$ :  $\text{grad } \chi$  ne risulta così determinato, in quanto deve essere contenuto nel piano  $p$  normale a  $\mathbf{V}$ . Conoscendo  $\text{grad } \psi \wedge \text{grad } \chi$ , si ricava immediatamente  $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ , dove  $n$  è la normale a  $\text{grad } \chi$  contenuta nel piano  $p$ : se fissiamo arbitrariamente su  $\tau$  una prima linea  $\psi = \text{cost.}$  si determinano senz'altro  $\psi$  e  $\text{grad } \psi$  in ogni punto. In questo modo si ottiene immediatamente l'espressione della funzione  $S = f(\psi, \chi)$ , e, considerando le perturbazioni che si propagano a partire dalla parete dell'ostacolo, si può procedere passo per passo lungo le caratteristiche. Un problema, in cui ci si troverebbe in queste condizioni, è quello di un solido a prora conica disposto in piccola deriva: in tali condizioni, il campo di moto attorno alla prora conica è stato determinato rigorosamente dal prof. Ferrari nella Nota già citata, e quindi conosciamo le condizioni del fluido sulla superficie caratteristica  $\sigma$  che si appoggia allo spigolo che limita la prora conica.

Resta solo da vedere come si possa determinare la forma dell'onda d'urto a partire dall'intersezione dell'onda conica corrispondente alla prora colla  $\sigma$ : il modo di procedere è la naturale estensione di quello che si deve fare per un campo di moto a due dimensioni. Consideriamo una caratteristica  $\sigma_1$  prossima alla  $\sigma$ : non si conosce l'intersezione della  $\sigma_1$  coll'onda, e si vuole appunto determinare il piano tangente all'onda d'urto in quell'intorno. Un piano nello spazio è individuato da tre parametri: avremo quindi tre incognite, in funzione delle quali risultano determinate dalle equazioni dell'onda d'urto l'entropia e le componenti della velocità. Abbiamo visto sopra come dalla considerazione di uno spostamento su una caratteristica si ricavano tre relazioni fra le variazioni di  $\text{grad } \psi$  e  $\text{grad } \chi$ : con queste tre relazioni possiamo determinare i sei valori delle componenti di  $\text{grad } \psi$  e  $\text{grad } \chi$ . Il modo di procedere è identico a quello indicato sopra per determinare, per ogni punto della  $\tau$ , i sei valori delle componenti di  $\text{grad } \psi$  e  $\text{grad } \chi$  per mezzo delle tre componenti di  $\text{grad } \psi \wedge \text{grad } \chi$ .

Nel caso in cui nulla si conosca *a priori* della forma dell'onda d'urto, conviene considerare il problema inverso che ha, per quello che si è detto sopra, soluzione immediata; conviene cioè prefissare una serie di forme d'urto, e ricavare in corrispondenza il campo di moto: ne risulta così tutta una serie di forme dell'ostacolo. Se si vuole invece risolvere il problema diretto, non si vede altro procedimento che quello per successivi tentativi.

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota III di G. COLONNETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Astronomia.** — *Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934.* Nota II di G. L. ANDRISSI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio G. ARMELLINI.

In una Nota precedente<sup>(2)</sup> ho dato conto delle osservazioni di latitudine da me eseguite presso il R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio, con un strumento dei passaggi Bamberg, usando il ben noto metodo di Horebow-Talcott. Nella stessa Nota mi ripromettevo di esporre in altre successive, i risultati della discussione delle latitudini concluse per il R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934, usando lo stesso metodo ed strumento.

In questa Nota sono riportate le osservazioni eseguite nel periodo 1920-34 dai seguenti osservatori: G. Armellini<sup>(3)</sup>, G. Conti<sup>(4)</sup>, M. Crenna<sup>(5)</sup>, G. AndriSSI<sup>(6)</sup>, L. Gialanella<sup>(7)</sup>, previa riduzione delle declinazioni allo stesso sistema fondamentale *Newcomb-Eichelberger* e dopo avere rifatte tutte le correzioni per la inclinazione, rifrazione, e curvatura del parallelo in modo di avere un sistema omogeneo di valori della latitudine da poter prendere in esame per lo studio della variazione che farò in una successiva Nota. Mi limito quindi, per ora, a dare il valore medio della latitudine del pilastrino del Bamberg del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio, quale risulta dalla media delle 747 osservazioni prese in esame e compiute dal 1920 al 1934:

$$\varphi = 41^{\circ} 53' 33'', 52$$

(1) Nella seduta del 7 marzo 1937.

(2) G. L. ANDRISSI, *Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934.* Questi « Rendiconti », vol. XXI, ser. 6<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 3.

(3) G. ARMELLINI, *Nuova determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio.* Nota I-II. Questi « Rendiconti », vol. XXIX, ser. 5<sup>a</sup>, 2<sup>o</sup> semestre.

(4) G. CONTI, *Determinazioni della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio.* Questi « Rendiconti », vol. XXXII, ser. 5<sup>a</sup>, 1<sup>o</sup> sem.; *Contributo allo studio della variazione della latitudine.* Questi « Rendiconti », vol. XV, ser. 6<sup>a</sup>.

(5) M. CRENNNA, *Osservazioni sopra la variazione della latitudine del Campidoglio.* Questi « Rendiconti », vol. I, ser. 6<sup>a</sup>.

(6) G. L. ANDRISSI, cfr. Nota citata.

(7) L. GIALANELLA, *Nuova determinazione della latitudine ecc.* Questi « Rendiconti », vol. XIX, ser. 6<sup>a</sup>.

Nelle riduzioni, come valore medio di una divisione delle livelle tal-cottiane ho adottato il valore  $1''$ , 142 e per il calcolo della curvatura del parallelo ho adottato per la distanza media dei due fili laterali dal filo centrale il valore  $23^s,75$ .

Da una lunga serie di trenta anni di determinazioni, iniziate dal Respighi e continuate da A. Di Legge e F. Giacomelli, risulta <sup>(1)</sup> come valore medio della latitudine del cerchio meridiano del Campidoglio:  $\varphi = 41^\circ 53' 33'',59$ . Tenendo presente che tale strumento si trova m. 2,95 più al Nord del pilastro del Bamberg, si avrebbe come latitudine di questo ultimo:

$$\varphi = 41^\circ 53' 33'',49$$

in ottimo accordo col valore ora concluso.

Nella tabella che segue ho riportato: nella prima colonna, la data delle osservazioni; nella seconda colonna, il numero delle coppie osservate; nella terza colonna, la media delle latitudini, concluse nella sera indicata. Nelle Note a piè della pagina sono riportati i nomi degli osservatori <sup>(2)</sup>.

(1) Cfr. A. DI LEGGE e F. GIACOMELLI, *Catalogo di declinazioni medie di 1419 stelle*, p. XVII (Roma, Tip. Reale Acc. Lincei, 1902), dove le declinazioni delle stelle usate per la latitudine possono essere considerate come assolute.

(2) Secondo la triangolazione di Roma, eseguita dal prof. V. Reina, prendendo come origine la Torre del Primo Meridiano, a Monte Mario, l'asse delle  $x$  diretto verso Est e l'asse  $y$  verso Nord, le coordinate dell'asse della Torre del Palazzo Senatorio del Campidoglio sarebbero

$$x = + 2610,17 \text{ m. ; } y = - 3484,05 \text{ m.}$$

onde le coordinate del pilastro dell'invertibile Bamberg del Campidoglio, a cui si riferiscono tutte queste determinazioni, sono:  $x = + 2637,07 \text{ m. ; } y = - 3474,00 \text{ m.}$

Ne segue come valore della latitudine media della Torre del Primo Meridiano

$$\varphi = 41^\circ 55' 26'',13$$

valore che differisce di  $0''$ , 65 da quello trovato nel 1905 dal prof. A. Di Legge ( $\varphi = 41^\circ 55' 25'',48$ ) con una determinazione eseguita per mezzo di osservazioni in primo verticale, servendosi però come orologio di un semplice cronometro da marina e declinazioni riferite al sistema dell'Auwers. Cfr. V. REINA, *Triangolazione della città di Roma* (« Rivista di Topografia e Catasto », 1896); A. DI LEGGE, *Determinazione della latitudine di Monte Mario* (Bologna, Gamberini, 1909).

Osserviamo che, ammettendo rigorosa la latitudine del DI LEGGE, si avrebbe come componente lungo il meridiano della deviazione della verticale, tra il Campidoglio e Monte Mario, il valore  $0''$ , 65: valore che è in ottimo accordo con precedenti ricerche. Cfr. E. BIANCHI, *La deviazione della verticale*. « Comm. Geod. », 1911.

TABELLA I.

Data	N	φ	Data	N	φ	Data	N	φ
1920 <sup>(1)</sup>		41° 53'	1920		41° 53'	1923		41° 53'
Marzo 23	2	33'' .04	Giugno 18	2	33'' .79	Febbraio 27	4	33'' .23
» 24	3	32 .96	» 20	3	33 .93	» 28	2	33 .25
» 25	2	33 .50	» 21	2	33 .09	Marzo 1	2	33 .64
» 26	5	33 .21	» 22	3	33 .61	» 2	1	32 .59
» 27	3	33 .06	» 23	2	33 .77	» 5	7	33 .17
» 28	3	33 .28	» 24	1	33 .79	» 7	5	33 .31
» 29	1	33 .50	» 26	2	33 .26	» 8	2	33 .17
» 31	3	33 .28	» 27	1	33 .23	» 10	4	33 .41
Aprile 1	5	33 .48	» 28	1	33 .39	» 11	3	33 .29
» 3	1	32 .87	1923 <sup>(2)</sup>			» 12	1	33 .63
» 4	7	33 .11	Gennaio 22	2	33 .29	» 13	2	33 .35
» 5	6	33 .56	» 25	2	33 .75	» 14	1	33 .37
» 6	7	33 .53	» 26	2	33 .28	» 16	5	33 .22
» 7	5	33 .40	» 27	3	32 .85	» 17	1	33 .15
» 8	7	33 .65	» 28	2	33 .65	» 18	1	33 .30
Maggio 3	4	33 .62	» 30	3	33 .62	» 19	1	33 .53
» 4	1	34 .17	» 31	3	33 .35	» 21	1	33 .34
» 5	4	33 .73	Febbraio 1	3	32 .88	» 22	2	33 .20
» 6	2	33 .53	» 7	4	33 .05	» 23	1	33 .62
» 8	4	33 .46	» 9	2	32 .65	» 24	4	33 .40
» 9	4	33 .55	» 10	4	33 .10	» 25	2	33 .32
Giugno 5	1	34 .36	» 12	5	33 .59	» 26	2	33 .10
» 6	3	33 .81	» 13	2	33 .02	» 27	4	33 .42
» 7	3	33 .78	» 15	4	33 .30	» 30	1	33 .88
» 11	3	33 .63	» 16	4	33 .48	Aprile 1	1	33 .21
» 12	4	33 .62	» 18	5	33 .31	» 2	1	33 .62
» 13	2	33 .40	» 21	3	33 .46	» 3	1	33 .21
» 14	4	33 .45	» 22	6	33 .29	» 4	1	33 .33
» 15	2	33 .86	» 25	4	33 .44	» 5	1	33 .55
» 16	1	33 .08	» 26	6	33 .33	» 7	1	34 .15

(1) GIUSEPPE ARMELLINI.

(2) GABRIELLA CONTI.

segue TABELLA I.

Data	N	φ	Data	N	φ	Data	N	φ
1923		41° 53'	1924		41° 53'	1926		41° 53'
Aprile 10	1	33".38	Novembre 19	2	33".33	Dicembre 19	4	33".53
» 11	1	33 .51	» 21	3	33 .64	» 21	3	33 .33
» 18	1	32 .77	» 22	2	33 .08	» 30	1	33 .36
1924 <sup>(1)</sup>			» 23	2	33 .29	» 31	2	33 .54
Ottobre 2	1	34 .33	» 24	3	33 .54	1927		
» 3	1	33 .75	» 25	2	34 .04	Gennaio 18	2	34 .01
» 4	3	33 .81	» 26	2	32 96	» 23	1	33 .68
» 5	2	33 .74	» 27	1	33 .63	» 24	2	33 .84
» 6	2	33 .77	» 29	1	32 .60	» 26	4	33 .14
» 7	2	33 .86	» 30	3	33 .61	» 27	3	33 .78
» 8	2	33 .78	Dicembre 1	2	33 .01	» 28	4	34 .18
» 9	3	33 .57	1926 <sup>(2)</sup>			Febbraio 2	2	34 .03
» 10	2	33 .81	Marzo 12	3	33 .73	» 4	3	33 .67
» 11	3	33 .54	» 13	2	33 .13	» 5	3	33 .87
» 12	2	33 .92	Luglio 4	1	33 .62	» 9	1	33 .57
» 13	4	33 .18	» 10	3	33 .53	» 16	2	34 .40
» 14	4	33 .84	» 16	2	33 .92	» 17	1	34 .12
» 15	3	33 .71	» 17	2	34 .12	Marzo 7	3	33 .60
» 16	2	33 .08	» 19	2	33 .47	» 9	5	33 .64
» 17	2	32 .80	» 21	1	33 .01	» 11	2	33 .34
» 18	2	33 .29	Novembre 26	2	33 .41	» 15	5	33 .38
» 21	2	33 .47	Dicembre 3	2	33 .19	» 16	5	33 .39
» 23	2	33 .19	» 8	1	33 .18	» 17	3	33 .47
» 25	3	33 .41	» 9	1	34 .16	» 18	4	33 .76
» 29	3	33 .73	» 10	3	33 .86	» 19	4	33 .37
» 31	2	33 .61	» 11	3	33 .21	» 20	1	34 .12
Novembre 3	1	33 .04	» 13	1	33 .53	» 21	2	32 .89
» 4	4	33 .48	» 14	1	33 .85	» 28	1	34 .20
» 5	1	33 .38	» 16	4	33 .99	» 29	2	32 .83
» 6	2	33 .56	» 17	2	33 .42	» 30	3	33 .98

(1) MARIO CRENNÀ.

(2) GABRIELLA CONTI.



segue TABELLA I.

Data	N	φ	Data	N	φ	Data	N	φ
1927		41° 53'	1928		41° 53'	1928		41° 53'
Marzo 31	1	33'' .51	Marzo 30	1	34'' .29	Agosto 10	4	33'' .85
Aprile 2	1	34 .11	Aprile 4	2	33 .13	» 14	1	34 .01
» 3	2	33 .62	» 22	1	33 .91	» 16	1	32 .25
» 4	2	33 .17	» 26	1	32 .86	» 18	1	33 .71
» 5	2	33 .90	Maggio 2	1	33 .51	» 20	1	33 .41
» 6	1	34 .28	» 3	5	33 .48	» 21	2	33 .70
» 7	2	34 .02	» 12	2	33 .38	» 24	3	33 .67
» 8	1	33 .82	» 24	2	33 .21	» 25	1	33 .25
» 25	3	33 .46	» 25	2	33 .45	» 27	1	34 .24
» 26	2	33 .60	» 26	2	32 .96	Novembre 2	2	33 .20
» 28	3	33 .99	» 27	3	33 .46	» 9	1	32 .98
» 29	2	33 .90	» 29	1	34 .01	» 13	2	33 .65
» 30	3	33 .34	» 30	2	32 .78	» 14	2	33 .97
Maggio 9	1	33 .20	» 31	1	33 .67	» 15	3	33 .82
» 18	1	33 .42	Giugno 1	1	33 .68	» 17	1	32 .81
» 22	1	33 .17	» 4	2	33 .29	» 19	2	33 .66
1928			» 7	2	33 .79	» 28	1	33 .76
Febbraio 1	1	34 .48	» 8	3	33 .22	» 30	2	33 .53
» 4	3	33 .79	» 9	3	33 .66	Dicembre 1	1	34 .16
» 5	3	33 .78	» 11	3	33 .65	» 3	1	33 .50
» 6	2	33 .94	» 12	2	33 .69	» 5	2	33 .84
» 8	2	33 .76	» 14	1	32 .91	» 14	1	33 .51
» 12	1	33 .43	» 15	3	33 .42	» 19	3	33 .65
» 13	2	33 .63	» 18	2	33 .44	» 20	1	33 .51
» 23	2	33 .46	» 23	2	33 .32	1931 (1)		
Marzo 9	1	33 .44	» 24	2	33 .61	Gennaio 12	2	33 .56
» 12	3	33 .22	» 25	1	33 .66	» 17	3	33 .88
» 18	3	33 .48	Agosto 3	3	33 .62	Febbraio 2	3	33 .57
» 19	3	33 .51	» 6	2	34 .21	» 5	1	34 .11
» 29	2	33 .01	» 8	1	33 .84	» 9	4	33 .68

(1) G. ANDRISSI.

segue TABELLA I.

Data	N	φ	Data	N	φ	Data	N	φ
1931		41° 53'	1931		41° 53'	1933		41° 53'
Febbraio 10	6	33'' .72	Maggio 16	6	33'' .78	Settembre 30	3	33'' .32
Marzo 14	1	33 .58	» 21	4	33 .72	Ottobre 2	3	33 .41
» 27	3	33 .75	» 22	5	33 .89	» 4	4	33 .32
Aprile 8	2	33 .87	Giugno 2	5	33 .82	» 5	3	33 .28
» 9	3	33 .57	» 3	5	33 .71	» 7	5	33 .45
» 11	2	33 .66	» 25	2	33 .76	» 8	1	33 .24
» 14	2	33 .71	» 27	2	33 .68	» 11	5	33 .45
» 16	2	33 .70	Luglio 7	1	33 .65	» 12	3	33 .26
» 17	3	33 .55	» 9	2	33 .41	» 15	2	33 .22
» 28	1	33 .59	1933 (1)			» 16	2	33 .37
Maggio 4	6	33 .58	Settembre 24	2	33 .04	» 18	2	33 .59
» 12	4	33 .72	» 25	2	33 .58	» 19	4	33 .74
» 13	7	33 .75	» 26	3	33 .39			
» 15	5	33 .62	» 29	3	33 .53			

(1) L. GIALANELLA.

**Fisica.** — *Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt.* Nota I di S. FRANCHETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TIERI.

Lo studio del frenamento degli elettroni nella materia ha preso in questi ultimi anni un'importanza particolare specialmente in quanto uno dei metodi più in uso per la determinazione dell'energia dei raggi  $\gamma$  è fondato appunto sull'assorbimento degli elettroni secondari ottenuti da questi raggi.

Generalmente, e in specie quando l'intensità è sufficiente, si preferisce dedurre l'energia dallo spessore minimo di assorbente che è necessario mettere sul percorso della radiazione  $\beta$  perchè questa non dia più effetto sensibile negli apparecchi di rivelazione.

Si presenta perciò come un problema di un certo interesse la determinazione precisa della penetrazione degli elettroni in funzione dell'energia iniziale, specialmente per quelle energie fra circa 2 e, diciamo, 10 milioni di e. V. che s'incontrano più frequentemente per i raggi  $\gamma$  che accompagnano le reazioni nucleari e per le quali i dati sperimentali sono scarsi o mancanti.

Il problema della perdita di energia degli elettroni attraverso la materia è stato trattato, come è noto, da diversi Autori e in particolare da Bethe <sup>(2)</sup>, Bloch <sup>(3)</sup>, Moller <sup>(4)</sup> e Williams <sup>(5)</sup>. Qui ho adoperato la formula di Williams-Bethe, come la più completa senza esser troppo complicata. In questa non si tiene conto della irradiazione per frenamento, ma come risulta da lavori successivi <sup>(6)</sup>, questo effetto non interviene in modo sensibile nella regione di energia che ci interessa se l'elemento attraversato è un elemento leggero (per es. Al). Si tratta della formula (1) del lavoro di Bethe del 1932, che si può scrivere

$$(1) \quad -\frac{dW}{dx} = \frac{2\pi e^4 NZ}{mv^2} \left( \log \frac{2mv^2 E_m}{\bar{E}^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} - \frac{v^2}{c^2} \right)$$

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) H. BETHE, «Ann. der Phys.», 5, 325 (1930); «Zs. f. Phys.», 76, 293 (1932).

(3) BLOCH, «Ann. der Phys.», 16, 313 (1933).

(4) C. MOLLER, «Zs. f. Phys.», 70, 786 (1931).

(5) E. J. WILLIAMS, «Proc. Roy. Soc. Lond.», 130, 310, 328 (1931) e 135, 108 (1932) ecc.

(6) Vedi: BETHE e HEITLER, «Proc. Roy. Soc. Lond.», 146, 83 (1934) e G. RACAH, «N. Cim.», 11, 477 (1934).

che dà la diminuzione per cm. di percorso dell'energia cinetica  $W$  di un elettrone di velocità  $v$  nel suo passaggio attraverso una sostanza che contiene per ogni cm<sup>3</sup>  $N$  atomi di numero atomico  $Z$ ; essendo  $m$  la massa di riposo dell'elettrone; mentre  $\bar{E}$  è l'energia media di eccitazione degli atomi ed  $E_m$  la massima perdita in un singolo urto. Con l'aiuto di relazioni note (per il calcolo di  $E_m$ ; ved. il lavoro di Bethe) e con la posizione

$$(2) \quad \frac{W}{mc^2} + 1 \doteq u$$

la (1) si trasforma in

$$-\frac{du}{dx} = \frac{2\pi e^4 NZ}{m^2 c^4} \left[ \frac{u^2}{u^2 - 1} \log \frac{4\pi e^4 NZ}{\bar{E}^2} R' u^2 - 1 \right] = f(u)$$

dove  $R'$  è la penetrazione degli elettroni valutata in una prima approssimazione.

Siccome si ha evidentemente

$$(3) \quad x_{\text{mass.}} = - \int_{u_0}^1 \frac{du}{f(u)} = R$$

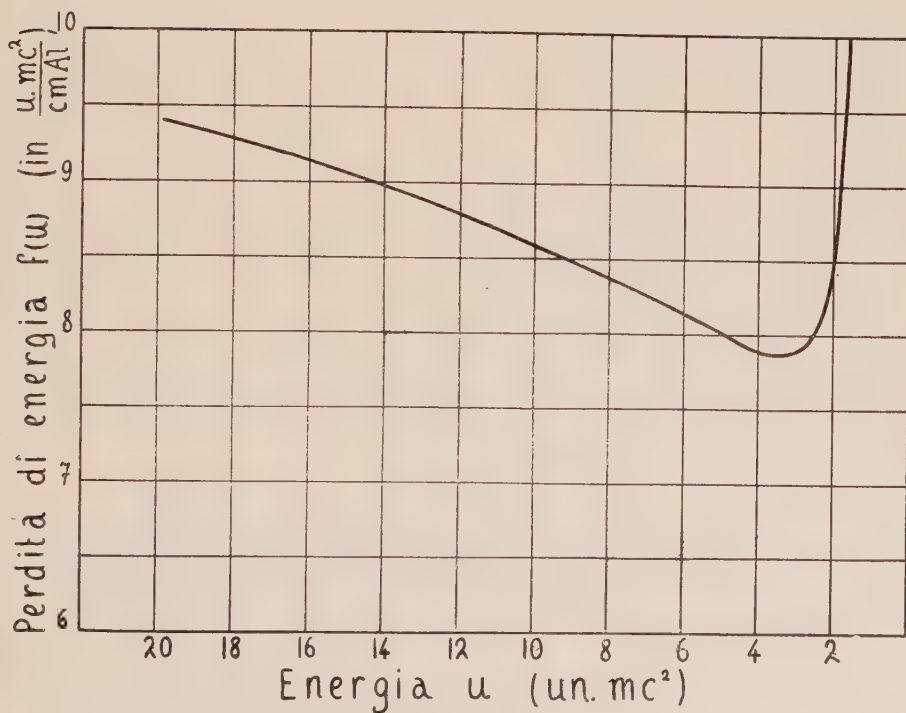


Fig. 1.

è ovvio calcolare, quando si conosca  $\bar{E}$  ed  $R'$ , l'esatto valore  $R$  della penetrazione in funzione dell'energia iniziale, portando  $f(u)$  in (3) ed eseguendo l'integrazione con un metodo grafico o numerico.

Ho fatto questa integrazione per il caso che l'assorbente sia Al, prendendo per  $\bar{E}$  il valore 43 volt ottenuto per interpolazione in un grafico  $\bar{E}$ ,

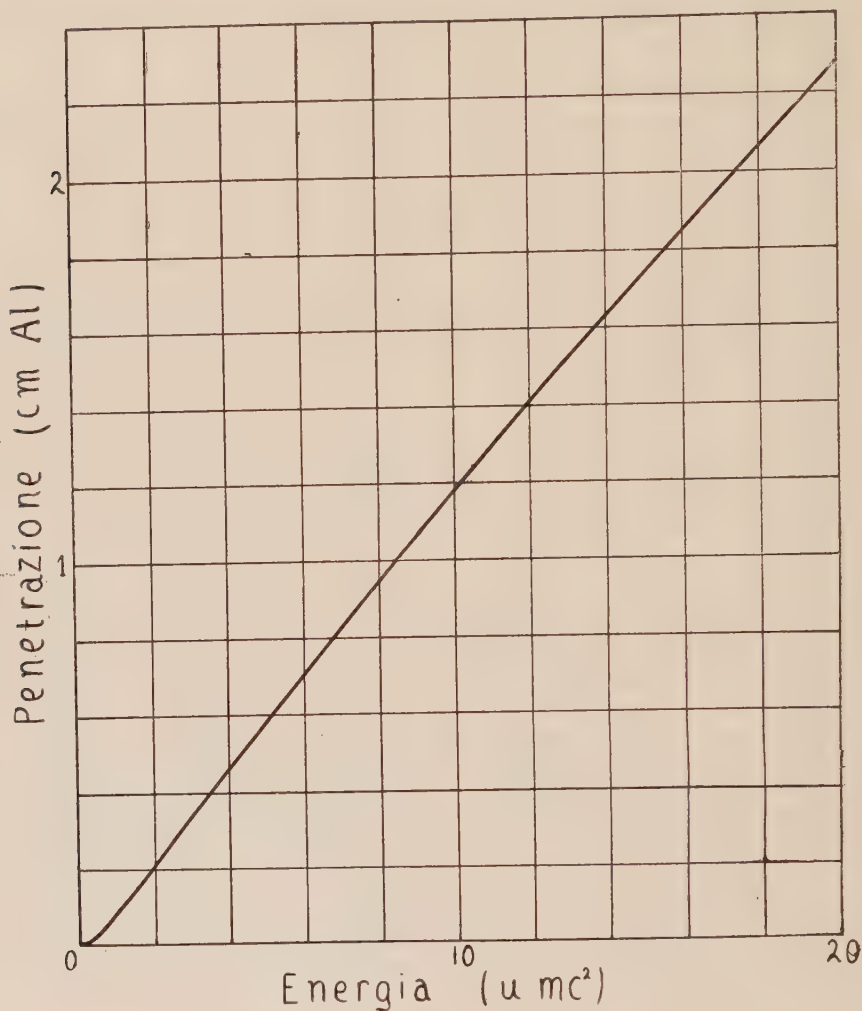


Fig. 2.

$Z$  costruito coi valori che Bethe dà per altri elementi, mentre per  $R'$  ho adoperato i dati usuali (estrapolando dove occorre) sulle penetrazioni.

Nella curva della fig. 1 è riportata  $f(u)$  (unità  $mc^2$  per  $cm^{-1}$ ) nel tratto che ci importa.

I risultati dell'integrazione sono contenuti nella tabella I e nella curva della fig. 2 che danno la penetrazione in funzione dell'energia  $W$ .



TABELLA I.

Energia (un. $mc^2$ )	Penetrazione (cm. Al)	Energia	Penetrazione
0	0.000	7	0.83
1	0.085	9	1.06
2	0.209	11	1.29
3	0.336	13	1.52
4	0.462	15	1.74
5	0.585	17	1.95
		19	2.17

Come era prevedibile le penetrazioni calcolate oltrepassano i valori sperimentali piuttosto sensibilmente (di circa il 30 % all'inizio dell'intervallo di energia che ci interessa).

Evidentemente la ragione di questa discordanza è da ricercarsi nel fatto che le traiettorie degli elettroni nel mezzo assorbente sono lontane dall'essere rettilinee, cosicchè il massimo spessore adoperabile — che è il dato sperimentale — non rappresenta se non una proiezione, necessariamente più piccola, del percorso effettivo dell'elettrone, percorso che può essere perfettamente d'accordo con la teoria.

Una valutazione quantitativa di questa apparente diminuzione del percorso si presenta come un problema abbastanza complesso se si vuole considerare elettroni di energia qualunque. Essa è invece abbastanza semplice nel caso di elettroni aventi energie di qualche milione di e. V. o per lo meno superiori ai 500.000 e. V., cioè proprio nel campo di energia che interessa per le applicazioni sopra ricordate. Mi è sembrato perciò non del tutto inutile tentare una trattazione del problema — anche se limitata a questo intervallo di energia.

La ragione della semplificazione che si ha limitandosi a questo intervallo è principalmente nel fatto ben noto che qui le penetrazioni si possono ritenere proporzionali alle energie, come si vede anche dalla curva fig. 1 la quale mostra come la perdita di energia si mantenga press'a poco costante fino a una energia cinetica di circa  $mc^2$ , mentre cresce molto rapidamente per energie inferiori.

Naturalmente per avere la penetrazione media dovremo tener conto anche dell'ultimo tratto dove l'energia dell'elettrone è  $< mc^2$ .

In un primo tempo però ci basterà calcolare la penetrazione media che si ha mentre l'energia dell'elettrone cade dal valore iniziale a  $mc^2$ . Le penetrazioni così calcolate saranno contrassegnate da un asterisco. Esse differiscono dalle penetrazioni vere per un termine additivo dell'ordine di grandezza della penetrazione degli elettroni di energia  $mc^2$ .

Supporremo che un fascio parallelo di elettroni di energia  $W_0$  cada perpendicolarmente su una lastra di spessore indefinito del materiale assorbente (Al).

Indicheremo con  $R_B$ , ( $R_B^*$ ) il percorso degli elettroni nel materiale, calcolato dalla formula di Bethe-Williams (fig. 2) e questo ci darà il percorso effettivo degli elettroni nel mezzo assorbente.

Il compito che si presenta è sostanzialmente quello di cercare la distribuzione statistica di tutte le possibili proiezioni, fatte nel modo che sarà indicato, dei percorsi effettivi. Indicheremo con  $R$ , ( $R^*$ ) una generica di tali proiezioni.

Circa il modo di passare da  $R_B^*$  a  $R^*$ , cioè, in definitiva di rettificare il percorso irregolare dell'elettrone, cercheremo un metodo che tenga conto solo delle piccole deviazioni — statistiche — e non delle grandi. Così facendo, se un percorso si presenta, per esempio spezzato in due parti da una forte deviazione, il metodo che adopereremo, trascurando questa forte deviazione, rettificherà il percorso come se la deviazione medesima fosse mancata. È evidente difatti che le grandi deviazioni, relativamente rare e quindi non suscettibili di trattazione statistica, non hanno influenza per la determinazione del punto di fine della curva di assorbimento, mentre giuocano una parte essenziale nel determinare la forma di questa, forma che sarà studiata a parte.

Verificheremo che nelle formule adoperate il limite superiore delle deviazioni entra in modo inessenziale (solo come logaritmo). Questo ci assicura che la condizione posta è soddisfatta.

Le deviazioni che un elettrone subisce attraversando gli atomi dello schermo, sono dovute parte al campo nucleare, parte agli urti con gli elettroni.

Il campo nucleare è responsabile delle grandi deviazioni, ma la media delle deviazioni nucleari, come si può verificare dalle formule successive, è più piccola di quella delle deviazioni elettroniche.

In modo generale, cioè per qualsiasi tipo di deviazione, consideriamo un elettrone nel tratto in cui la sua energia passa dal valore iniziale  $W_0$  al valore 1 (unità  $mc^2$ ). Allora avremo per la proiezione (sulla perpendicolare allo schermo) di un percorso generico

$$R^* = \int_1^{W_0} l \cos \alpha_w N dW$$

dove  $l$  è la distanza media fra due deviazioni successive nel tratto di percorso corrispondente all'intervallo di energia  $W$ ,  $W + dW$  nel quale sono contenute  $N dW$  deviazioni, mentre  $\alpha_w$  è lo scarto angolare (funzione del percorso e quindi dell'energia) fra la direzione dell'elettrone (a meno delle forti deviazioni che devono essere trascurate) e la direzione iniziale, ossia la normale alla superficie dello schermo.

Corrispondentemente la contrazione del percorso sarà

$$(4) \quad \Delta R^* = R_B^* - R^* = \int_1^{W_0} l (1 - \cos \alpha_w) N dW.$$

Osserviamo ora che è, in valore assoluto:

$$l N dW = dx = \frac{dW}{f(u)} = \frac{dW}{f(W + 1)}$$

dove  $f(u)$  è la funzione di Williams-Bethe (1'). Per la scarsa variabilità di  $f(u)$  nell'intervallo considerato, si può sostituirla con una media  $\bar{f}$  costante. Tenendo conto di questo e del fatto che ci interessa la contrazione media per tutti i possibili percorsi e osservando che, gli angoli essendo piccoli, si può con buona approssimazione sostituire  $1 - \cos \alpha_w$  con  $\frac{1}{2} \alpha_w^2$ , avremo dalla (4)

$$(5) \quad \Delta R^* = \frac{1}{2\bar{f}} \int_1^{W_0} \alpha_w^2 dW.$$

Uno scarto angolare generico  $\alpha_w$  è la resultante di tutte le piccole deviazioni  $\theta_i$  che si sono seguite mentre l'energia dell'elettrone cadeva da  $W_0$  a  $W$ . Proiettando su un piano qualunque normale alla superficie dello schermo si ha per la proiezione  $\alpha'_w$ :

$$(6) \quad \alpha'_w = \frac{2}{\pi} \sum_i \theta_i \left( \frac{1}{2} G'_+(\theta_i) - \frac{1}{2} G'_-(\theta_i) \right) \Delta \theta_i$$

dove con  $\frac{1}{2} G'_\pm(\theta_i) \Delta \theta_i$  sono stati indicati i numeri di deviazioni comprese fra  $\theta_i$  e  $\theta_i + \Delta \theta_i$  che hanno dato una proiezione rispettivamente positiva e negativa e dove la  $\Sigma$  è estesa a tutto il campo  $C$  di variabilità della  $\theta$ .

I numeri  $\frac{1}{2} G'(\theta_i) \Delta \theta_i$  oscillano intorno alle medie  $\frac{1}{2} G(\theta_i) \Delta \theta_i$  con delle distribuzioni che si possono ritenere gaussiane. In queste condizioni un teorema ben noto del calcolo delle probabilità ci dice che  $\left( \frac{1}{2} G'_+(\theta_i) - \right.$

—  $\frac{1}{2} G'_-(\theta_i) \Delta\theta_i$  oscilla intorno a zero con una ripartizione che è pure gaussiana. Per i numeri  $\frac{1}{2} G'(\theta_i) \Delta\theta_i$  la ripartizione, è della forma

$Ae^{-\frac{\xi_1^2}{G(\theta_i) \Delta\theta_i}}$ . La ripartizione di  $\left(\frac{1}{2} G'_+ - \frac{1}{2} G'_-\right) \Delta\theta_i$  è perciò  $Be^{-\frac{\xi_2^2}{2G(\theta_i) \Delta\theta_i}}$ .

Applicando una seconda volta lo stesso teorema alla combinazione lineare (6), troviamo infine che  $\alpha'_W$  oscilla intorno a zero con una ripartizione di

Gauss:  $C \exp. - \frac{\xi_3^2}{\sum_i \frac{4}{\pi^2} \theta_i^2 \cdot 2G(\theta_i) \Delta\theta_i}$ . Il denominatore dell'esponente non

è che il doppio della media quadratica  $\overline{\alpha_W'^2}$ , che sola ci importa.

D'altra parte si ha  $\alpha'_W = \alpha_W \cos \varphi$  dove  $\varphi$  varia indifferentemente fra 0 e  $2\pi$ ; sarà quindi  $\overline{\alpha_W'^2} = 2\overline{\alpha_W'^2}$ . Troviamo perciò, in definitiva, sostituendo la  $\sum$  con un'integrale:

$$(7) \quad \overline{\alpha_W^2} = \frac{8}{\pi^2} \int_{W_0, W} G(\theta) \theta^2 d\theta$$

dove è stato posto  $W_0, W$  invece di  $C$ , per ricordare che la distribuzione  $G$  si riferisce alle deviazioni avvenute nel tratto di percorso in cui l'energia passa da  $W_0$  a  $W$ .

Avremo uno scarto medio  $\overline{\alpha_{W,N}^2}$  dovuto alle deviazioni nucleari e uno scarto medio  $\overline{\alpha_{W,E}^2}$  dovuto alle deviazioni elettroniche, i quali si otterranno da (7) sostituendovi le rispettive  $G_N$  e  $G_E$ . Lo scarto medio risultante  $\overline{A_W^2}$  è dato da

$$(7') \quad \overline{A_W^2} = \overline{\alpha_{W,N}^2} + \overline{\alpha_{W,E}^2}.$$

Da questo e dalla (5) avremo quindi per la contrazione totale del percorso:

$$(8) \quad \Delta R^* = \frac{1}{2f} \int_1^{W_0} (\overline{\alpha_{W,N}^2} + \overline{\alpha_{W,E}^2}) dW.$$

Ossia una contrazione che è la somma delle contrazioni parziali.

**Fisica.** — *Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt.* Nota II di S. FRANCHETTI, presentata dal Corrisp. L. TIERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica** (Fisica-matematica). — *Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie*. Nota I di G. RACA, presentata<sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TIERI.

1. Scopo della presente ricerca è il calcolo del numero di scalari da cui dipende l'ennesimo tensore elastico di un mezzo isotropo, secondo la definizione datane dal prof. Finzi<sup>(2)</sup>.

In una Nota precedente<sup>(3)</sup> avevo determinato il numero di scalari da cui dipende un generico tensore isotropo di rango  $n$ , usando i metodi generali della teoria dei gruppi: ero stato guidato in tale ricerca dall'analogia con un problema spettroscopico<sup>(4)</sup>, ed avevo applicato ai problemi tensoriali quei metodi generali che Wigner aveva con tanto successo introdotto nella spettroscopia.

Nei principali problemi fisici, ed in particolare in quello che mi propongo di risolvere in queste Note, compaiono però dei tensori che debbono soddisfare, oltre che alla condizione di isotropia, a particolari condizioni di simmetria rispetto agli indici, condizioni che portano una ulteriore riduzione nel numero delle componenti essenziali distinte. Anche tale problema ha un analogo spettroscopico nelle condizioni di simmetria o antisimmetria introdotte dalle statistiche di Bose e di Fermi; e poichè questo è stato risolto, in linea di principio, associando al gruppo delle rotazioni il gruppo delle permutazioni degli elettroni<sup>(5)</sup>, si dovrebbe risolvere analogamente il problema tensoriale considerando il gruppo delle permutazioni degli indici.

Tale metodo presenta però in pratica notevoli difficoltà, data la complicata struttura dei gruppi di permutazioni, tanto che nei particolari problemi che volta a volta si presentano agli spettroscopisti si preferisce spesso usare il vecchio metodo del conteggio dei livelli in effetto Zeeman<sup>(6)</sup>. La via seguita in questa ricerca è analoga a quest'ultimo metodo; ma trattandosi di un problema puramente matematico ho cercato di usare concetti puramente matematici, evitando quella terminologia spettroscopica che, pur essendo in alcuni casi più semplice e concisa, sarebbe riuscita poco chiara

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) B. FINZI, « Boll. Un. Mat. It. », 10, 3, 1931.

(3) G. RACA, questi « Rendiconti », XVII, 386, 1933.

(4) Esiste infatti una corrispondenza tra i tensori di rango  $n$  e gli spettri di  $n$  elettroni  $p$ , e tra i tensori isotropi e i livelli  $S$ .

(5) H. WEYL, « Gruppentheorie und Quantenmechanik », cap. V.

(6) B. L. VAN DER WAERDEN, « Gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik », Berlin, 1932, § 28.



per chi con la spettroscopia non ha eccessiva familiarità. Ho creduto però interessante indicare a pie' di pagina i corrispondenti spettroscopici dei diversi problemi che sono andato man mano trattando e risolvendo.

2. Cominciamo a considerare un tensore doppio: le sue componenti si trasformano per una rotazione  $R$  degli assi secondo una sostituzione lineare  $\mathbf{D}(R)$  di ordine 9, e l'insieme di tutte queste sostituzioni  $\mathbf{D}(R)$  forma gruppo omomorfo col gruppo delle rotazioni<sup>(1)</sup>; si suole dire che tale gruppo di sostituzioni costituisce una *rappresentazione* di ordine 9 del gruppo delle rotazioni, rappresentazione che ha per *base* l'insieme delle 9 componenti del tensore.

Ora è noto che il generico tensore doppio può esser scisso in un tensore simmetrico

$$(1) \quad \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki})$$

ed uno antisimmetrico

$$(2) \quad \frac{1}{2} (a_{ik} - a_{ki}),$$

rispettivamente con 6 e 3 componenti distinte, e che questi due tensori per una rotazione degli assi di riferimento si trasformano indipendentemente l'uno dall'altro: è noto altresì che le 3 componenti distinte del tensore (2) si trasformano come le 3 componenti di un vettore, o, ciò che è lo stesso, come le 3 funzioni sferiche del primo ordine.

Il tensore (1) è ulteriormente scomponibile: è noto infatti che la sua traccia

$$(3) \quad \sum_i a_{ii}$$

è un'invariante, e ne costituisce anzi il cosiddetto invariante primo; possiamo perciò considerare separatamente il tensore isotropo

$$(4) \quad \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l a_{ll}$$

e il tensore doppio simmetrico a invariante primo nullo

$$(5) \quad \frac{1}{2} (a_{ik} + a_{ki}) - \frac{1}{3} \delta_{ik} \sum_l a_{ll}$$

che è un tensore a cinque componenti essenziali distinte; tali componenti si trasformano per una rotazione degli assi come le quantità

$$(6) \quad \frac{x_i x_k}{r^2} - \frac{1}{3} \delta_{ik}$$

(1) Per «gruppo delle rotazioni» intendiamo in questa Nota il gruppo delle rotazioni dello spazio euclideo a tre dimensioni.

che (come immediatamente si verifica) sono funzioni sferiche del secondo ordine.

Se perciò applichiamo alle 9 componenti del tensore  $a_{ik}$  una sostituzione lineare  $S$  che separi le componenti essenziali dei tre tensori (4), (2) e (5), e trasformiamo di conseguenza le sostituzioni  $\mathbf{D}(\mathbf{R})$  secondo la legge

$$\mathbf{SD}(\mathbf{R})\mathbf{S}^{-1},$$

le nuove sostituzioni così ottenute si spezzano in tre sostituzioni indipendenti, rispettivamente di ordine 1, 3, 5, ed equivalenti alle sostituzioni  $\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{R})$  che trasformano le funzioni sferiche di ordine 0, 1, 2.

Potremo perciò dire che la rappresentazione del gruppo delle rotazioni indotta dal generico tensore doppio è una rappresentazione di ordine 9 *riducibile*, e che essa si spezza nelle tre rappresentazioni  $\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{R})$ ; mentre la rappresentazione indotta dal tensore doppio simmetrico è di ordine 6, è pure riducibile, e si spezza nelle due rappresentazioni  $\mathbf{D}^{(0)}(\mathbf{R})$  e  $\mathbf{D}^{(2)}(\mathbf{R})$ .

In maniera analoga un qualsiasi tensore soddisfacente a qualsiasi condizione di simmetria può esser spezzato in tanti tensori indipendenti aventi ciascuno  $2l + 1$  componenti essenziali distinte che si trasformano per una rotazione degli assi come le funzioni sferiche di ordine  $l$ : infatti le sostituzioni lineari

$$\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{R}) \quad (l = 0, 1, 2, \dots)$$

caratteristiche delle funzioni sferiche di ordine  $l$  costituiscono il sistema completo delle rappresentazioni irriducibili del gruppo delle rotazioni <sup>(1)</sup>.

Il numero  $a(l)$  di volte che la rappresentazione irriducibile  $\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{R})$  compare nella riduzione completa di una generica rappresentazione  $\mathbf{D}(\mathbf{R})$  si può calcolare con la teoria dei caratteri come ho già precedentemente indicato (loc. cit.); ma se tale determinazione è assai semplice per il generico tensore di rango  $n$  a  $3^n$  componenti indipendenti, potendosi nella formula generale

$$(7) \quad a(l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \chi^{(l)}(\varphi) \chi(\mathbf{D}) (1 - \cos \varphi) d\varphi$$

con

$$(7a) \quad \chi^{(l)}(\varphi) = 1 + 2 \cos \varphi + 2 \cos 2\varphi + 2 \cos 3\varphi + \dots + 2 \cos l\varphi$$

porre

$$(8) \quad \chi(\mathbf{D}) = (1 + 2 \cos \varphi)^n,$$

essa diventa molto più difficile per un tensore che sia soggetto a particolari condizioni di simmetria, e per cui le componenti indipendenti sono ridotte

(1) I. SCHUR, « Sitzungsber. Berl. Akad. », 1924, p. 306.

a  $N < 3^n$ : in tal caso infatti  $\chi(\mathbf{D})$  non è noto, ed il suo calcolo presenta in generale notevoli complicazioni.

Il metodo che sarà illustrato in questa prima Nota, ed applicato nella successiva al problema che ci interessa, gira la difficoltà evitando il calcolo diretto dei caratteri.

3. Sia  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$  un tensore di rango  $n$  soddisfacente eventualmente a determinate condizioni di simmetria tra gli indici, sia  $N \leq 3^n$  il numero delle sue componenti indipendenti, sia  $\mathbf{D}(R)$  la rappresentazione di ordine  $N$  che caratterizza le trasformazioni di dette  $N$  componenti per una rotazione  $R$  degli assi, e sia  $a(l)$  il numero di volte che la rappresentazione  $\mathbf{D}^{(l)}(R)$  compare nella riduzione completa di  $\mathbf{D}(R)$ : le quantità suddette saranno legate dalla relazione

$$N = \sum_l (2l + 1) a(l).$$

Se si assume come sistema fondamentale di funzioni sferiche di ordine  $l$  l'insieme delle  $2l + 1$  funzioni

$$(9) \quad \frac{d^{|m|} P_l(\cos \theta)}{(d \cos \theta)^{|m|}} (\sin \theta)^{|m|} e^{im\varphi} \quad (m = -l, -l+1, \dots, l-1, l),$$

per una rotazione  $-\psi$  del sistema di riferimento attorno all'asse polare tali funzioni vengono moltiplicate rispettivamente per  $e^{im\psi}$ ; perciò tutti i sistemi  $Q^{(l)}$ , basi delle rappresentazioni  $\mathbf{D}^{(l)}(R)$ , si potranno considerare costituiti da  $2l + 1$  quantità  $b_m^{(l)}$  che per una rotazione  $-\psi$  del sistema di riferimento attorno all'asse polare vengono rispettivamente moltiplicate per  $e^{im\psi}$ .

Il numero totale delle combinazioni lineari indipendenti delle componenti di  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$  che per una rotazione  $-\psi$  del sistema di riferimento attorno all'asse  $\chi$  vengono moltiplicate per  $e^{im\psi}$  sarà

$$(10) \quad N(m) = \sum_{l \geq |m|} a(l);$$

da cui inversamente otteniamo

$$(11) \quad a(l) = N(l) - N(l+1).$$

Classificando dunque le componenti indipendenti di un tensore secondo i diversi valori di  $m$ , e determinando gli  $N(m)$ , si può evitare il calcolo esplicito dei caratteri<sup>(1)</sup>.

(1) La conoscenza degli  $N(m)$  equivale però alla conoscenza di  $\chi(\psi)$ , poichè si può facilmente dimostrare che

$$\chi(\psi) = \sum_m N(m) e^{im\psi}.$$

4. L'applicazione più semplice e più nota di questo metodo è la riduzione del prodotto esterno di due rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{D}^{(j)}(\mathbf{R})$  e  $\mathbf{D}^{(l)}(\mathbf{R})$  <sup>(1)</sup>, cioè la separazione in gruppi indipendenti dei  $(2j+1)(2l+1)$  prodotti  $b_{m_j}^{(j)} b_{m_l}^{(l)}$ ; poichè ciascuno di questi elementi per una rotazione  $-\psi$  degli assi viene moltiplicato per  $e^{i(m_j+m_l)\psi}$ , il numero  $N(m)$  di elementi che viene moltiplicato per  $e^{im\psi}$  è uguale al numero di soluzioni intere dell'equazione

$$(12) \quad m_j + m_l = m$$

con

$$|m_j| \leq j, \quad |m_l| \leq l.$$

Si vede immediatamente che

$$\begin{cases} N(m) = 0 & \text{per } |m| > j + l \\ N(m) = j + l + 1 - |m| & \text{per } j + l \geq |m| \geq |j - l| \\ N(m) = j + l + 1 - |j - l| & \text{per } |j - l| \geq |m| \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$(13) \quad \begin{cases} a(L) = 1 & \text{per } j + l \geq L \geq |j - l| \\ a(L) = 0 & \text{negli altri casi.} \end{cases}$$

Un altro problema che si può risolvere con questo metodo è il calcolo degli  $a(l, n)$  del generico tensore di rango  $n$  <sup>(2)</sup>; poichè le componenti di tale tensore si trasformano come i prodotti delle componenti di  $n$  vettori, e per ciascun vettore (funzione sferica del primo ordine)  $m$  può assumere i valori  $1, 0$  e  $-1$ , le quantità  $N(m)$ , che in questo caso indicheremo con  $N(m, n)$ , saranno uguali al numero delle soluzioni intere dell'equazione

$$(14) \quad m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} + m_n = m$$

con

$$(15) \quad |m_i| \leq 1.$$

Considerando i tre valori che può assumere  $m_n$ , il numero delle soluzioni della (14) è uguale alla somma dei numeri delle soluzioni delle tre equazioni

$$(16) \quad \begin{cases} m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = m - 1 \\ m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = m \\ m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = m + 1. \end{cases}$$

(1) Teorema noto in spettroscopia come legge di combinazione dei momenti orbitali.

(2) Equivalente in spettroscopia alla classificazione dei livelli di  $n$  elettroni  $p$ .

Ne deduciamo la formula ricorrente

$$(17) \quad N(m, n) = N(m-1, n-1) + N(m, n-1) + N(m+1, n-1);$$

unendo a questa la (11) otteniamo che per  $l \geq 1$

$$(18) \quad a(l, n) = a(l-1, n-1) + a(l, n-1) + a(l+1, n-1);$$

per  $l=0$  invece, quando si tenga anche conto che dalla (10) risulta in generale

$$(19) \quad N(-m) = N(m),$$

otteniamo

$$\begin{aligned} a(0, n) &= N(0, n) - N(1, n) = N(-1, n-1) + N(0, n-1) + \\ &+ N(1, n-1) - N(0, n-1) - N(1, n-1) - N(2, n-1) = \\ &= N(1, n-1) - N(2, n-1), \end{aligned}$$

cioè

$$(20) \quad a(0, n) = a(1, n-1).$$

Se perciò disponiamo gli  $a(l, n)$  in un quadro in cui le colonne sono distinte dai valori di  $l$  e le righe dai valori di  $n$ , ogni elemento è uguale alla somma dei tre elementi che più gli sono vicini nella riga immediatamente superiore; fanno eccezione a questa regola gli elementi della prima colonna ( $l=0$ ), che sono uguali a quelli che si trovano nella seconda colonna della riga immediatamente superiore:

I						
O	I					
I	I	I				
I	3	2	I			
3	6	6	3	I		
6	15	15	10	4	I	
15	36	40	29	15	5	I

In particolare gli elementi  $a(0, n)$  contenuti nella prima colonna danno il numero di invarianti lineari del generico tensore  $T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ , cioè il numero dei tensori isotropi indipendenti di rango  $n$ .

Questo metodo di calcolare gli  $a(l, n)$  non costituisce però un notevole progresso sulle formule (7) e (8): si può anzi dire che stia a quelle formule come il triangolo di Tartaglia sta alle formule esplicite per i coefficienti binomiali. Dove invece questo metodo offre un reale vantaggio, è nello studio dei tensori che presentano particolari simmetrie, studio che sarà fatto nella prossima Nota.



**Fisica** (Fisica-matematica). — *Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie*. Nota II di G. RACAH, presentata dal Corrisp. L. TIERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Considerazioni sul calcolo rapido ed approssimato dei calori specifici dei liquidi* <sup>(1)</sup>. Nota di P. GUARESCHI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Credo utile indicare il seguente procedimento di calcolo dei calori specifici dei liquidi che se pure non è esattissimo dà un valore sufficientemente approssimato. Per le ragioni che esporrò in seguito il sistema può prestarsi a frequenti applicazioni di calcolo rapido e come indirizzo per susseguenti induzioni come vedremo in altro lavoro.

Consideriamo quindi l'equazione di Clapeyron

$$(1) \quad \lambda = T(v_1 - v_2) \frac{dp}{dT}$$

dove  $\lambda$  è il calore latente di ebollizione per unità di massa e  $v_1$  è il volume specifico del vapore e  $v_2$  il volume specifico del liquido e  $p$  la pressione del vapore saturo e  $T$  la temperatura assoluta.

Trascurando il volume specifico  $v_2$  del liquido si potrà scrivere la (1)

$$\lambda = T v_1 \frac{dp}{dT}$$

e rapportando tutto alla grammomolecola si avrà il calore latente di ebollizione molecolare

$$M\lambda = MT v_1 \frac{dp}{dT}$$

ossia

$$\frac{M\lambda}{T} = M v_1 \frac{dp}{dT}.$$

Se consideriamo nel caso particolare il liquido e il vapore al punto di ebollizione o a valori, in via approssimata, non molto distanti dal punto di ebollizione, per modo che entro determinati limiti, sempre molto lontani dal

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

punto critico, si possa porre  $T = T_0$  dove  $T_0$  si indica il punto di ebollizione del liquido si scriverà

$$(2) \quad \frac{M\lambda}{T_0} = M v_1 \frac{dp}{dT} = k = \text{costante.}$$

Come si vede il valore  $k = \frac{M\lambda}{T_0}$  non è che la costante di Trouton per modo che sostituendo a  $v_1 = \frac{1}{\rho_1}$  dove  $\rho_1$  è la densità del vapore si avrà

$$\frac{M}{\rho_1} \frac{dp}{dT} = k$$

e moltiplicando per il coefficiente di associazione molecolare  $\alpha$  si avrà

$$(3) \quad \frac{\alpha M}{\rho_1} \frac{dp}{dT} = k_1.$$

Il valore della costante di Trouton con le correzioni portate da Hildebrand è compreso fra i valori 25 e 33.

La (3) si potrà considerare soltanto nel campo di validità e di approssimazione della regola di Trouton e quindi come legge soltanto approssimata.

Consideriamo ora la variazione di lavoro esterno che diciamo con  $dA$  e la variazione dell'energia interna, che diciamo con  $dU$ , del liquido.

La variazione dell'energia totale che diciamo con  $dQ$  sarà

$$dQ = dA + dU.$$

Per volume costante essendo  $dA = 0$  sarà  $dQ = dU$  per modo che per un dato valore  $dT$  si avrà  $dU = c_v dT$  dove  $c_v$  è il calore specifico del fluido a volume costante per unità di massa ritenendolo costante fra i limiti di temperatura alla quale si può estendere l'integrazione.

D'altra parte a volume costante essendo  $dU = \frac{1}{\rho_1} dp = v_1 dp$  si avrà  $v_1 dp = c_v dT$  ossia  $C_v = v_1 \frac{dp}{dT}$  che sostituita nella (3)

$$(4) \quad \alpha M v_1 \frac{dp}{dT} = \alpha M c_v = k_1 = 25 \div 33$$

$$(5) \quad C_v = \frac{k_1}{\alpha M}.$$

La (5) quindi esprime il calore specifico  $c_v$  a volume costante in funzione di una costante sperimentale del peso molecolare e del coefficiente di associazione molecolare in vicinanza del punto di ebollizione.

I valori che si ottengono con tale formula dei calori specifici saranno dipendenti dai limiti di validità della regola di Trouton il cui valore sperimentale dipende dalle forze intermolecolari del liquido.

La relazione (5) mette anche in luce il legame che può avere il calore specifico e il calore latente di ebollizione e il coefficiente di associazione molecolare di un liquido.

La tabella I fa vedere come i valori dei calori specifici calcolati con la (5) siano abbastanza concordanti entro certi limiti di approssimazione coi valori sperimentali. Dalla (5) si può anche osservare come la costante di Trouton-Hildebrand non rappresenti che il calore specifico molecolare.

#### CONSIDERAZIONI SULLA COSTANTE DI TROUTON.

Come valore della costante di Trouton ho scelto il valore  $K = 32$  anziché 21,5 dato dal Trouton stesso. Infatti, essendo la regola di Trouton largamente approssimata, e poichè il valore è influenzato dal coefficiente di associazione molecolare ossia in definitiva dalle forze intermolecolari, avviene che, specialmente per i liquidi fortemente associati, il numero medio 21,5 calcolato da Trouton non è valido per i liquidi associati, e tale valore tende ad aumentare. Ciò può appunto spiegarsi ritenendo la costante di Trouton come dipendente dall'energia necessaria per rompere il complesso molecolare dei liquidi associati per dare delle molecole semplici, che si ritrovano invece nel vapore.

Hildebrand <sup>(1)</sup> ha dato alla regola di Trouton una forma un po' diversa (che io ho adottato) e cioè egli ritiene che il punto di ebollizione non sia una temperatura conveniente per confrontare i calori latenti. Egli fa osservare che la concentrazione del vapore non è costante ma dipende dalla temperatura assoluta alla quale il liquido bolle e così un vapore saturo di un liquido con un elevato punto di ebollizione conterrà a parità di pressione un minor numero di molecole per unità di volume che il vapore di un liquido che bolle a più bassa temperatura.

Hildebrand fece una correzione per tale effetto calcolando, dalle curve pressione-temperatura, il calore latente alle temperature che forniscono i vapori aventi una concentrazione costante delle molecole. Egli trovò che  $k = \frac{\alpha M \lambda}{T_0}$  è realmente costante ma in una più grande scala di temperature.

Il valore trovato da Hildebrand è superiore a quello di Trouton e varia da 27 a 33. Scegliendo, per il nostro calcolo dei calori specifici con la (5), dei valori compresi fra 25 e 32 (quest'ultimo è il valore trovato da Hildebrand per l'acqua) si ottengono dei valori dei coefficienti di associazione molto prossimi a quelli trovati da Ramsay e Shields.

(1) HILDEBRAND, « J. American Chem. Soc. », 1915, 37, p. 970.

TABELLA I.

LIQUIDO	Peso molecolare M	Calore specifico calcolato con la (5) per $k = 32$	Calore specifico sperimentale	Costante di Trouton calcolata con (5)	Calore specif. molecolare sperim. dal Landolt Tab.	Coeffic. di associa- zione $\alpha$
Acqua . . . . .	18	1	1	25	25.8	1.8
Solfuro di C. . . . .	76.14	0.390	0.240	19.5	19.8	1.07
Tetracloruro di C. . .	153.84	0.207	0.207	32	31.2	1
Acetato d'etile . . . .	88.064	0.364	0.478	42	42	1.09
Acetone . . . . .	58.048	0.55	0.528	30	30.03	1.05
Alcool etilico . . . . .	46.048	0.66	0.695	32	31.3	1.51
Alcool metilico . . . .	32.032	0.556	0.560	18.7	19.6	1.76
Anilina . . . . .	93.064	0.397	0.495	46	47	0.9
Benzolo . . . . .	78	0.406	0.415	32	32.7	1.01
Clorobenzolo . . . . .	112.5	0.266	0.232	38.6	38.6	1.07
Cloroformio . . . . .	119.38	0.239	0.234	30.04	28.5	1.14
Etere etilico . . . . .	74.08	0.446	0.564	40.5	40.5	0.97
Nitrobenzolo . . . . .	123.048	0.258	0.358	48.5	48.7	1.01
Toluolo . . . . .	92	0.340	0.341	40.48	40.5	1.03

CONCLUSIONE.

Da quanto sopra esposto è possibile in via approssimata calcolare i calori specifici di un liquido prendendo un valore medio della costante di Trouton-Hildebrand e il coefficiente di associazione del liquido al punto di ebollizione. Si può anche osservare dalla Tabella I che la costante di Trouton-Hildebrand può interpretarsi come un calore specifico molecolare.

Allora conoscendo il calore molecolare di un liquido al suo punto di ebollizione e il coefficiente di associazione a quella temperatura si potrà avere un mezzo per calcolare il calore specifico con la (5). Ne consegue anche che identificando la costante di Trouton-Hildebrand con il calore molecolare, questo di necessità deve tendere (anche con l'aumentare del numero degli atomi nella molecola e quindi del peso molecolare) verso un valore costante o almeno che si avvicina ad una costante.

**Chimica.** — *La reazione di Reformatsky sulla benzammide.* Nota di A. BANCHETTI<sup>(1)</sup> presentata<sup>(2)</sup> dal Socio N. PARAVANO.

Come è noto S. REFORMATSKY<sup>(3)</sup> osservò che gli esteri degli acidi grassi monoalogenati in presenza di zinco reagiscono con i chetoni o le aldeidi dando dei complessi zinco-organici dai quali, per decomposizione con acidi diluiti, si ottengono esteri di ossiacidi.

Questa reazione si presta a molte sintesi, giacchè gli ossiacidi terziari si possono trasformare per eliminazione di acqua sia in acidi non saturi, sia in composti ciclici<sup>(4)</sup>.

Nell'intento di esaminare il comportamento del gruppo  $\text{—CO—}$  delle ammidi con questo tipo di reazione ho eseguito alcune esperienze con benzammide, zinco e bromoacetato di etile in benzolo anidro.

Partivo di solito da 20 gr. di benzammide, 15 gr. di zinco, 28 gr. di bromoacetato di etile e 50 cc. di benzolo seccato su sodio. Nelle condizioni sperimentali consuete<sup>(4)</sup> <sup>(5)</sup> ha luogo una reazione che però è tutt'altro che energica. È necessario far bollire ininterrottamente a b. m.; interrompendo il riscaldamento la reazione si arresta. Con una ebollizione di 3/4 d'ora si ottiene in tal modo un liquido rosso bruno; la quantità di zinco che passa in soluzione è all'incirca equivalente alla quantità di benzammide impiegata, secondo il rapporto molecolare 1 : 1. Però trattando il prodotto della reazione con acido solforico al 10 % si riottiene quasi integralmente la benzammide di partenza. Essa si separa in massima parte quando si acidifica, dato che a freddo è poco solubile tanto in benzolo che in acqua. Distillando la parte benzenica prima a b. m. per allontanare il solvente e poi nel vuoto fino ad eliminare il bromoacetato di etile che non ha reagito (dal 10 al 25 % della quantità iniziale) resta un solido, non molto abbondante, costituito in massima parte da benzammide, accompagnata da poco acido benzoico e da prodotti resinosi rosso arancio. Non c'è traccia dei probabili prodotti di trasformazione del bromoacetato di etile: benzoilacetato, ippurato o succinato di etile. Si è soltanto constatato qualitativamente la presenza di acetati nella

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica farmaceutica della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta dell'8 maggio.

(3) REFORMATSKY, « Ber. », 20, 1210 (1887); 28, 2463 (1895).

(4) RUPE e BUSOLT, « Ber. », 40, 4537 (1907); LINDENBAUM, « Ber. », 50, 1270 (1917); DE FAZI, « Gazz. Chim. It. », 54, b, 143 (1915) e successivi lavori.

(5) COHEN, *Practical Organic Chemistry*, MacMillan, London, 1930, 261.



porzione acquosa solforica che contiene, accanto a  $Zn^{++}$  e  $Br'$ , un po' di benzammide.

Con altre prove fatte nell'intento di spiegare il probabile meccanismo della reazione si è potuto constatare che nelle condizioni scelte nè lo zinco nè la benzammide reagiscono da soli con bromoacetato di etile, mentre se sono presenti tutti e tre i componenti la quantità di zinco che passa in soluzione è proporzionale a quella di benzammide impiegata e precisamente, come si è detto, secondo il rapporto molecolare 1:1. Si è poi osservato che se invece di acidificarlo si tratta il liquido di reazione con molto etere, si forma subito un precipitato rosso scuro e dalla soluzione si separano col tempo dei cristalli lievemente colorati in giallo. In tal modo è stato possibile isolare un composto che quando è puro si presenta in bei cristalli incolori fondenti a  $157-158^\circ$  e che contiene  $Zn, N$  e  $Br$ . Per ebollizione con acqua si decompone e per raffreddamento cristallizza della benzammide. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

	trov.	N %	6.7	Br %	34.7	Zn %	13.5
per $(C_6H_5 \cdot CO \cdot NH_2)_2 \cdot ZnBr_2$	calcol.	»	5.99	»	34.20	»	13.99.

Lo zinco è stato determinato nel modo migliore col metodo consigliato dal Meyer<sup>(1)</sup> un po' modificato e cioè trattando la sostanza con  $HNO_3$  dil., in crogiolo tarato, scaldando molto lentamente fino ad eliminazione della maggior parte della benzammide, acido benzoico, benzonitrile ed altri prodotti volatili ed infine aggiungendo  $HNO_3$  conc., portando a secco con cautela e calcinando per pesare  $ZnO$ . L'azoto fu determinato sia col metodo Dumas che con quello Kjeldahl. Il bromo fu determinato col metodo Volhardt direttamente nella soluzione acquosa preparata a caldo ed acidificata con  $HNO_3$  dopo raffreddamento.

Dall'analisi si conclude che si tratta di un composto rispondente alla formula:  $(C_6H_5 \cdot CO \cdot NH_2)_2 \cdot ZnBr_2$  e tale conclusione è stata avvalorata preparando lo stesso composto direttamente dai costituenti. Se si sciolgono in poco alcool quantità uguali in peso di benzammide e di bromuro di zinco (cioè nel rapporto molecolare approssimato 2:1, con un lieve eccesso di  $ZnBr_2$ , riconosciuto necessario) e si lascia evaporare la soluzione nel vuoto oppure su  $H_2SO_4$  o  $CaCl_2$  si separano dei cristalli identici a quelli prima descritti, con lo stesso punto di fusione (anche se mescolati) e la stessa composizione.

Sono noti alcuni complessi molecolari della benzammide con sali inorganici<sup>(2)</sup> ma non era stato finora descritto questo così ottenuto, analogo per la sua composizione a quelli dell'acetammide con  $NaBr$ ,  $NaJ$ ,  $MgBr_2$ <sup>(3)</sup>.

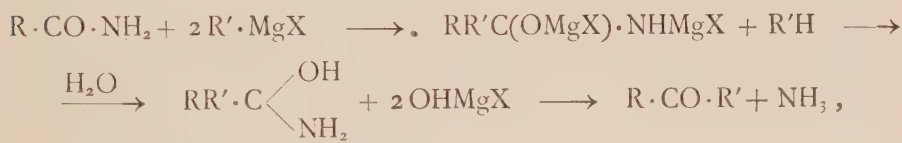
(1) H. MEYER, *Lehrbuch d. org. chem. Methodik*, Springer, Berlin, 1931, I, 214.

(2) BEILSTEIN, *Handbuch*, 4<sup>o</sup>, ed. IX, 200; FRICKE e RUSCHHAUPT, «Chem. Zentr.», 1925, II, 1418; BELLADEN e ASTENGO, «Rend. R. Acc. Lincei», [5], 32, I, 491 (1923).

(3) BEILSTEIN, *Handbuch*, 4<sup>o</sup>, ed. II, 178.

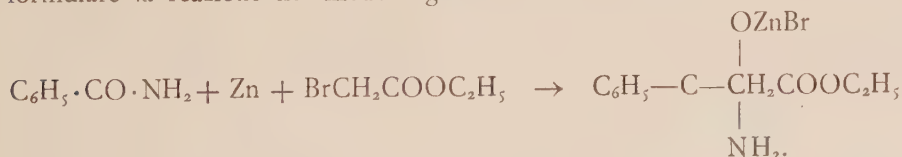
Siccome la quantità di zinco passata in soluzione e la benzammide di partenza sono all'incirca nel rapporto molecolare 1 : 1, mentre nel complesso il rapporto è 1 : 2, è evidente che anche se tutta la benzammide si trasformasse nel complesso, il che non si verifica, resterebbe dello zinco sotto altra forma. Si è detto che con etere si ottiene un precipitato rosso scuro, estraendolo con alcool si ha il complesso descritto; il residuo è amorfo, contiene bromo e zinco ed è insolubile nei più comuni solventi organici tranne l'acido acetico glaciale dal quale cristallizza acetato di zinco.

Questi i risultati ottenuti; bisognerebbe ora interpretare l'andamento della reazione. Siccome la reazione dei chetoni con zinco e bromoacetato di etile è analoga a quella con i composti organo-magnesiaci (in entrambi i casi il carbonile viene infine trasformato per idrolisi in un gruppo alcolico terziario) si potrebbe pensare ad una simile analogia anche per le ammidi. Poichè esse reagiscono con i composti organo-magnesiaci secondo lo schema seguente (1):



nel nostro caso ( $R = C_6H_5-$ ;  $R' = -CH_2COOC_2H_5$ ) ci sarebbe da aspettarsi la formazione di benzoilacetato di etile, acetato di etile ed ammoniaca oppure degli eventuali prodotti di reazione di tali esteri e del bromoacetato di etile con l'ammoniaca. Un tale andamento della reazione sembra però poco verosimile sia perchè non si è trovato traccia di tali composti, sia perchè si richiederebbe un rapporto molecolare 2 : 1 fra la quantità di zinco disciolta e quella di benzammide presente, mentre tale rapporto risulta di 1 : 1.

Quest'ultima constatazione fa anche scartare l'ipotesi di una reazione diretta fra bromoacetato di etile e zinco catalizzata dalla benzammide. Si potrebbe invece pensare ad una analogia col comportamento dei chetoni e formulare la reazione nel modo seguente:

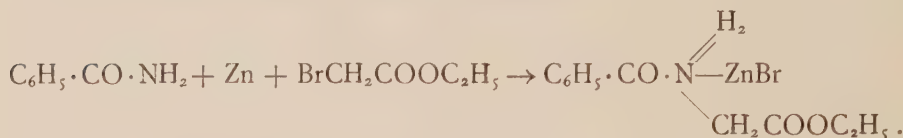


Si può supporre che la decomposizione di questo complesso con acido solforico dia il β-amino-β-ossi-propionato di etile (il che è poco probabile

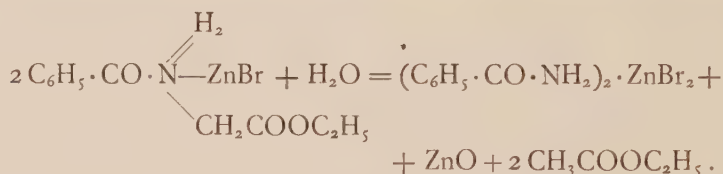
(1) SCHMIDT, RUNGE, *Organometallverbindungen*. Wiss. Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1932, I, 183.

dato che gli ammino alcoli del tipo  $\text{>C} \begin{matrix} \text{OH} \\ \text{NH}_2 \end{matrix}$  non sono stabili) oppure dia il benzoilacetato di etile, che però non è stato riscontrato, oppure infine che si abbia una demolizione a benzammide ed acetato di etile.

Altra possibile reazione sarebbe la seguente:



La decomposizione del prodotto della reazione con acqua darebbe benzammide e  $\text{Zn}(\text{OH})\text{Br}$  e la formazione per aggiunta di etere, non assoluto, del complesso fondente a  $157-58^\circ$  potrebbe forse essere interpretata nel modo seguente:



Senza diffondermi su altre possibili interpretazioni che potrebbero portare alla formazione di ippurato o succinato di etile dirò che in tutti i casi si incontra la stessa difficoltà: il non aver trovato in quantità rilevabili tali prodotti della reazione, salvo il riconoscimento qualitativo della presenza di acetati che fa ritenere più verosimili le ipotesi secondo le quali si avrebbe formazione di acetato di etile.

Da quanto ho esposto si può concludere che il comportamento della benzammide nella reazione di REFORMATSKY si allontana da quello prevedibile per analogia con i chetoni o le aldeidi e non è per ora facilmente interpretabile. Ho pertanto ritenuto opportuno riferire fin d'ora su quanto è stato osservato, riservandomi di tornare in seguito sull'argomento.

**Chimica.** — *Sulle righe attribuite ad una eventuale forma pirroleninica nello spettro Raman del pirrolo* <sup>(1)</sup>. Nota di G. B. BONINO e R. MANZONI-ANSIDEI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio M. BETTI.

In un nostro lavoro del 1933 <sup>(3)</sup> sullo spettro Raman del pirrolo si era notato come tale spettro non mostrasse le righe caratteristiche del gruppo  $C = C$ , righe che invece debolmente appaiono negli spettri Raman dei pirroli alchilati al carbonio. Gli spettri allora pubblicati erano ottenuti con particolari cure e cioè non sovraesponendo il pirrolo studiato e filtrando la luce eccitante in modo da utilizzare solo opportune radiazioni ed essere il più possibile al riparo da azioni fotochimiche sul pirrolo stesso durante la posa. Si tenevano buoni solo gli spettri Raman per i quali il campione di pirrolo dopo l'esposizione non mostrava differenze interferometriche rispetto ad un campione della stessa sostanza che non aveva subito l'eccitazione Raman.

Posteriormente, nel 1935, onde procurarci del materiale per lo studio della simmetria molecolare dei nuclei eterociclici pentatomici avevamo ripreso lo studio degli spettri Raman del pirrolo, tiofene e furano con esposizioni anche molto abbondanti allo scopo di poter eventualmente ottenere in effetto Raman delle righe corrispondenti a massimi di assorbimento ultrarossi che non apparivano negli spettri Raman di già ottenuti.

Nel frattempo Stern e Thalmayer <sup>(4)</sup> pubblicavano uno spettro Raman del pirrolo nel quale apparivano quattro righe tra  $1500-$  e  $1650-\text{cm}^{-1}$  di cui tre erano interpretate da Stern come riferibili a doppi legami  $C = C$  e  $C = N$  delle forme « olefinica » e « pirroleninica » del pirrolo. Oltre a ciò i detti autori affermavano di aver trovato anche nello spettro Raman del pirrolo non sostituito delle righe caratteristiche del gruppo  $\text{CH}_2$  che avrebbero confermato l'interpretazione di una forma pirroleninica.

Tale risultato sperimentale non era in accordo con quanto avevamo pubblicato nel 1933 (a parte altre considerazioni interpretative del lavoro di Stern criticate da uno di noi in un recente lavoro apparso nella « Gazzetta chimica Italiana ») <sup>(5)</sup> ed attirava perciò la nostra attenzione in quanto i risul-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(3) « Zeits f. Phys. chem. », B. 22, 21 (1933).

(4) « Zeits f. Phys. chem. », B. 31, 403 (1936).

(5) « Gazz. chim. ital. », 66, 316. (1936).

tati di Stern erano pure in contrasto con gli spettri Raman del pirrolo che avevamo più recentemente ottenuti allo scopo sovra ricordato. Abbiamo allora sottoposto ad un nuovo esame sia il pirrolo sintetico ottenuto dal mucato di ammonio (utilizzando pure campioni di pirrolo sintetico del commercio) sia quello « naturale » ottenuto dall'olio Dippel. Avevamo per questo ultimo ancora a disposizione circa 60-70 gr. di pirrolo incolore purificato con tutte le cure da P. Pratesi nell'Istituto di chimica organica del Politecnico di Monaco e di provenienza J. G. Farbenindustrie. I primi risultati di questa ricerca furono brevemente riassunti in una lettera alla « Ricerca Scientifica » del giugno 1936.

Questi spettri vennero da noi ottenuti con l'apparecchiatura già altre volte descritta utilizzando il grande spettrografo a tre prismi di Försterling della Casa Zeiss di Jena sia con camera di luminosità  $f = 1/1.9$  sia con camera  $f = 1/5$ . Quest'ultima camera ci permetteva una maggiore dispersione. I campioni erano rinchiusi in microtubi Raman della capacità di un  $\text{cm}^3$  circa che erano saldati alla lampada dopo avervi praticato il vuoto. I campioni di pirrolo eran tutti purificati attraverso al pirrolato di potassio, perfettamente seccati distillandoli su potassio a pressione ridotta.

Abbiamo eseguito tutta una serie di prove diverse sia sui campioni di pirrolo sintetico sia su quelli dall'olio Dippel con tempi di posa fino a 60 ore. La lettura delle lastre è stata fatta prima col microcomparatore di Zeiss e a tale prima lettura si riferiscono i numeri da noi pubblicati nella « Ricerca Scientifica » del giugno 1936. Ma per una più diligente lettura degli spettrogrammi stessi è per una migliore valutazione delle intensità abbiamo utilizzato i microfotogrammi eseguiti con grande cura dalla casa Zeiss di Jena con il suo nuovo grande microfotometro registratore fotoelettrico. Teniamo anzi qui a ringraziare vivamente la Casa Zeiss per questa cortesissima e preziosa collaborazione. I risultati di questa lettura dei nostri spettrogrammi attraverso alla riproduzione microfotometrica hanno riconfermato i nostri precedenti risultati.

Nel settembre 1936 è poi apparso un lavoro di Reitz<sup>(1)</sup> della Scuola di Graz che conferma pienamente quanto noi avevamo trovato sotto il punto di vista qui in discussione. Anche Reitz infatti non trova assolutamente nello spettro Raman del pirrolo sintetico le righe pubblicate da Stern tra 1500 e 1630  $\text{cm}^{-1}$ . Nella tabella seguente sono dati i valori pubblicati da Stern, da Reitz e quelli emergenti dalla lettura dei microfotogrammi delle nostre lastre.

(1) « Zeits f. Phys. chem. » B. 33, 179 (1936).



*Spettro Raman del pirrolo.*

Stern e Th. 1935 (1)	Bonino e Manzoni 1936		Reitz 1936 (2)
	a) pirrolo dall' olio Dippel	b) pirrolo sintetico	
3382 (2)	3392 (2 dif)	3390 (3 dif)	3420 (3)
3134 (5)	3138 (5)	3138 (5)	3133 (8)
3108 (3)	3107 (3)	3107 (3)	3104 (4)
3056 (1)	3058 (1/2 Hg?)	3062 (1/2 Hg)	—
2926 (1)	2935 (1)	—	2918 (00)
2880 (0)	2860 (3/4)	—	—
2777 (1)	2786 (1 Hg?)	2786 (oHg?)	2760 (1 ?)
2676 (0)	—	—	—
1676 (0)	1676 (?)	—	—
1631 (0)	1629 (1/2)	—	—
1593 (0)	1597 (1/2)	—	—
1558 (1)	—	—	—
1524 (1)	1527 (?)	—	—
1465 (5)	1466 (5)	1465 (5)	1465 (6)
1416 (0)	1413 (1/2 f?)	1414 (1/2 f?)	—
1382 (6)	1379 (6)	1380 (6)	1376 (8)
1313 (0)	—	—	—
1233 (3)	1234 (0)	1235 (0)	1231 (0)
—	1204 (0)	1204 (?)	—
1145 (10)	1142 (10)	1142 (10)	1143 (12)
1091 (2)	1083 (1 1/2 f?)	1084 (1 1/2 f?)	—
1052 (2)	1045 (1 1/2)	1046 (1 1/2)	1049 (3)
1000 (0)	999 (1)	1001 (0)	—
873 (1)	865 (2)	866 (2)	865 (3)
840 (1)	833 (1)	835 (1 1/2)	837 (3)
711 (2)	706 (1)	708 (2)	711 (4)
646 (2)	649 (1)	649 (1)	645 (3)
530 (0)	573 (0)	574 (0)	—

I nostri risultati riassumono quanto è emerso da tre serie di spettrogrammi eseguiti sia sul pirrolo sintetico sia su quello naturale con tempi di posa di circa 40, 24, 12 ore.

(1), (2) Loc. cit. p. prec.

L'esame microfotometrico ha permesso una valutazione assai migliore delle intensità e ci dà modo perciò di stabilire più nettamente che nel pirrolo dall'olio Dippel appaiono certe, se pur deboli, due righe (2935, 2860  $\text{cm}^{-1}$ ) che possono attribuirsi al gruppo  $\text{CH}_2$ . Tali righe mancano nei microfotogrammi relativi al pirrolo sintetico. Le fig. 1, 2, riproducenti gli spettrogrammi ottenuti con rispettivamente, 24, 40 ore di posa su pirrolo

dall'olio Dippel mostrano nette le deboli righe sopraricordate del  $\text{CH}_2$ . Tali righe non si possono qui confondere con le oscillazioni dovute alla grana della lastra. La figura 3 che registra uno spettrogramma ottenuto con quaranta ore di posa su pirrolo sintetico purificato dal pirrolato di potassio non mostra le dette righe: la differenza è del tutto probativa. Così nella zona  $1500\text{--}1650\text{ cm}^{-1}$  (zona del « doppio legame ») i nostri microfotogrammi (vedi figura 1, 2), danno nettamente per il pirrolo dall'olio Dippel le righe a  $1629\text{--}1597\text{ cm}^{-1}$  trovate da Stern. Assai problematiche invece apparirebbero le righe  $1676, 1558, 1527\text{ cm}^{-1}$ . La figura 3 ci mostra poi come anche tali righe manchino negli spettrogrammi ottenuti con pirrolo sintetico e debitamente purificato.

Anche Reitz, come risulta dalla tabella sopra esposta, non trova traccia nei suoi spettrogrammi delle dette righe trovate invece da Stern e attribuite in parte dallo stesso ad una forma pirroleninica. Si potrebbe supporre che le forti sovraesposizioni adottate da Stern gli abbiano in piccola parte agito fotochimicamente sui suoi prodotti: ma tale ipotesi è contraddetta dal fatto che noi con pose di quaranta ore e con forti eccitazioni e pure con luce filtrata non abbiamo riscontrato attraverso allo spettro Raman un simile inconveniente. Resterebbe più probabile ammettere che il pirrolo studiato da Stern fosse proveniente dall'olio Dippel. Le righe da lui trovate e da noi riscontrate in parte in tale pirrolo (dall'olio Dippel) sono caratteristiche per gli spettri dei pirroli alchilati come nostre ricerche <sup>(1)</sup> hanno dimostrato già dal 1933.

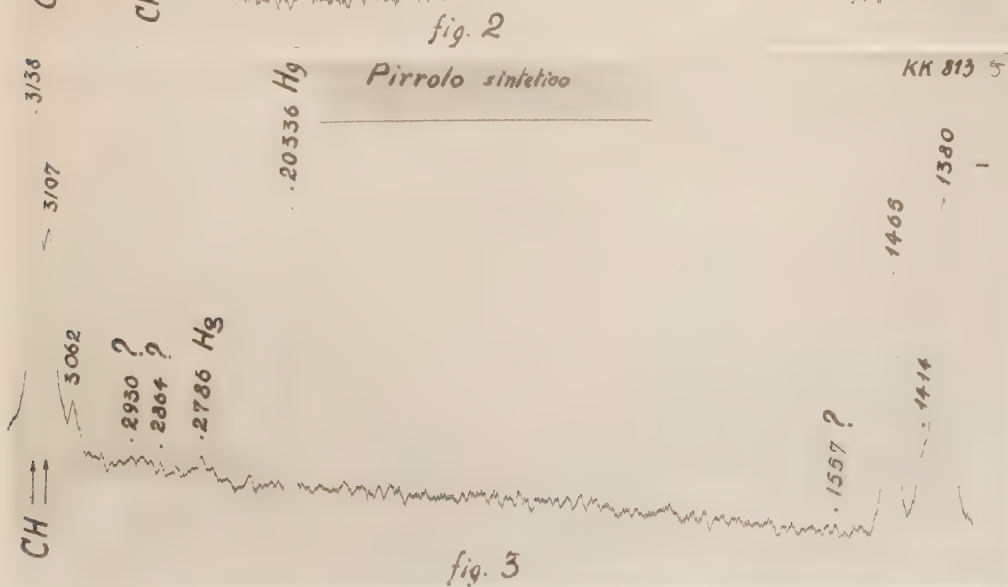
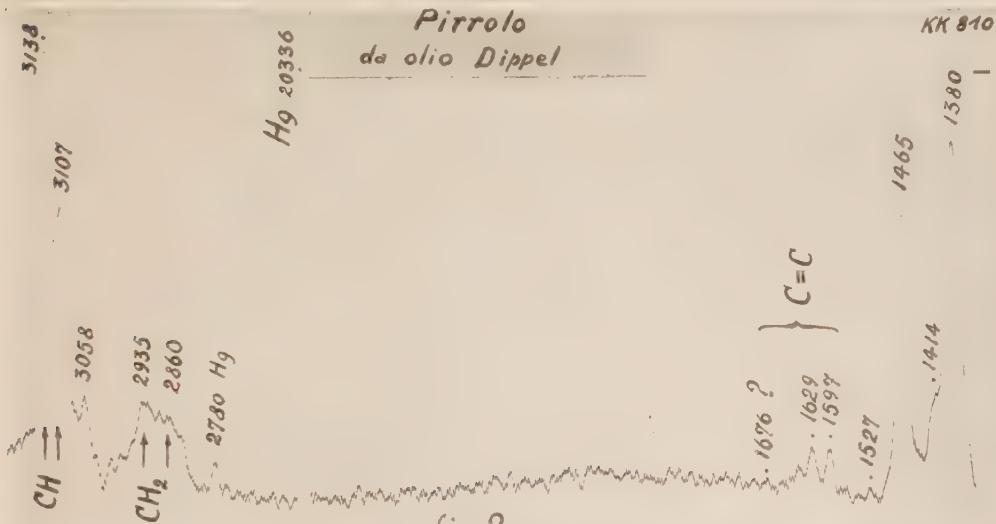
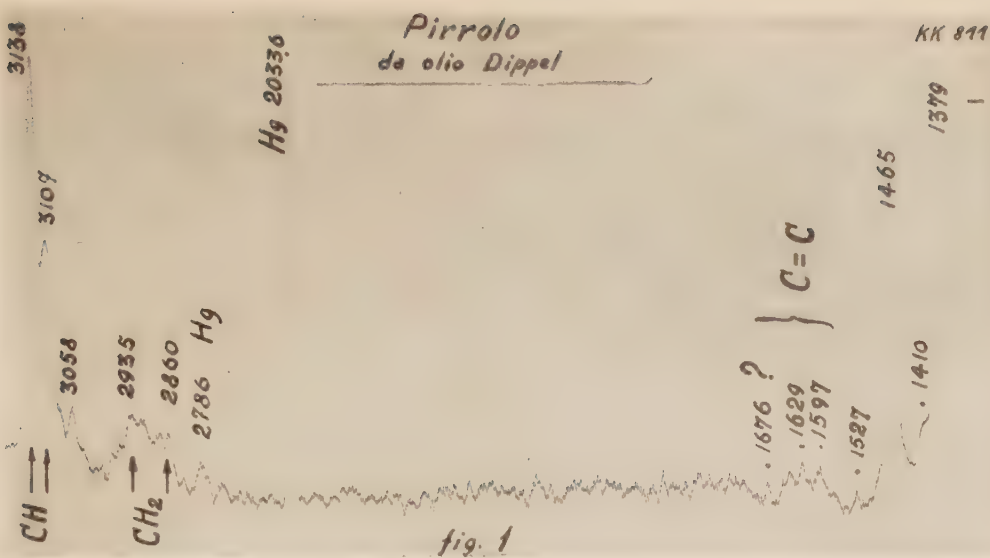
Non essendo perciò accettabile la documentazione sperimentale del lavoro di Stern relativa alle righe sopraricordate non crediamo sia il caso di discutere per ora le considerazioni interpretative e critiche che lo Stern appoggia su questo punto dei suoi spettrogrammi.

Passando oltre potremmo essere d'accordo con Reitz nell'attribuire la riga a  $3058\text{ cm}^{-1}$  come proveniente dallo spettro del mercurio per quanto prove comparative ci mostrino questa più intensa negli spettri ottenuti con pirrolo che non con spettri campioni. La  $2770\text{--}2780\text{ cm}^{-1}$  può corrispondere ad una riga del mercurio però è da notare che in tale posizione si registra un debole massimo nello spettro ultrarosso del pirrolo.

Una riga attorno a  $1414\text{ cm}^{-1}$  nello spettro Raman del pirrolo può essere invece interpretata (come fa Reitz) come una  $f\text{--}1465\text{ cm}^{-1}$ . Però la presenza di un massimo ultrarosso a  $1412\text{ cm}^{-1}$  circa per il pirrolo rende probabile l'interpretazione di questa riga come una  $e\text{--}1414\text{ cm}^{-1}$  circa.

Così la riga Raman attorno a  $1084\text{ cm}^{-1}$  potrebbe pure essere classificata come una  $f\text{--}1146\text{ cm}^{-1}$ . Anche qui però notiamo che lo spettro ultrarosso del pirrolo mostra un massimo a  $1075\text{ cm}^{-1}$  che appoggerebbe la nostra interpretazione; di più occorre notare che nello spettro Raman del-

(1) « Zeits. f. Phys. chem. », B. 25, 348 (1934).





l'N-metilpirrolo, come risulta da un nostro precedente lavoro <sup>(1)</sup> si ha assai intensa una riga a  $1084\text{ cm}^{-1}$  pur mancando del tutto la riga pirrolica a  $1142\text{ cm}^{-1}$ . La riga Raman a circa  $1202\text{ cm}^{-1}$  è data per il pirrolo da Venkateswaran con intensità nettamente rilevabile. Reitz escluderebbe invece del tutto questa riga. Anche noi nel 1933 eravamo giunti a questa esclusione. Però gli spettri molto sovraesposti riportati in questa nota riconfermerebbero una riga Raman a  $1204\text{ cm}^{-1}$  per il pirrolo dall'olio Dippel mentre ne confermerebbero l'esclusione per il pirrolo sintetico.

Una riga Raman a circa  $1000\text{ cm}^{-1}$  è data dagli spettri del pirrolo di Venkateswaran e di Stern. Tale riga non era data invece dal nostro spettro del 1933. Anche Reitz non ritiene reale questa riga nello spettro del pirrolo. Le nostre ultime ricerche riassunte nella tabella sovraesposta ci hanno dimostrato come dubbia questa riga nello spettro del pirrolo sintetico. Però non si deve dimenticare che in questa posizione di circa  $1000\text{ cm}^{-1}$  si ha un massimo di assorbimento nello spettro ultrarosso del pirrolo.

Con ciò si potrebbe concludere che lo spettro Raman del pirrolo si presenta nelle sue linee fondamentali ed essenziali quale quello che abbiamo dato nel 1933. Anche sulla base di un accurato esame e di una diligente discussione delle nuove e deboli righe che appaiono nello spettro Raman del pirrolo non si può oggi parlare di una conferma spettro-ramanistica dell'esistenza di molecole sotto forma pirroleninica nel pirrolo ordinario.

Resta perciò ancora aperta la discussione se la forma pirroleninica del pirrolo corrisponda ad una forma stabilizzata solo in alcuni derivati pirrolici o se invece debbasi riguardare, se non come possibile forma strutturalistica individuale e determinata per le molecole del pirrolo, come una configurazione poco probabile ma statisticamente possibile ed in risonanza quantica con altre possibili configurazioni della molecola del pirrolo caratterizzate da una assai più alta probabilità.

Però prima di iniziare delle discussioni o delle ricerche in tale direzione sarebbe forse utile riassumere i dati fisici che oggi possediamo e che possono permetterci uno studio della simmetria molecolare del pirrolo. Su tale argomento, come già uno di noi ha comunicato recentemente <sup>(2)</sup>, verterà una prossima Nota.

(1) « Zeits. f. Phys. chem. », B. 25, 348 (1934).

(2) « Rendiconti R. Acc. Lincei », XXIX, 374 (1936).



**Chimica.** — *Sullo spettro Raman dell'*N*-deuteriopirrolo.*  
Nota di G. B. BONINO e di R. MANZONI-ANSIDEI, presentata <sup>(1)</sup>  
dal Socio M. BETTI.

Nello studio dello spettro Raman del pirrolo <sup>(2)</sup> avevamo osservato una riga a circa  $3400\text{ cm}^{-1}$  che appariva diffusa a forma di banda soltanto nei pirroli « liberi » all'azoto. Una ulteriore ricerca <sup>(3)</sup> ci ha confermato l'assenza di questa riga nei pirroli N-sostituiti. D'altra parte è noto che tutte le sostanze contenenti in molecola atomi di idrogeno legati all'azoto presentano un'analoga riga diffusa tra  $3300$  e  $3400\text{ cm}^{-1}$  circa. Riportiamo per maggiore chiarezza alcuni esempi:

$\text{NH}_3$  (liquida)  $3304, 3382\text{ cm}^{-1}$  (Daure, « C. R. », 188, 1605 (1929))

$\text{CH}_3\text{NH}_2$   $3319, 3378\text{ cm}^{-1}$  (Kohlrausch, « Wien Ber. », 138, 635 (1929))

$(\text{CH}_3)_2\text{NH}$   $3330\text{ cm}^{-1}$  (Kohlrausch, « Wien Ber. », 139, 165 (1930))

$\text{C}_6\text{H}_5\text{NH}_2$   $3362, 3423\text{ cm}^{-1}$  (Kohlrausch, « Wien Ber. », 139, 459 (1930))

$(\text{C}_6\text{H}_5)_2\text{NH}$   $3355\text{ cm}^{-1}$  (Kohlrausch, « Wien Ber. », 139, 459 (1930)).

Era perciò supponibile che tale riga nel pirrolo fosse riferibile ad una oscillazione dell'idrogeno iminico rispetto al resto della molecola, ovvrosia ad una oscillazione dove fosse particolarmente impegnato il « legame » N-H. Una tale ipotesi poteva avere interesse nello studio della costituzione molecolare del pirrolo. Infatti, data l'analogia tra la detta riga Raman riferibile all'N-H nel pirrolo e quelle relative ai gruppi omopolari N-H e  $\text{NH}_2$  delle amine secondarie e primarie (dove certamente le tre direzioni di valenza dell'atomo di azoto non sono complanari <sup>(4)</sup>) si poteva ritenere come probabile che il pirrolo non sostituito potesse esistere almeno in parte in una forma con un N-H omopolare a direzione non complanare col piano dell'anello pentatomico.

D'altra parte il rilevamento della riga in questione a  $3390\text{ cm}^{-1}$  non è esente da qualche difficoltà. Infatti se si vuol evitare di eccitare lo spettro Raman del pirrolo con radiazioni di troppo piccola frequenza capaci even-

(1) Nella seduta del 18 aprile 1937.

(2) « Zeits. f. Phys. chem. », B. 22, 21 (1933); « La Ricerca scientifica », VII, n. 7-8 (1936).

(3) Questi « Rendiconti », XXII, 349 (1935).

(4) Vedi, per es., PAULING, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 53, 1367 (1931).

tualmente di agire fotochimicamente sul pirrolo stesso ci si deve limitare ad eccitare lo spettro Raman del pirrolo con luci filtrate utilizzando, per es. (come noi abbiamo fatto) le radiazioni dell'arco del mercurio attorno a  $22938\text{ cm}^{-1}$ . In tal caso la riga Raman in questione corrisponde negli spettrogrammi ad una riga a  $19548\text{ cm}^{-1}$  vicina alla riga dell'arco del mercurio a  $19513\text{ cm}^{-1}$  ed a quella meno intensa a  $19593\text{ cm}^{-1}$ . Noi non crediamo che vi possa essere confusione tra la sensibilissima riga diffusa dello spettro Raman del pirrolo e quelle deboli assai del mercurio. A riprova di ciò starebbe anche il fatto che negli spettri dei pirroli sostituiti all'azoto non si osserva la riga in questione. Dovrebbe aggiungersi anche che altri Autori<sup>(1)</sup> hanno riconfermato la riga del pirrolo in discussione eccitando lo spettro Raman del pirrolo con radiazioni a frequenza più alta della  $22938\text{ cm}^{-1}$ . Onde però eliminare ogni dubbio sulla reale esistenza di questa riga abbiamo preparato e studiato l'N-deuteriopirrolo<sup>(2)</sup>. Lo studio di questo deuteriopirrolo poteva fornirci anche il mezzo di stabilire un ulteriore punto di appoggio dell'interpretazione da noi sostenuta per la riga a  $3390\text{ cm}^{-1}$  dello spettro Raman del pirrolo. Invero nell'N-deuteriopirrolo il raddoppio della massa dell'idrogeno oscillante verificata col gruppo N-D avrebbe dovuto portare un sensibile spostamento della banda a  $3390\text{ cm}^{-1}$  verso le minori frequenze.

L'N-deuteriopirrolo venne da noi preparato nel seguente modo: si partì da pirrolato di potassio ottenuto da pirrolo sintetico purissimo in ambiente di gas inerte, polverizzato e lavato accuratamente con etere anidro. Gr. 12 di tale prodotto, costituito da una polvere biancastra vennero sospesi in etere anidro e sbattuti con 15 cc. di  $\text{D}_2\text{O}$  (al 99.2%, di  $d_4^{20} = 1.1049$ , avuto dalla Norsk Hydro-Elektr. Kvaef di Oslo) che si versarono lentamente goccia a goccia nella sospensione di pirrolato in etere raffreddato. Fatta passare quindi nella miscela una debole corrente di anidride carbonica secca si separava la soluzione eterea che, seccata, permette di ottenere per successive distillazioni nel vuoto l'N-deuteriopirrolo. Questo è frazionato ancora a pressione ridotta. L'N-deuteriopirrolo così preparato si presenta come un liquido incolore, rifrangente di densità  $d_4^{25} = 0.9725$ ,  $n_D^{25} = 1.5056$ .

Lo spettro Raman venne ottenuto nelle stesse condizioni sperimentali riferite in un recente lavoro<sup>(3)</sup> e paragonato con lo spettro del pirrolo sintetico ordinario che era servito come punto di partenza nella preparazione. Per ambedue gli spettri le posizioni delle righe e l'apprezzamento della loro intensità (che in un primo tempo<sup>(4)</sup> era stato eseguito con la sola lettura

(1) Ved., per es., VENKATESWARAN, «Ind. Journ. Phys.», 5, 145 (1930).

(2) «La Ricerca Scientifica», VII, n. 3-4, agosto 1936.

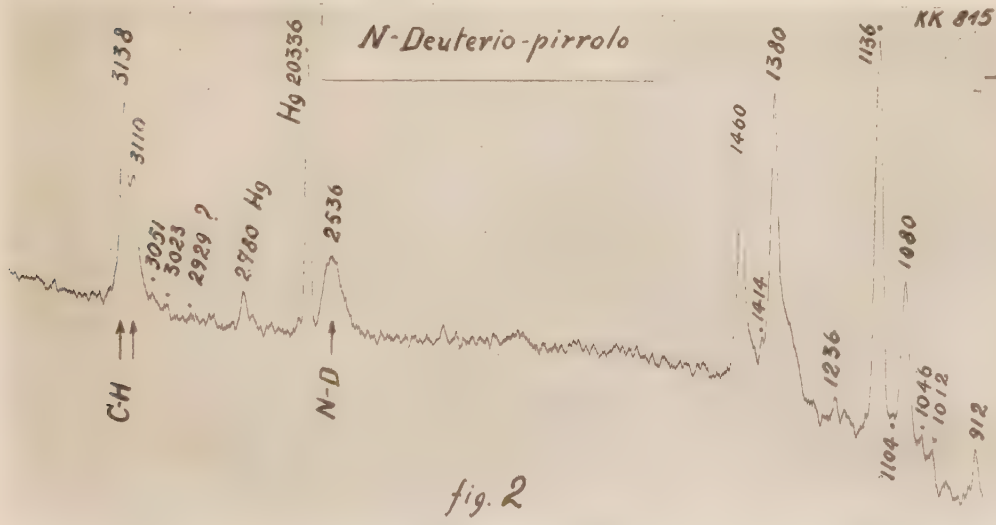
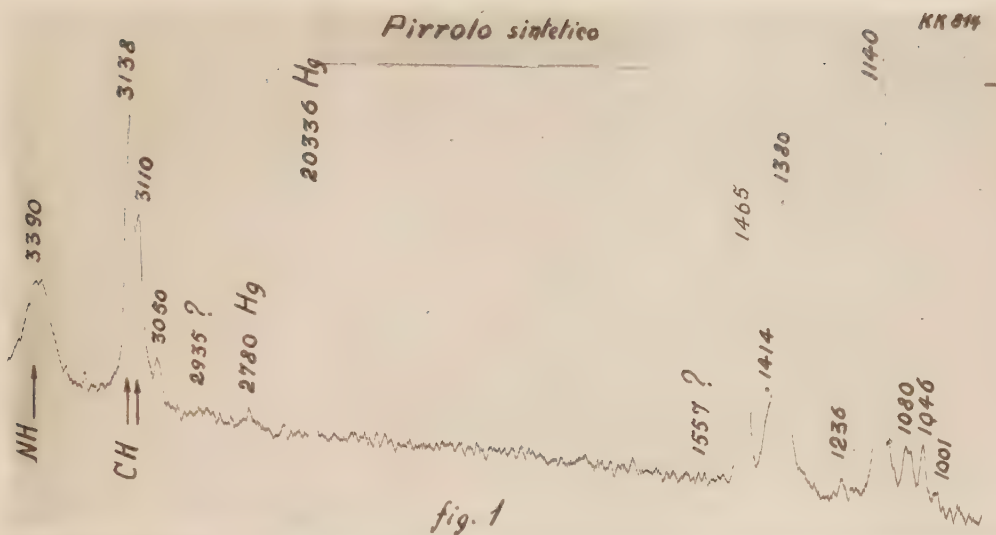
(3) Ved. nota (2) a p. prec.

(4) «La Ricerca Scientifica», anno VII, n. 3-4 (1936). Dobbiamo notare che quasi contemporaneamente a noi lo spettro dell'N-deuteriopirrolo è stato studiato da REDLICH («Wien Ber.», 145, 267 (1936)). Nella nostra prima comunicazione abbiamo accennato al confronto tra i nostri risultati e quelli del prof. Redlich.

micrometrica) è qui dedotto dall'esame dei microfotogrammi delle nostre lastre eseguiti per mezzo del grande microfotometro di Zeiss e che dobbiamo alla grande cortesia della Ditta Zeiss e della sua corrispondente « La Meccanoptica di Milano ». Nelle figure 1 e 2 sono riprodotte le parti più significative dei microfotogrammi sia per il pirrolo che per l'N-deuteriopirrolo. Nella tabella seguente sono date le posizioni delle righe osservate:

N-deuteriopirrolo	—	; 3138 (5)	; 3109 (3)	; 3051 (0 Hg)	; 3023 (0 ?);
Pirrolo	3390 (3 dif)	; 3138 (5)	; 3107 (3)	; 3062 (1/2 Hg)	; —
N-H					
N-deuteriopirrolo	2788 (1/2)	; 2536 (3 dif)	; 1465 (5)	; 1414 (0 f?)	; 1383 (7)
Pirrolo	2786 (0)	; —	; 1465 (5)	; 1414 (1/2 f?)	; 1380 (6) ;
N-D					
N-deuteriopirrolo	1236 (1/2)	; —	; 1136 (10)	; 1104 (00)	; 1080 (4) ;
Pirrolo	1235 (0)	; 1204 (0 ?)	; 1142 (10)	; —	; 1084 (1/2);
N-deuteriopirrolo	1046 (1/2)	; 1012 (1/2)	; —	; 912 (2)	; 867 (1) ;
Pirrolo	1046 (1 1/2)	; —	; 1001 (0)	; —	; 866 (2) ;
N-deuteriopirrolo	835 (1)	; 710 (2)	; 652 (0)	; 608 (1 1/2)	; —
Pirrolo	835 (1 1/2)	; 708 (2)	; 649 (1)	; —	; —
N-deuteriopirrolo	572 (0)	; 456 (0)			
Pirrolo	574 (0)	; —			

La differenza fondamentale fra gli spettri Raman del pirrolo e dell'N-deuteriopirrolo sta appunto nella mancanza (nello spettro Raman di quest'ultimo) della riga a  $3390\text{ cm}^{-1}$  analogamente a quanto accade nello spettro di tutti i pirroli N-sostituiti. Con ciò si riconferma indirettamente ancora una volta la reale esistenza della riga  $3390\text{ cm}^{-1}$  nello spettro del pirrolo e l'ipotesi del suo riferimento al gruppo N-H. Nello spettro dell'N-deuteriopirrolo compare invece a  $2536\text{ cm}^{-1}$  una riga diffusa del tutto analoga (a parte la posizione) con quella del pirrolo a  $3390\text{ cm}^{-1}$ . Se si considerano le frequenze di due oscillatori lineari rispettivamente N-H e N-D per i quali la forza di richiamo fra le due masse resti eguale, in relazione alla differenza delle masse H e D si dovrebbe attenderci che il rapporto delle rispettive frequenze (pari alla radice quadrata del rapporto inverso delle masse ridotte) dovesse essere circa 1,37. Il rapporto tra la frequenza  $3390\text{ cm}^{-1}$  del pirrolo e la corrispondente  $2536\text{ cm}^{-1}$  dell'N-deuteriopirrolo è di circa 1,34. L'accordo è significativo se si pensa che è assai grossolana l'approssimazione di considerare l'oscillazione del gruppo N-H e rispettivamente N-D come indipendente dal resto della molecola. D'altra parte si deve notare che ci si avvicina di più allo stato di cose schematizzato dal calcolo ora citato se si considera la direzione N-H e rispettivamente N-D come formante un angolo abbastanza forte con un piano dell'anello pirrolico.







È interessante paragonare la frequenza più alta di oscillazione dello spettro Raman dell' $\text{NH}_3$  e dell' $\text{ND}_3$ , il cui spettro Raman è stato studiato da Dadiou e Kopper<sup>(1)</sup> con la corrispondente del pirrolo e dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo

Sostituente X all' $\text{N}$		$\text{C}_4\text{H}_4\text{N-X}$	$\text{NX}_3$
H	$\text{cm}^{-1}$	3390	3382
D	$\text{cm}^{-1}$	2536	2500
Rapporto		1,34	1,35

Nei microfotogrammi delle figure 1 e 2 si può nettamente osservare il forte spostamento della banda del  $\text{N-X}$  tra i due spettri del pirrolo e dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo. Lo studio dei microfotogrammi può rilevare altre differenze (se pur minori) fra i due spettri, differenze riportate pure nella tabella delle frequenze soprariferite. Così la  $1235 \text{ cm}^{-1}$  del pirrolo sembra rinforzata nello spettro dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo. In quest'ultimo mancherebbe del tutto la  $1204 \text{ cm}^{-1}$  per il vero assai debole anche nello spettro del pirrolo. La riga intensa e caratteristica del pirrolo a  $1142 \text{ cm}^{-1}$  permane nello spettro dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo nella stessa posizione e tutt'al più spostata di pochi numeri d'onda verso le minori frequenze. Una netta differenza tra i due spettri sta pure nel rapporto della intensità delle due righe a  $1080$  e  $1046 \text{ cm}^{-1}$ . Nello spettro del pirrolo queste due righe mostrano quasi la stessa intensità invece in quello dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo la  $1080 \text{ cm}^{-1}$  si presenta assai più intensa della  $1046 \text{ cm}^{-1}$ . Ciò conferma indirettamente ancora una volta la nostra opinione che detta riga a  $1080 \text{ cm}^{-1}$  non si debba classificare come una  $\nu_{1142}$ . D'altra parte dalle nostre precedenti ricerche (2) si deduce che tale riga a  $1080 \text{ cm}^{-1}$  circa è spesso assai più intensa nei pirroli sostituiti (e specie nei pirroli sostituiti all'azoto) che non nel pirrolo semplice. Lo spettro dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo mostrerebbe ancora le tre righe  $1012 (\frac{1}{2})$ ,  $912 (2)$ ,  $608 (1 \frac{1}{2})$  che mancano nello spettro del pirrolo e compaiono invece nello spettro di qualche altro pirrolo sostituito. Concludendo si può affermare che lo studio dello spettro Raman dell' $\text{N}$ -deuteriopirrolo ha confermato l'interpretazione già data per la riga a  $3390 \text{ cm}^{-1}$  del pirrolo portando un sensibile appoggio all'ipotesi che il pirrolo possa, almeno in parte, esistere in una forma nella quale la direzione di legame  $\text{N-H}$  non sia complanare con il piano dell'anello. Abbiamo in corso lavori atti a chiarirci ancora questo punto con esperienze di altra natura.

(1) «Wien. Anz.», 21-3-1935.

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. — Arseniuri e antimoniuri di Lantanio, Cerio e Praseodimio*<sup>(1)</sup>. Nota III di A. IANDELLI e E. BOTTI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Delle leghe fra metalli delle terre rare e l'Arsenico e l'Antimonio sono conosciute quelle del Cerio, preparate da Hirsch<sup>(3)</sup> e Kellermann<sup>(4)</sup> e studiate specialmente per le loro proprietà piroforiche<sup>(5)</sup>.

Fra queste leghe noi abbiamo esaminato solo quelle corrispondenti ai composti MeAs e MeSb (Me = La, Ce, Pr), preparandole direttamente dagli elementi nel modo già descritto<sup>(6)</sup>. In tutti i casi, pure con metodo di preparazione che potrebbe dar luogo facilmente a un prodotto di composizione diversa, non abbiamo potuto mai osservare la formazione di composti con formula differente da quella 1:1; nè lo stabilirsi di soluzioni solide fra questi ultimi e uno dei due componenti.

Abbiamo anche cercato di preparare con lo stesso procedimento i composti 1:1 col Bismuto, ma in questo caso, in accordo del resto col diagramma dato da Vogel<sup>(7)</sup> per le leghe Ce—Bi, non si arriva ad un prodotto unico; per cui non abbiamo riportato i dati ottenuti.

I metalli rari usati in questa, come nelle precedenti ricerche, avevano un grado di purezza non inferiore al 99.5%; lo 0.5% essendo costituito essenzialmente da Si e C. L'Arsenico e l'Antimonio erano i prodotti di Kahlbaum.

La reazione fra il metallo raro e l'Arsenico e l'Antimonio (e anche il Bismuto) è violenta e sembra avvenire ad una temperatura ben determinata. Gli arseniuri sono i più difficili a ottenere per il fatto che in alcuni casi, durante la reazione, una parte dell'Arsenico volatilizza, lasciando fra la massa del composto un po' di metallo raro che non ha reagito, sotto forma della limatura originale. Gli antimoniuri si formano invece senza particolari difficoltà.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(3) A. HIRSCH, « Journ. Ind. Eng. Chem. », 3, 880 (1911); 4, 65 (1912); Id., « Trans. Amer. Electrochem. Soc. », 29, 57 (1911).

(4) H. KELLERMANN, *Ueber die Darstellung des metallischen Ce und seine Verbindungen mit As und Sb*. Berlin, 1910.

(5) H. KUNHEIM, *Brevetto tedesco D. R. P.* 38762 (1909).

(6) Vedi Nota I, questi « Rendiconti », XXIV, 459 (1936).

(7) R. VOGEL, « Zs. an. allg. Ch. », 84, 327 (1914).

I composti così preparati sono di colore nero e hanno una durezza e una fragilità minore che non gli azoturi e i fosfuri. Essi sono molto più stabili di questi ultimi, tanto che possono conservarsi lungamente all'aria e non si alterano se riscaldati moderatamente. Non vengono attaccati dall'acqua nè a freddo nè a caldo, mentre reagiscono facilmente con gli acidi cloridrico e nitrico. L'acido nitrico concentrato trasforma i composti col Cerio in masse giallo rossastre insolubili, corrispondenti probabilmente a prodotti di ossidazione a  $Ce^{IV}$ , che si sciolgono solo con l'aggiunta di riducenti.

I tre arseniuri, esaminati col metodo delle polveri, usando la radiazione K di un anticatodo di Rame, danno dei fotogrammi con fondo continuo così intenso, da renderne difficile la lettura. Usando invece la radiazione K del Ferro, si hanno dei bei fotogrammi di una notevole chiarezza. Le misùre fatte nei due casi, sia con anticatodo di Rame, che con quello di Ferro, forniscono gli stessi risultati. I dati riportati nella tabella I sono quelli ottenuti con anticatodo di Ferro e naturalmente non si possono osservare così quelle riflessioni, corrispondenti a piani reticolari a indici alti, che si avrebbero invece con la radiazione K del Rame.

TABELLA I.

*Fotogrammi delle polveri di LaAs, CeAs e PrAs.*  
*Anticatodo di Ferro, radiazione K:  $\lambda_{\alpha_1, \alpha_2} = 1.934 \text{ \AA}$ .*

Intensità	LaAs		CeAs		PrAs		Indici
	$\theta$ corr.	d/n	$\theta$ corr.	d/n	$\theta$ corr.	d/n	
mf-f	18°28'	3.053	18°40'	3.021	18°43'	3.013	2 0 0
f	26 19	2.181	26 55	2.136	27 7	2.121	2 2 0
d	—	—	32 24	1.805	32 27	1.802	3 1 1
m	33 24	1.757	33 36	1.748	33 58	1.731	2 2 2
md	39 23	1.524	39 27	1.522	40 6	1.501	4 0 0
f-ff	44 50	1.372	45 30	1.356	46 15	1.339	4 2 0
ff	50 39	1.250	51 23	1.237	52 18	1.222	4 2 2
dd	54 57	1.181	55 56	1.167	—	—	5 1 1
f	63 7	1.084	64 23	1.072	65 51	1.060	4 4 0
ff	70 58	1.023	—	—	—	—	6 0 0
	$a_0 = 6.125 \text{ \AA}$		$a_0 = 6.06_0 \text{ \AA}$		$a_0 = 5.997 \text{ \AA}$		

Campioni diversi di uno stesso arseniuro danno sempre fotogrammi sovrapponibili, per cui si può escludere che si formino soluzioni solide, almeno col metodo di preparazione usato.

Su alcuni di questi fotogrammi compaiono poche righe debolissime che non si possono attribuire alla struttura trovata. Le impurezze che probabilmente producono tali righe non sono svelabili con l'analisi chimica, perchè in tutti i casi questa fornisce per i tre composti risultati in perfetto accordo con la formula MeAs.

Gli antimoniuri sono stati esaminati usando la radiazione K del Rame e ottenendo così buoni fotogrammi. I dati relativi sono riuniti nella tabella II.

TABELLA II.

*Fotogrammi delle polveri di LaSb, CeSb e PrSb.*

*Anticatodo di Rame, radiazione K:  $\lambda_\alpha = 1.539 \text{ \AA}$ ;  $\lambda_\beta = 1.389 \text{ \AA}$ .*

LaSb			CeSb			PrSb			Indici
Int.	$\theta$ corr.	d/n	Int.	$\theta$ corr.	d/n	Int.	$\theta$ corr.	d/n	
d	13°51'	3.215	md	13°54'	3.203	m	14°—	3.181	2 0 0
f	19 34	2.298	f	19 56	2.257	f	19°59'	2.252	2 2 0
m-mf	24 15	1.874	m	24 33	1.852	m	24 48	1.834	2 2 2
d	28 26	1.616	md	28 44	1.601	md	28 59	1.588	4 0 0
ff	32 —	1.452	ff	32 30	1.432	ff	32 53	1.417	4 2 0
f	35 35	1.322	f	36 8	1.305	f	36 26	1.296	4 2 2
d	42 1	1.149	d	42 59	1.129	d	43 32	1.117	4 4 0
ff	45 27	1.080	ff	46 15	1.065	ff	46 37	1.059	6 0 0
f	48 56	1.021	f	49 35	1.011	f	49 59	1.005	6 2 0
f-ff	52 9	0.975	f-ff	52 48	0.966	f-ff	53 24	0.959	6 2 2
d	55 35	0.933	d	56 23	0.924	d	57 5	0.917	4 4 4
f-ff	58 57	0.898	f-ff	59 57	0.889	f-ff	60 43	0.882	6 4 0
fff	62 44	0.866	fff	64 11	0.855	fff	64 47	0.851	6 4 2
$a_o = 6.475 \text{ \AA}$			$a_o = 6.399 \text{ \AA}$			$a_o = 6.353 \text{ \AA}$			

I composti LaAs, CeAs e PrAs hanno un andamento dell'intensità delle righe identico, e lo stesso avviene per i tre antimoniuri. Tutte le righe, escluse quelle rammentate per i composti MeAs, si ordinano sui grafici di

Hull per una simmetria corrispondente a un reticolo cubico a facce centrate. Nei fotogrammi degli arseniuri le riflessioni a indici dispari o sono deboli o mancano completamente; in quelli degli antimoniuri non si osservano mai. È da escludere quindi la possibilità di una struttura tipo blenda, dato che si dovrebbe avere un'intensità considerevole per alcune di queste righe a indici dispari. Del resto, calcolando le intensità in questa ipotesi, si trova un andamento assai diverso da quello osservato anche per le righe a indici pari.

TABELLA III.  
*Intensità nei fotogrammi di PrAs e PrSb.*

Indici	PrAs		PrSb	
	Calcolata	Osservata	Calcolata	Osservata
1 1 1	0.56	—	0.05	—
2 0 0	4.11	mf-f	6.45	m
2 2 0	5.82	f	9.81	f
3 1 1	0.94	d	0.08	—
2 2 2	3.04	m	5.23	m
4 0 0	1.99	md	3.29	md
3 3 1	0.78	—	0.06	—
4 2 0	7.88	f ff	11.35	ff
4 2 2	8.92	ff	10.08	f
5 1 1	1.38	dd	0.07	—
3 3 3				
4 4 0	8.45	f	4.56	d
5 3 1	—	—	0.10	—
6 0 0	—	—	11.49	ff
4 4 2				
6 2 0	—	—	9.56	f
5 3 3	—	—	0.06	—
6 2 2	—	—	10.71	f-ff
4 4 4	—	—	4.12	d
5 5 1	—	—	0.16	—
7 1 1				
6 4 0	—	—	14.51	f-ff
6 4 2	—	—	36.06	fff



Nella tabella III sono riportati i risultati del calcolo dell'intensità per una struttura tipo cloruro di Sodio; e anche qui, come nei casi precedentemente esaminati degli azoturi e dei fosfuri, la concordanza fra i valori calcolati e quelli osservati risulta ottima.

Abbiamo cercato di vedere se anche il Bismuto fosse capace di dare con una terra rara un composto 1 : 1 con struttura tipo NaCl. I fotogrammi che si ottengono mostrano sempre le righe assai forti del Bismuto che, dato il loro numero si sovrappongono a molte di quelle che dovrebbe dare il composto. Il fatto può essere spiegato osservando che sul diagramma di Vogel per il sistema Ce-Bi, il composto CeBi è a massimo nascosto, ed è difficile tenerlo con un raffreddamento rapidissimo come si ha col metodo di preparazione seguito.

Anche per gli arseniuri e gli antimoniuri, come già per gli azoturi e i fosfuri, si osserva che la costante reticolare è più grande di quella che si calcolerebbe dalla somma dei raggi atomici; e che inoltre essa è minore per i composti col Praseodimio che per quelli col Cerio, mentre i raggi atomici di questi due elementi sono praticamente uguali.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Sulla simmetria molecolare del pirrolo*. Nota di G. B. BONINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio M. BETTI.

Le misure sperimentali sullo spettro Raman del pirrolo eseguite sia in questo che in altri laboratori mi permettono di discutere in questa Nota un paragone tra lo spettro Raman e lo spettro ultrarosso di assorbimento del pirrolo stesso onde poter fare alcune considerazioni sulla sua simmetria molecolare. Nella tabella seguente metto di fronte i massimi di assorbimento ultrarossi del pirrolo secondo Coblentz <sup>(2)</sup> nella prima colonna, e nella seconda lo spettro Raman del pirrolo sintetico ottenuto in questo laboratorio e discusso in precedenti lavori in collaborazione con R. Manzoni <sup>(3)</sup>. Nella terza colonna è dato lo spettro Raman del pirrolo recentemente pubblicato da Reitz <sup>(4)</sup> spettro che registra qualche riga in meno del nostro. Non credo utile riportare qui lo spettro del pirrolo dato da Stern <sup>(5)</sup> in quanto detto spettro è in alcune sue parti contraddetto dalle misure nostre e da quelle di Reitz <sup>(4)</sup> e presenta, anche sotto il punto di vista sperimentale, delle gravi incertezze rilevate e criticate sia dal Reitz sia da nostri precedenti lavori <sup>(3)</sup> <sup>(6)</sup>. Nella tabella seguente le frequenze sono date in  $\text{cm}^{-1}$  anche per i massimi

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) « Carnegie Publ. N. 35 Washington » (1905): curva a p. 278 e tabelle p. 143.

(3) « La Ricerca Scientifica », vol. I, nn. 11-12 (1936).

(4) « Zeits. Phys. Chem. », B. 33, 179 (1936).

(5) « Zeits. Phys. Chem. », B. 31, 403 (1936).

(6) « Gazz. Chim. Ital. », 66, 316 (1936).

ultrarossi. Per questi i valori debbono ritenersi approssimati a più o meno 5-10 numeri d'onda data la difficoltà di rilevare con assoluta esattezza i detti massimi dalle curve di Coblentz. Questi valori perciò non furono riportati al vuoto.

*Spettro Raman e ultrarosso del Pirrolo*  
(frequenza in  $\text{cm}^{-1}$ ).

Massimi di assorbimento ultrarossi	S p e t t r o   R a m a n		
	Bonino-Manzoni (2)	Reitz (3)	Gradi di depolarizzazione (1)
3390 f	3390 (3 dif)	3420 (3)	0,4
3125 m	3138 (5)	3133 (8)	0,9
—	3107 (3)	3104 (4)	—
—	3062 (Hg ?)	—	—
—	—	2918 (00?)	—
2780 dd	2786 (0)	2760 (1?)	—
2530 md	—	—	—
2240 d	—	—	—
2120 d	—	—	—
1710 m	—	—	—
1600 dd	—	—	—
1538 f	—	—	—
—	1465 (5)	1465 (6)	0,6
1418 ff	1414 (1/2)	—	—
—	1380 (6)	1376 (8)	0,5
1273 md	—	—	—
—	1235 (0)	1231 (0)	—
1202 md	1204 (0?)	—	0,2
1130 f	1142 (10)	1143 (12)	0,2
1075 d	1084 (1 1/2)	—	—
1052 ff	1046 (1 1/2)	1049 (3)	—
1005 ff	1001 (00?)	—	0,1
972 dd	—	—	—
873 f	866 (2)	865 (3)	—
—	835 (1 1/2)	837 (3)	—
assorbimento totale	708 (2)	711 (4)	—
»	649 (1)	643 (3)	—
»	574 (0)	—	—

ff = intensità fortissima; f = forte; m = media; d = debole; dd = debolissima.

(1) VENKATES WARAN, « Phil. Mag. », XV, 263 (1933)

(2) Ved. nota (3) p. prec.

(3) Ved. nota (4) p. prec.

Secondo il modello ordinario con cui si schematizza la molecola del pirrolo (fig. 1) si possono ammettere come giacenti in un piano i quattro atomi di carbonio e l'atomo di azoto e i quattro atomi di idrogeno legati ai C mentre la direzione di « legame » N-H farebbe un certo angolo col piano dell'anello pirrolico data la non complanarità delle tre direzioni di legame per l'N trivalente<sup>(1)</sup>. Perciò il piano dell'anello non sarebbe piano



Fig. 1.

di simmetria della molecola. Questa ammetterebbe solo un piano speculare  $\sigma$  perpendicolare al piano dell'anello, passante per l'etero-atomo e tagliante in due parti simmetriche la molecola. La simmetria corrisponderebbe al gruppo  $C_s$ . Applicando le considerazioni che recentemente ho riassunto in questi « Rendiconti »<sup>(2)</sup> si avrebbero allora per un tale modello della molecola del pirrolo le seguenti oscillazioni fondamentali.

*Molecola del pirrolo  $C_4H_4NH$   
(simmetria  $C_s$ ).*

Tipo delle oscillazioni	Simmetria rispetto a $\sigma$	Effetto Raman	Assorbimento ultrarosso	Numero oscillazioni
A'	simmetrica	polarizzata	attiva	13
A''	antisimmetrica	depolarizzata	attiva	11

Dovremmo cioè avere 24 oscillazioni tutte attive rispettivamente in effetto Raman e assorbimento ultrarosso delle quali in effetto Raman 13 polarizzate e 11 depolarizzate. Ma possiamo far corrispondere alla molecola del pirrolo anche un altro modello proposto da Pauling e sostenuto da questo Autore recentemente sulla base di certe anomalie della banda di assorbimento dell'NH nell'ultrarosso<sup>(3)</sup>. In tale modello si considera l'azoto come ionizzato in uno stato tetravalente con tre direzioni di « legame » nel piano xy (piano dell'anello pirrolico) di cui una « legante » l'H dell'N-H ed una quarta direzione perpendicolare al piano dell'anello stesso. Con ciò si avrebbero i cinque idrogeni pirrolici nel piano dell'anello. Questa idea di Pauling potrebbe però portarci anche a considerare accanto al detto modello, una configurazione elettropolare della molecola del pirrolo del tipo:

(1) Vedi per es. PAULING, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 53, 1367 (1931).

(2) Questi « Rendiconti », XXIV, 288, 374 (1936).

(3) PAULING, « Journ. Amer. Chem. Soc. », 58, 94 (1936).

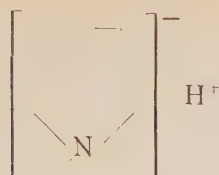


Fig. 2.

considerando l'N in una configurazione atomica  $2s\ 2p^4$  con  $2p^2\pi$ . Con ciò si riavrebbero per il nucleo pirrolico le sei autofunzioni  $p_\pi$  capaci della nota perturbazione aromatica ed in più si avrebbe un immediato riscontro nelle proprietà « acide » dell'imino pirrolico. Una tale configurazione però non può da sola rappresentarci la molecola del pirrolo, dato che la riga  $3390\text{ cm}^{-1}$  dello spettro Raman del pirrolo si deve considerare come dovuta ad una delle oscillazioni fondamentali impegnanti principalmente un legame N-H, ipotesi questa recentemente confermata dalle nostre ricerche sullo spettro Raman dell'N-deuteriopirrolo. In ambo i casi testè prospettati il piano dell'anello diventerebbe piano di simmetria. Il numero delle masse oscillanti sarebbe di dieci per la molecola neutra del pirrolo secondo Pauling e di nove per l'« anionide » pirrolico nella forma elettropolare ora schematizzata. La simmetria sarebbe la  $C_{2v}$  costituita da due piani di simmetria perpendicolari fra loro ( $\sigma_h$  = piano dell'anello;  $\sigma_v$  = perpendicolare a  $\sigma_h$  e passante per l'N) e da un asse binario contenuto da ambo i due piani.

Dalle considerazioni sopraricordate e riassunte nel mio precedente lavoro si possono anche in questo caso dedurre i tipi di oscillazioni e i numeri delle stesse per i due modelli ora schematizzati:

*Pirrolo a simmetria molecolare  $C_{2v}$ .*

Tipi di oscillazioni	Simmetria rispetto a		Raman	Ultrarosso	Num. di oscillaz.	
	$\sigma_h$	$\sigma_v$			( $C_4H_4NH$ )	( $C_4H_4N$ ) <sup>-</sup>
$A_1$	simmetrica	simmetrica	polarizzata	attiva	9	8
$A_2$	antisimmetr.	antisimmetr.	depolarizzata	inattiva	3	3
$B_1$	simmetrica	antisimmetr.	depolarizzata	attiva	8	7
$B_2$	antisimmetr.	simmetrica	depolarizzata	attiva	4	3

Il paragone con i dati sperimentali si presenta ancora difficile e tale da non permettere delle deduzioni definitive. Si possono frattanto fare le osservazioni seguenti: a) il modello non complanare della molecola del pirrolo a simmetria  $C_s$  non si potrebbe considerare l'unica forma possibile per il pirrolo, in quanto per tale modello tutte le righe Raman dovrebbero trovare i corrispondenti massimi di assorbimento nell'ultrarosso. Invece al-

meno 5 righe Raman dello spettro Bonino-Manzoni e almeno 6 righe Raman dello spettro Reitz mancano del loro corrispondente nell'ultravioletto. b) Le regole di selezione nei due casi sopra discussi richiedono che almeno tutte le righe polarizzate in effetto Raman corrispondano a massimi di assorbimento ultravioletto. Ora (anche non volendo considerare la  $3062\text{ cm}^{-1}$ , probabilmente attribuibile allo spettro del mercurio) osserviamo due righe Raman date come polarizzate da Venkateswaran ( $1465$  e  $1380\text{ cm}^{-1}$ ) che non corrispondono a massimi di assorbimento ultravioletto. c) D'altra parte si osserva un certo numero di massimi ultravioletti che non trovano corrispondenza in effetto Raman contrariamente alle regole di selezione sopra dedotte. Probabilmente però i 5 massimi ultravioletti tra  $1600$  e  $2530\text{ cm}^{-1}$  sono da riguardarsi come relativi a frequenze di combinazione. Anche la  $1538\text{ cm}^{-1}$  circa dello spettro ultravioletto potrebbe spiegarsi come una frequenza di combinazione  $835 + 708\text{ cm}^{-1}$  e la  $1273\text{ cm}^{-1}$  circa dello spettro ultravioletto come una  $708 + 574\text{ cm}^{-1}$ . Però la notevole intensità del massimo di assorbimento a  $1538\text{ cm}^{-1}$  ed il fatto di aver trovato anche per il tiofene<sup>(1)</sup> una analoga incongruenza per righe di frequenza quasi coincidenti, come pure il fatto osservato che queste due righe sono attive e caratteristiche negli spettri Raman dei derivati sia del pirrolo che del tiofene potrebbero essere degli argomenti contrari ad una tale ipotesi.

Osservando le cose con maggiore rigore si deve però anche notare che il massimo ultravioletto a  $1538\text{ cm}^{-1}$  non ha esatta corrispondenza negli spettri Raman dei derivati del pirrolo. Ma nei pirroli alchilati che abbiamo in precedenza studiati si osservano tra  $1500$  e  $1600\text{ cm}^{-1}$  due righe di cui una più forte attorno ai  $1520\text{ cm}^{-1}$  ed una più debole a circa  $1570-1580\text{ cm}^{-1}$ . La differenza nelle posizioni di aggiustamento dello spettrometro usato da Coblentz corrisponderebbe per queste due righe a circa  $6'$  di arco con un'apertura delle fessure spettrometriche corrispondente a  $4'$ . Potrebbe perciò considerarsi il massimo di Coblentz a  $1538\text{ cm}^{-1}$  anche come l'insieme non risolto di due massimi le cui frequenze di oscillazione siano attive e caratteristiche negli spettri Raman dei pirroli alchilati pur mancando in quello del pirrolo non sostituito. Analogamente potrebbe supporre che la forte banda di assorbimento ultravioletto a  $1412\text{ cm}^{-1}$  circa corrisponda a tre massimi eventuali a  $1465$ ,  $1414$ ,  $1380\text{ cm}^{-1}$  coincidenti con le tre righe Raman del pirrolo. Però la differenza tra i due massimi eventuali estremi a  $1465$  e  $1380\text{ cm}^{-1}$  corrisponde a  $8'$  di cerchio nelle condizioni sperimentali di Coblentz e si trova che con gli stessi mezzi sperimentali Coblentz riesce in altri casi a risolvere egregiamente nella stessa zona dello spettro ultravioletto dei massimi di assorbimento distanti fra loro di circa  $7'-8'$  di arco sullo spettrometro. Così Coblentz risolve i due forti massimi a  $6,30$  e  $6,70\text{ }\mu$  per la metilanilina e quelli a  $5,95$  e  $6,30\text{ }\mu$  per il cumolo la cui distanza è

(1) Questi « Rendiconti », XXIV, 207, 1936.



appunto rispettivamente di 8' e di 7'. L'ipotesi perciò della mancata risoluzione in ultrarosso dei due eventuali massimi a 1465 e 1380 cm<sup>-1</sup> resterebbe poco appoggiata.

Come già si è discusso per il tiofene si potrebbe pensare anche per il pirrolo non sostituito ad una forma simmetrica con un gruppo NH centrale e con 4 gruppi CH posti ai vertici di un quadrato e « coordinati » dal gruppo NH stesso. In tal caso la simmetria della molecola completa C<sub>4</sub>H<sub>4</sub>NH sarebbe da riferirsi al tipo C<sub>4v</sub>. Le oscillazioni relative e le regole di selezione si possono calcolare col metodo precedentemente pubblicato <sup>(1)</sup>.

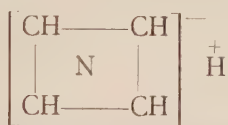
*Oscillazioni della molecola del pirrolo secondo una simmetria C<sub>4v</sub>.*

Tipo delle oscillazioni	Simmetria rispetto a			Raman	Ultrarosso	Numero di oscillazioni
	C <sub>4</sub>	σ'	σ''			
A <sub>1</sub>	simmetrica	simmetrica	simmetrica	polarizzata	attiva	5
A <sub>2</sub>	simmetrica	antisimmetr.	antisimmetr.	inattiva	inattiva	1
B <sub>1</sub>	antisimmetr.	simmetrica	antisimmetr.	depolarizzata	inattiva	2
B <sub>2</sub>	antisimmetr.	antisimmetr.	simmetrica	depolarizzata	inattiva	4
E <sub>1</sub>	deg.	—	—	depolarizzata	attiva	6 × 2

deg = degenerare (doppiamente).

Anche seguendo un tale punto di vista (s'intende sempre per il pirrolo non sostituito) si può pensare ad una forma pirrolica elettropolare:

In tale caso all'« anionide » pirrolico sarebbe attribuibile una simmetria D<sub>4h</sub> (azoto complanare) e gli competerebbero (come già ho calcolato nel caso analogo per il tiofene) le seguenti oscillazioni:



Tipo	A <sub>1</sub>	A <sub>2</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	E <sub>1</sub>	A <sub>1</sub> '	A <sub>1</sub> ''	B <sub>1</sub> '	B <sub>1</sub> ''	E <sub>1</sub> '	Totale
Numero	2	1	0	2	1 (x2)	0	2	2	2	4 (x2)	21
Raman	p	in	—	d	d	—	in	in	in	in	6
Ultrarosso	in	in	—	in	in	—	att	in	in	att	10

p = polarizzata; in = inattiva; att = attiva; d = depolarizzata.

(1) Questi « Rendiconti », XXIV, 374, 1936.

Come già nel caso del tiofene si deve osservare che questi modelli *aa* *oli* non riescono a spiegare gli spettri Raman e ultrarossi del pirrolo dato che per es. nello spettro Raman del pirrolo abbiamo almeno 6 righe polarizzate mentre il modello a simmetria  $C_{4v}$  ne prevederebbe solo 5 e quello a simmetria  $D_{4h}$  soltanto 2. Viceversa quest'ultimo modello potrebbe spiegare l'assenza in effetto Raman di alcune frequenze che viceversa appaiono in ultrarosso. Come si vede, tenendo presente il mio precedente lavoro sulla simmetria molecolare del tiofene, le difficoltà sollevate dall'interpretazione degli spettri mostrano un netto parallelismo tra tiofene e pirrolo.

Questa osservazione può rendere meno attendibile la previsione di una simmetria  $D_{5h}$  che, sotto certe limitazioni, potrebbe essere pensata per la forma pentagonale elettropolare del pirrolo. Ciò nondimeno in una breve Nota in corso discuterò pure una tale eventualità a proposito di alcune ricerche sugli spettri del ciclopentadiene.

Per il caso del tiofene come per quello del pirrolo sarebbe di altissimo interesse la conoscenza degli spettri Raman e degli spettri ultrarossi allo stato di vapore. Invero in ambo i casi la discussione ha posto in luce degli elementi favorevoli all'ipotesi di una configurazione degli eterocicli stessi avente un centro di simmetria od un'asse quaternario. Tali configurazioni però sono in ambo i casi in contrasto con la corrispondenza di molte righe tra i due spettri come col numero relativamente forte di righe Raman polarizzate riscontrate dall'esperienza. Una ricerca sui due eterocicli allo stato di vapore potrebbe assicurarci che una tale corrispondenza non sia dovuta a fatti contingenti allo stato liquido e cioè relativi ai campi intermolecolari o ad eventuali associazioni molecolari che nello stato liquido si possano verificare. Questi fatti potrebbero ridurre allo stato liquido la originaria simmetria molecolare dei due eterocicli pentatomici.

Concludendo credo che le discussioni contenute in questo lavoro e nel precedente sulla simmetria degli eterocicli pentatomici se pur hanno dimostrato che molto ancora si deve chiedere all'esperienza, hanno però potuto indicare in quale direzione la ricerca sperimentale potrebbe essere ripresa con probabilità di successo onde portare un contributo nuovo allo studio degli eterocicli pentatomici per la ricerca di quel « geistiges Band » per cui, proprio nel caso del pirrolo, Giacomo Ciamician nel 1904 affermava « dieses Band ist aber schwer zu finden » <sup>(1)</sup>.

(1) « Ber. », XXXVII, 4252 (1904).

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze* <sup>(1)</sup>. Nota II di L. CAVALLARO, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Esposta succintamente la teoria, in una precedente Nota, si riferisce ora sulla misura delle bande di assorbimento dipolare degli alcoli butilico normale ed isoamilico. Il metodo <sup>(3)</sup> adottato nelle presenti misure può essere così riassunto:

Un circuito generatore di radioonde per frequenze  $10^7 \div 10^8$  Herz, dotato di alta stabilità, è accoppiato induttivamente con un ondometro a triodo, tarato per lo stesso campo di frequenze.

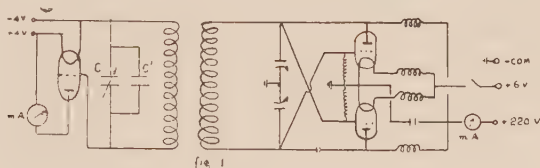


Fig. 1.

In parallelo con il condensatore C del circuito ondometro (cfr. fig. 1) è posto un condensatore C' di capacità molto piccola ( $\sim 0,5 \mu\mu\text{F}$  in aria), costruito in modo da poter contenere fra le armature il liquido in esame. Si stabilisce la sintonia fra i due circuiti e si varia la loro distanza in modo che il galvanometro inserito sul circuito di placca dell'ondometro segni sempre la stessa deviazione D, qualunque sia la frequenza usata.

Si inserisce ora il liquido in esame e si riportano i due circuiti in risonanza variando opportunamente la capacità del condensatore C. La deviazione del galvanometro sia ora D'; sarà  $D' < D$  per effetto dell'assorbimento di energia dovuto al liquido polare, introdotto fra le armature di C'.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 4 aprile 1937.

(3) Per i principali metodi di misura dell'assorbimento dipolare, vedi: W. ZIEGLER, «Phys. Zeitschr.», 35, p. 476, 1934; MALSCH, «Phys. Zeitschr.», 33, p. 19, 383, 1932; G. MARTIN, «Phys. Zeitschr.», 37, p. 165, 665, 1936; P. DEBYE, «Phys. Zeitschr.», 35, p. 101, 1934; IBID., 36, p. 100, 193, 1935; M. WIEN, «Phys. Zeitschr.», 37, p. 155, 1936; ROHDE, WULFF, SCHWINDT, «Zeitschr. f. angew. Chem.», p. 437, 1936; H. HAASE, «Phys. Zeitschr.», 36, p. 68, 1934; S. I. MIZUSHIMA, «Phys. Zeitschr.», 28, p. 418, 1927; H. RIECHE, «Zeitschr. f. Phys.», 95, p. 158, 1935; H. BECK, «Phys. Zeitschr.», 34, p. 271, 1933.

L'andamento del rapporto:  $\frac{D - D'}{D}$  in funzione della frequenza, o, a frequenza costante, in funzione della temperatura, renderà conto dell'assorbimento dipolare del liquido in esame.

Oltre alla misura dell'assorbimento, legata ad  $\epsilon''$ , è stata anche determinata la dispersione anomala, attraverso la misura di  $\epsilon'$  in funzione della frequenza. A questo scopo si è usato il seguente dispositivo, secondo il metodo di risonanza: lo stesso circuito generatore sopra descritto (indicato in fig. 2 con I) viene accoppiato induttivamente, in modo molto lasco, con un circuito intermedio II, costituito da self di accoppiamento e da un condensatore tarato C, di alta precisione, la cui capacità può essere variata in modo continuo. In parallelo ad esso è inseribile il condensatore C' che può essere riempito del liquido in esame; essendo costante la self, la sintonia

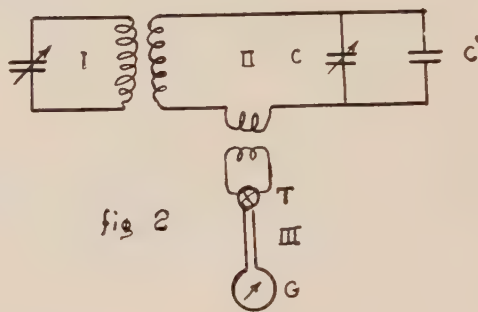


Fig. 2.

fra I e II dipende dai valori dati alle capacità di C e di C'; essa viene rivelata per mezzo di un terzo circuito aperiodico, costituito da una termocoppia nel vuoto (Radio Corporation 493 K) e da un galvanometro a sospensione (Tinsley; sensibilità  $10^{-8}$  Ampère). Con questo circuito III è possibile la determinazione della curva di risonanza fra I e II; la misura di  $\epsilon'$  del liquido in esame segue dal rapporto:

$$\epsilon' = \frac{C_1 - C_3}{C_1 - C_2}$$

in cui  $C_1, C_2, C_3$ , sono i valori della capacità di C, rispettivamente senza C', con C' vuoto, con C' pieno del liquido in esame; poichè in questo modo si trascurano gli errori derivanti dalla piccola self delle connessioni fra C e C', è più corretto effettuare la taratura con liquidi di costante dielettrica nota, per i quali la zona di frequenza impiegata nelle misure non coincida con zona di dispersione anomala.

Il condensatore tarato C impiegato nelle presenti misure è un condensatore di precisione, ad aria, del tipo M. K. della Ditta O. Selinger di Berlino; tale tipo è stato ideato dal dottor Zickner del Physikalisches Technisch



Reichsanstalt, e consiste in un condensatore a lastre circolari parallele, completamente schermate ed isolate su quarzo; una di esse è spostabile rispetto all'altra per mezzo di un movimento micrometrico di estrema precisione, con una vite del passo di mm. 0,5, e, poichè ogni giro della vite è diviso in 100 parti, si ha, per ogni divisione, lo spostamento di  $5 \mu$  delle armature. Il percorso massimo è di cm. 2 e corrisponde ad una variazione capacitativa di  $70 \mu\mu\text{F}$ , variazione che rimane così divisa in 4000 parti; naturalmente per la sua stessa costruzione, il condensatore non è a variazione lineare ma si dispone della curva di taratura controllata dal Physikalisch Technisch Reichsanstalt; nella zona centrale di questa curva per distanze tra le armature di cm. 0,25 circa, ogni divisione corrisponde in media a circa  $0,01 \mu\mu\text{F}$ .

Per evitare qualunque effetto capacitativo, la variazione della capacità viene effettuata automaticamente, senza intervento dello sperimentatore, imprimendo un lentissimo movimento di rotazione alla vite micrometrica e tracciando la curva di risonanza corrispondente.

Il condensatore  $C'$ , destinato a contenere il liquido in esame, è costituito da un'ampolla a doppia apertura, nella quale si trovano due armature semicircolari di platino a mm. 2 di distanza. Per rendere la capacità variabile, sia pure entro stretti limiti, si è ricorso all'artificio di rendere mobile una delle due armature saldandola ad un tappo di vetro ruotabile dall'esterno, che penetra, a perfetta tenuta, in un largo foro praticato lateralmente all'ampolla. La capacità varia così da circa  $0,8 \mu\mu\text{F}$  a  $0,15 \mu\mu\text{F}$ , di modo che per liquidi di elevata costante dielettrica (per esempio, le soluzioni acquose per cui  $\epsilon \sim 80$ ) si usa la capacità minima, e per liquidi a bassa  $\epsilon$  si usa la capacità massima. Naturalmente la precisione delle misure dipende da questo valore delle capacità di  $C'$ ; essa però si mantiene sempre al di sopra dell'1 %.

L'oscillatore di cui più sopra si è dato lo schema è del tipo in push-pull; esso è stato appositamente costruito dalle Officine Radiotelegrafiche Marconi di Genova ed è dotato di una serie di bobine che gli permettono di oscillare su onde da m. 4,5 a m. 26. Lo sfruttamento di un'armonica permette di fare misure, sia pure con minor precisione, per onde di m. 2,6.

La lunghezza d'onda irraggiata si mantiene stabilissima ed è garantita dell'ordine del mm.; oscillatore e ondometro sono convenientemente schermati nonchè tenuti al riparo dai bruschi sbalzi termici <sup>(1)</sup>.

La scelta degli alcoolli butilico normale ed isoamilico per la determinazione delle bande di assorbimento dipolare, è stata suggerita dal fatto che,

(1) L. CAVALLARO, « Arch. Sc. Biol. », anni 1933-1934-1935: *Costante dielettrica e biologia* (I-VI). Le ricerche esposte in queste note sono state compiute nell'Istituto di Farmacologia della R. Università di Genova; ringrazio l'illustre prof. A. Benedicenti per aver consentito che l'oscillatore, il condensatore tarato e il circuito aperiodico, sopra descritti, di Sua personale proprietà, fossero installati in questo Istituto di Chimica generale.



data la loro formula di struttura, per le molecole di questi due alcoli, possono prevedersi dimensioni diverse ma ugual momento dipolare.

Inoltre per l'alcool isoamilico non si hanno, per quanto risulta, misure di  $\epsilon'$  e di  $\epsilon''$  nel campo di frequenze in questione; Girard e Abadie<sup>(1)</sup> hanno misurato  $\epsilon''$  per onde da m. 0,40 a m. 6; le loro misure, volte principalmente ad un delicato ed interessante studio delle azioni intermolecolari, attraverso alla determinazione dei tempi di rilassazione, hanno dato, anche per l'alcool butilico normale, un valore, per la posizione nello spettro del massimo di assorbimento che è più alto di quello teoricamente ottenibile in base alla teoria di Debye; questo valore è stato invece confermato dai risultati di Malsch<sup>(2)</sup> per l'alcool butilico, mentre le misure con il metodo della determinazione dell'innalzamento termico conseguente all'assorbimento, dovute a Krause<sup>(3)</sup>, danno un valore più elevato, in accordo con i risultati di Haase<sup>(4)</sup> ottenuti per altri alcoli della serie, con lo stesso metodo.

TABELLA I.

*Alcool N-Butilico.*

Misura dell'assorbimento					Misura della dispersione anomala	
T in °C	$\frac{D - D_i}{D}$				$\lambda$	$\epsilon'$
	$\lambda = 5$	$\lambda = 7.5$	$\lambda = 10.5$	$\lambda = 22$	in m.	a 18° c.
60	0.25	0.15	0.10	0.16	2.6	13.9
50	0.37	0.20	0.08	0.12	—	—
40	0.53	0.30	0.13	0.10	5.0	15.0
30	0.70	0.43	0.20	0.08	—	—
20	0.85	0.57	0.30	0.08	7.5	15.9
10	0.95	0.78	0.47	0.10	—	—
0	0.98	0.93	0.65	0.13	10.5	17.0
— 10	0.95	0.97	0.80	0.17	—	—
— 20	0.90	0.92	0.88	0.20	22.0	17.8
— 30	0.80	0.84	0.86	0.27	—	—
— 40	0.66	0.73	0.77	0.40	—	—

(1) GIRARD e ABADIE, « Journ. d. phys. et de rad. », p. 295, 1935 e « Comptes Rendus », anni 1932-33-34.

(2) MALSCH, loc. cit.

(3) K. KRAUSE, « Phys. Zeitschr. », 35, p. 684, 1934.

(4) H. HAASE, loc. cit.

*Alcool isoamilico.*

Segue TABELLA I.

T in °C	Misura dell'assorbimento				Misura della dispersione anomala	
	$\frac{D - D_T}{D}$				$\lambda$	$\epsilon'$
	$\lambda = 5$	$\lambda = 7.5$	$\lambda = 10.5$	$\lambda = 22$	in m.	a 18° C.
60	0.10	0.06	0.01	0.13	2.6	11.7
50	0.20	0.10	0.03	0.06	—	—
40	0.43	0.26	0.10	0.05	5.0	12.1
30	0.63	0.40	0.23	0.05	—	—
20	0.80	0.57	0.37	0.07	7.5	13.0
10	0.93	0.73	0.53	0.13	—	—
0	0.93	0.90	0.66	0.20	10.5	13.9
— 10	0.84	0.90	0.80	0.27	—	—
— 20	0.70	0.80	0.88	0.37	22.0	15.4
— 30	0.56	0.70	0.80	0.50	—	—
— 40	0.36	0.66	0.66	0.63	—	—

Misure di  $\epsilon'$  per l'alcool butilico sono state fatte da Smyth e Stoops <sup>(1)</sup> per frequenze molto basse ( $\lambda = m. 600$ ) e da Szymanowski <sup>(2)</sup> per  $\lambda m. 1,30$ . I risultati delle presenti ricerche sono raccolti nella Tabella I.

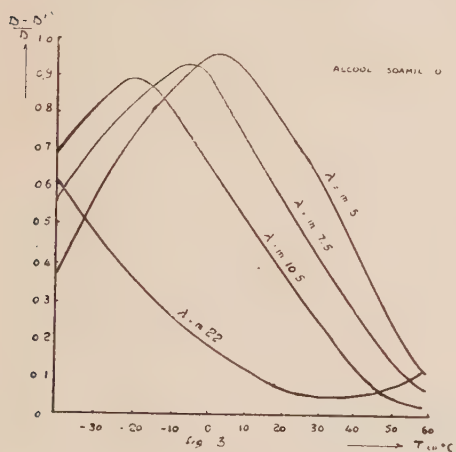


Fig. 3.

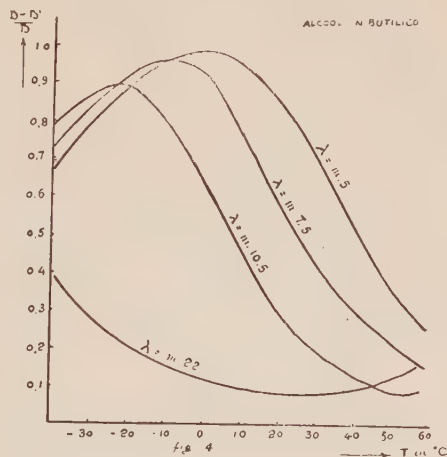


Fig. 4.

(1) SMYTH e STOOPS, « Journ. amer. chem. Soc. », p. 3312 e 3330, 1929.

(2) W. SZYMANOWSKI, « Journ. chem. phys. », I, p. 809, 1933.

I valori contenuti nella Tabella I per l'assorbimento e la dispersione anomala dei due alcoli, opportunamente purificati e disidratati, sono raccolti, per maggiore evidenza, nelle figg. 3, 4, 5, 6.

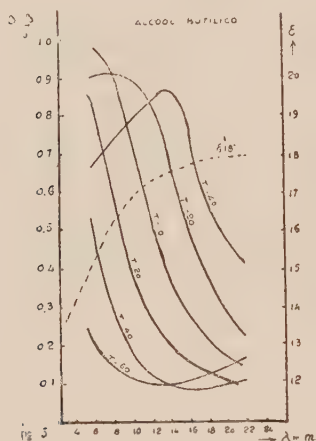


Fig. 5.

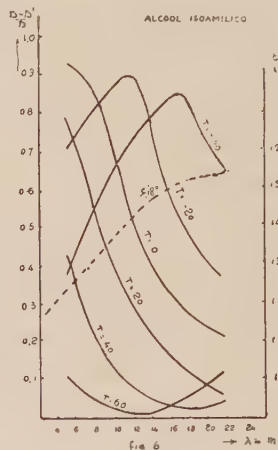


Fig. 6.

Nelle prime due figurano, per ciascuno dei due alcoli le bande di assorbimento in funzione della temperatura, per le quattro:

$$\lambda = 5 ; 7.5 ; 10.5 ; 22 \text{ m.}$$

Esse mostrano un andamento molto regolare, in netto accordo con la teoria del Debye; ciò è tanto più interessante in quanto, proprio per gli alcoli, sostanze fortemente associate, la teoria non può ritenersi rigorosamente valida.

Il massimo assorbimento si sposta verso le basse temperature col diminuire della frequenza; le curve dell'alcool isoamilico sono più simmetriche di quelle dell'alcool butilico normale dalla parte delle basse temperature.

Per temperature molto elevate, si nota, per frequenze minori, la tendenza dell'assorbimento ad aumentare nuovamente; è presumibile che ciò sia dovuto al termine corrispondente all'assorbimento dovuto alla conduttività, che, come si è visto, non è discriminabile da quello dovuto ai dipoli molecolari.

Questo assorbimento per conduttività diventa, in accordo con la teoria sempre più intenso con il diminuire della frequenza e, naturalmente, col crescere della temperatura, a parità di frequenza.

Nelle figg. 5 e 6 sono invece riportati insieme con i valori di  $\epsilon'$  in funzione della lunghezza d'onda, quelli di  $\epsilon''$  per sei diverse temperature fra  $-40$  e  $+60^\circ\text{C}$ .

Nell'andamento di  $\left(\frac{d\epsilon''}{dv}\right)_T$  si ritrova così la regolarità dell'andamento della  $\left(\frac{d\epsilon''}{dT}\right)_v$ .

Si constata che, per tutti e due gli alcoli alla temperatura ambiente, il massimo assorbimento è molto al disotto di  $\lambda = 5 \text{ m.}$ , anche se, col diminuire della temperatura si sposta verso onde assai più lunghe.

L'effetto dell'abbassamento termico è naturalmente esaltato dal contemporaneo aumento della viscosità.

Il confronto della curva ottenuta per  $-20^\circ\text{C}$  dall'alcool butilico, con quella per l'alcool isoamilico, mostra che, come era da prevedersi, in base alla teoria, quest'ultima è alquanto spostata, verso le basse frequenze, in corrispondenza delle maggiori dimensioni molecolari di quest'ultimo alcool.

L'andamento delle curve di dispersione anomala  $\frac{d\epsilon'}{dv}$  si mostra in accordo con quelle di assorbimento; infatti la diminuzione di  $\epsilon$  da  $\epsilon_r$  ad  $\epsilon_o$  compare contemporaneamente all'aumento dell'assorbimento stesso.

La relazione fra  $\epsilon'$  ed  $\epsilon''$  si mostra perciò conforme a quella prevista della teoria.

I risultati delle misure sono in buon accordo con quelli ottenuti dal Mizushima <sup>(1)</sup> per gli alcoli metilico, etilico, isopropilico, isobutilico ed amilico normale.

Rinviamo ad una prossima Nota un più minuto esame delle possibilità e del significato chimico delle misure di assorbimento dipolare, attraverso un esame sistematico dei non molti dati sperimentali finora ottenuti.

(1) S. J. MIZUSHIMA, loc. cit.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Sui coefficienti di associazione e loro variazione in funzione della temperatura* <sup>(1)</sup>. Nota di P. GUARESCHI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Per quanto verrò esponendo considererò soltanto i liquidi.

Nelle mie Note sulla viscosità dei gas e dei liquidi e sul calcolo dei calori latenti di ebollizione dei liquidi <sup>(3)</sup> ho dimostrato come sia la viscosità che i calori latenti di ebollizione dei liquidi dipendano in parte dal valore del coefficiente di associazione. Specialmente nei gas la viscosità varia con il coefficiente di associazione che è una funzione della temperatura. Nella mia Nota sul calcolo approssimato dei calori specifici <sup>(4)</sup> ho scritto la relazione

$$(1) \quad c = K/xM$$

dove K indica la costante di Trouton. La (1) esprime che calore specifico molecolare della molecola associata tende a divenire costante per tutti i liquidi.

Consideriamo la nota formula di Eötvös per le tensioni superficiali e che potremo scrivere sotto la forma

$$(2) \quad \frac{d(\gamma s)}{dT} = k$$

dove  $\gamma$  rappresenta la tensione superficiale del liquido,  $s$  la superficie molecolare e  $T$  la temperatura assoluta. Questa formula non rappresenta nella termodinamica delle superfici che la legge di Boyle e Mariotte della termodinamica dei volumi e si potrà scrivere corrispondentemente  $\gamma s = RT$  legge che si è dimostrata esatta nello studio delle variazioni di  $\gamma$  e di  $s$  con la temperatura per le superfici liquide ideali.

La formula di Eötvös è scritta comunemente nei trattati sotto la forma

$$\gamma (Mv)^{2/3} = kt$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(3) P. GUARESCHI, *Sulla viscosità dei gas. Sulla viscosità dei liquidi. Sul calcolo dei calori latenti di ebollizione dei liquidi*. « Atti della R. Accademia dei Lincei », aprile-maggio 1936.

(4) P. GUARESCHI, *Su di un calcolo approssimato dei calori specifici*. « Atti R. Accademia dei Lincei », 1937.



dove  $M$  è il peso molecolare,  $v$  è il volume specifico e  $k$  è una costante caratteristica di ogni liquido. Dalle determinazioni di tensione superficiale si è riscontrato che per i liquidi non associati (benzene, tetracloruro di carbonio ecc.) il valore della costante  $k$  coincide col valore 2.121 che è molto prossimo al valore teorico di  $R = 1.99$  calorie/grado cioè circa 2 calorie/grado valore che io assumerò nella formula di Ramsay e Shields per il calcolo dei coefficienti di associazione ossia adotterò in luogo della formula comunemente usata  $x^{2/3} = \frac{2.121}{k}$  dove  $x$  è il coefficiente di associazione la se-

guente  $x^{2/3} = \frac{R}{k} = \frac{2}{k}$  ove  $k$  rappresenta il valore della costante determinata sperimentalmente sul liquido associato o no che si considera, valore che gli è caratteristico.

Poichè abbiamo detto con  $x$  il coefficiente di associazione per i liquidi non associati cioè, per  $x = 1$ , risulta  $k$  uguale a 2 circa.

Riprendiamo la (2) e per  $\gamma$  costante sarà  $\gamma ds = R dT$  e poichè  $R = x^{2/3} k$  sostituendo si avrà  $\gamma \frac{ds}{dT} = x^{2/3} k$ .

Nella mia Nota <sup>(1)</sup> sulla variazione delle tensioni superficiali in funzione della temperatura ho dimostrato come la variazione della tensione superficiale di un liquido con la temperatura si possa esprimere con la seguente espressione  $\gamma = \gamma_0 e^{-\beta T}$  dove  $\gamma_0$  è la tensione superficiale a temperatura iniziale e dove  $\beta$  è il coefficiente di dilatazione superficiale.

Sarà allora

$$(3) \quad \frac{\gamma_0 e^{-\beta T}}{k} \frac{ds}{dT} = x^{2/3}.$$

Dicendo con  $x_0$  il coefficiente di associazione corrispondente a  $\gamma_0$  si potrà scrivere

$$(4) \quad \frac{\gamma_0}{k} \frac{ds}{dT} = x_0^{2/3} \quad \text{ossia} \quad (5) \quad x = x_0 e^{-3/2 \beta T} = x_0 e^{-\delta T}$$

dove  $\delta$  è il coefficiente di dilatazione cubica  $= 3/2 \beta$ .

Vediamo alcuni valori per qualche liquido.

(1) P. GUARESCHI, *Sulla variazione della tensione superficiale dei liquidi in funzione della temperatura*. « Atti della Soc. Scienze e lettere », Genova, 1936.

Temperatura C°	$x$ (sperimentale)	$x$ (calcolato con la 5)
Acqua:		
0°	2	2
20°	1.64	1.71
60°	1.52	1.63
100°	1.4	1.36
Alcool etilico:		
90°	2.03	2.03
16° 46	1.5	1.41
46° 78	1.4	
78° 132	1.3	1.29
Benzolo:		
10°	0.961	0.961
80°	0.951	0.682
Alcool metilico:		
90°	2.65	2.65
20°	2.3	2.32

La legge di variazione del coefficiente di associazione in funzione di  $T$  data dalla (5) si verifica abbastanza bene.

**Biologia** (Biologia vegetale). — *Ricerche sulle amilasi*<sup>(1)</sup>. Nota preventiva di M. BOLLI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. E. CARANO.

Gli studiosi che si sono interessati dei rapporti di parentela dei vegetali, ricercandone i caratteri nella costituzione intima dei protoplasti, hanno constatato che questi non sono tutti uguali, ma ne esistono molti, le cui differenze però, non sono evidenti nè dal punto di vista morfologico, nè da quello fisico-chimico, ma si rivelano soltanto dai prodotti che elaborano (L. F. Henneguy).

Il medesimo autore dimostra a quale punto i protoplasti si differenziano in base ai prodotti elaborati, e precisamente per quanto riguarda l'amido, che si presenta sotto aspetti e forme differenti a seconda delle diverse specie vegetali da cui deriva.

È noto che l'amido scaldato con acqua si gonfia, ma la temperatura alla quale s'inizia il fenomeno è variabile e cioè:

Amido di grano si gonfia a 70°C

» » mais » 75° »

» » riso » 80° ».

Con lo jodo la colorazione non è identica per tutti gli amidi, ma presenta delle differenze abbastanza sensibili; altrettanto sensibile è la differenza di comportamento dei diversi amidi all'azione delle amilasi.

È precisamente per lo studio di quest'ultimo argomento che ho eseguito le indagini e gli esperimenti che formano l'oggetto di questa breve nota.

Una serie di prove eseguite su amidi diversi, con amilasi in soluzione acquosa estratte dalle granella e dai semi in germinazione, hanno sufficientemente dimostrato che tali soluzioni non hanno la stessa azione su tutti gli amidi, presi allo stato naturale, ma presentano una marcata specificità sull'amido della stessa pianta e su quelli di piante affini. Infatti ho constatato che l'estratto acquoso di semi in germinazione, mentre saccarifica totalmente l'amido di un vegetale, attacca meno sensibilmente o lascia inalterato l'amido di altri vegetali.

La conservabilità dei liquidi saccarificanti l'ho ottenuta aggiungendo ad essi un cristallino di timolo che, senza menomare l'attività dell'enzima, impe-

(1) Lavoro eseguito nel R. Istituto Botanico di Perugia.

(2) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

disce ogni fermentazione. La prova che la presenza del timolo è innocua per l'attività enzimatica s'è ottenuta facendo germinare cariossidi di orzo inumidite con acqua in cui avevo aggiunto del timolo; la germinazione regolare e completa delle cariossidi mi ha assicurato circa l'uso di questo prodotto come antif fermentativo delle soluzioni enzimatiche, che allo stato naturale sono facilmente fermentescibili ed alterabili per il loro contenuto zuccherino ed albuminoidico.

Un primo esperimento è stato eseguito ponendo, in diverse capsule, mezzo grammo di vari tipi di amido a contatto con dieci cc. di estratto acquoso di chicchi d'orzo in germinazione e tenendole in termostato alla temperatura di 20° per 27 giorni. Facendo delle osservazioni ogni tre giorni s'è constatato quanto segue:

1) *Amido di orzo* — completa saccarificazione dopo sei giorni di permanenza nel liquido saccarificante;

2) *Amido di frumento* — si è ottenuta la saccarificazione completa in dieci giorni;

3) *Amido di avena* — dopo ventisette giorni di permanenza nel liquido saccarificante è rimasto insoluto circa il 30 % di amido.

4) L'amido di *Aegilops*, di riso, di granoturco, è rimasto, nello stesso periodo di tempo, pressochè inalterato, mentre del tutto inalterato è rimasto l'amido di patata, di castagna, di quercia, di fava, di pisello, di lenticchia.

Lo stesso esperimento, eseguito con l'estratto acquoso di granella di frumento in germinazione, ha dato un interessante risultato e cioè s'è dimostrato più attivo verso tutti gli amidi delle Graminacee, completamente inattivo verso gli altri amidi.

L'amido di orzo è stato idrolizzato in tempo più breve dell'amido di frumento, mentre l'amido di *Aegilops* e di riso hanno subito un sensibile processo di saccarificazione, che è stato minore nell'amido di granoturco.

L'estratto acquoso di cariossidi di *Aegilops obovata* in germinazione s'è dimostrato attivo in ordine decrescente sui seguenti amidi: orzo, frumento, *Aegilops*, avena, riso, inattivo sugli altri. Altrettanto è avvenuto per l'estratto acquoso dei chicchi di avena che ha agito con intensità decrescente sugli amidi di orzo, frumento, *Aegilops*, avena, riso, non ha agito su quelli di patata, pisello, fava, quercia, castagna.

L'estratto acquoso dei semi di fava, ottenuto filtrando per carta delle fave germinate e spappolate in acqua, posto nelle stesse condizioni di temperatura si è dimostrato particolarmente attivo coll'amido della stessa specie e di veccia, in quanto mezzo grammo di tale amido si è quasi completamente saccarificato nei 27 giorni di prova, mentre l'amido di pisello, di lenticchia, di fagiolo ha subito un attacco molto limitato; inalterati invece sono rimasti gli amidi di altri vegetali.

I risultati di questo esperimento sono tali che mi conducono ad ammettere due fatti:

Il primo è che l'estratto acquoso enzimatico di semi in germinazione di un vegetale ha un'azione più o meno specifica sull'amido dei generi affini poichè, in un tempo più o meno breve riesce a saccarificarlo, mentre non agisce sugli amidi appartenenti a gruppi diversi.

Il secondo è che, fra gli estratti acquosi di semi in germinazione appartenenti a vegetali in stretti rapporti di parentela, ve ne sono alcuni più energici, che saccarificano tutti gli amidi del gruppo, mentre ve ne sono altri che hanno un'azione limitata ad uno o pochi amidi appartenenti al gruppo stesso.

Ho cercato di stabilire le cause del diverso comportamento delle soluzioni enzimatiche che si riferiscono al secondo caso ed ho osservato che la temperatura agisce su tutti nello stesso modo e cioè sino a 60° i processi di saccarificazione vengono esaltati in tutti gli amidi e per tutte le soluzioni nella stessa proporzione, mentre l'elemento che, a parere mio, ha un'influenza capitale su tali fenomeni è l'acidità.

Tutti gli estratti acquosi adoperati sono risultati più o meno acidi e quelli più attivi, cioè capaci di saccarificare un maggior numero di amidi, sono precisamente i più acidi.

Infatti, l'estratto acquoso di granella di *Aegilops* fra i succhi di Graminacee è il più acido ed è anche il più attivo, in quanto ha attaccato tutti gli amidi di Graminacee usate negli esperimenti.

Per eliminare il dubbio che tali differenze siano dovute a fenomeni secondari sfuggiti alla mia osservazione, ho eseguito un'altra prova approfittando dell'esperienza che fece A. Maige, onde stabilire in quale parte della cariosside d'orzo fosse localizzata l'amilasi.

Ho eseguito, in capsule distinte, una sospensione omogenea di amido di orzo e di amido di *Aegilops* in gelatina sterile: sopra lo strato gelatinoso sono stati posti a perfetto contatto, gli scudetti degli embrioni di cariossidi d'orzo, di avena, di grano, di *Aegilops* ed ho notato che tutti gli embrioni si sono sviluppati all'incirca nella stessa misura, raggiungendo una notevole lunghezza (alcuni circa due centimetri).

Staccati gli embrioni dallo strato gelatinoso ho constatato che l'amido, in corrispondenza a ciascun embrione si è idrolizzato, mentre l'amido che non trovavasi a diretto contatto con gli scudetti degli embrioni si è profondamente modificato, perchè i granelli d'amido osservati al microscopio sono apparsi grinzosi ed inflacciditi.

La spiegazione del fatto va ricercata nella acidità della gelatina, infatti, ripetuto l'esperimento con gelatina resa perfettamente neutra con carbonato di sodio, ho constatato che gli embrioni messi a contatto, non solo non si sono sviluppati, ma non si è avuto nessun processo di digestione dell'amido.

Da questo risultato si arguisce che la digestione di amido nel primo caso è stata favorita dall'acidità naturale della gelatina, mentre nel secondo



caso l'amilasi contenuta nelle cellule epiteliali degli scudetti non è stata capace di operare da sola la saccarificazione dell'amido.

Per avvicinarmi il più possibile alle condizioni naturali di utilizzazione delle sostanze di riserva degli embrioni di alcune cariossidi di Graminacee, ho posto degli embrioni di orzo sopra uno strato di amido appartenente alla stessa pianta, disteso in un foglio di carta bibula tenuta umida con acqua distillata: gli embrioni non si sono sviluppati e tutto l'amido è rimasto inalterato.

Ho ripetuto l'esperimento acidulando l'acqua distillata con acido ossalico nella proporzione del 0,20 % che, per essere un acido molto diffuso nel mondo vegetale, mi è sembrato il più adatto a provocare il fenomeno ed infatti si è avuto un manifesto processo di digestione dell'amido in corrispondenza degli scudetti degli embrioni.

Ho eseguito un altro esperimento con la diastasi di orzo estratta mediante alcool assoluto dal succo idro-alcoolico delle cariossidi in germinazioni. La sostanza isolata, che si presenta sotto forma di una polvere bianca o gialliccia a seconda del numero dei trattamenti fatti con alcool assoluto, viene indicata col nome di diastasi che, solubilizzata in acqua, si è mostrata attiva con l'amido crudo di orzo, ma ho pure constatato che la soluzione in parola presenta un minimo di acidità.

Se i trattamenti con alcool assoluto, vengono aumentati oltre una certa misura, il potere idrolizzante di tale sostanza diminuisce, sino quasi a diventare inattiva ed in tale condizione vi si nota una mancanza assoluta di acidità.

La composizione delle diastasi secondo Kranch, è la seguente:

C . . . . .	45.68
H . . . . .	6.69
N . . . . .	4.57
S . . . . .	1.12
Ceneri . . . . .	6.08

ed è noto che se agisce in opportune condizioni idrolizza e liquefa conseguentemente l'amido operandone lo sdoppiamento in destrina e maltosio secondo la formula seguente:



Ma tra il principio e la fine della reazione, secondo molti autori, esistono un grande numero di fasi intermedie.

Secondo W. H. Brown e Hèron la temperatura di distruzione di questo fermento in soluzione sarebbe 76°. Secondo Kildahl, perchè la diastasi possa

agire sull'amido crudo, bisogna scegliere un mezzo lievemente acido e ciò concorda con i risultati degli esperimenti eseguiti.

Per altri autori anche una lieve quantità di sostanza basica (5 cg. % di carb. di sodio) rallenta od impedisce completamente la saccarificazione; ma se la base viene saturata, l'attività della diastasi tosto ricompare ma è indispensabile che l'acidità del mezzo non oltrepassi i due cg. per mille in ac. cloridrico.

La natura chimica intima delle diastasi non è ancora ben definita, secondo alcuni autori; nel corso delle manipolazioni, che mirano alla loro purificazione e alla loro analisi si è riusciti ad isolare dalla parte principale costituita da sostanze proteiche, delle sostanze minerali alle quali G. Bertrand ha attribuito un valore essenziale nei fenomeni diastatici.

La molecola di alcuni prodotti enzimatici di origine animale, sempre secondo Bertrand, è costituita da un substrato organico a cui si potrà dare il nome di fermento, la sua natura colloidale lo renderebbe particolarmente adatto a fornire la superficie ad una sostanza minerale attiva, il cofermento, che installato sulla superficie delle micelle colloidali, verrebbe ad aumentare la sua potenza catalizzatrice naturale per effetto della sua grande dispersione.

In fatti le diastasi vegetali, secondo gli ultimi studi, non sembrano aver bisogno di sali minerali e cioè del cofermento, però gli esperimenti illustrati in questa breve Nota mi hanno fornito degli elementi tali da farmi supporre, con una certa attendibilità, che le amilasi vegetali siano delle sostanze tali, di natura colloidale e quindi con una funzione catalizzatrice, che permettano agli acidi vegetali diffusi più o meno abbondantemente nelle parti vegetali, di solubilizzare l'amido alla temperatura ambiente.

Se agli acidi vegetali fosse riservata, come suppongo e come cercherò di provare con altri esperimenti in corso, la funzione di agire di concerto con le amilasi sulle sostanze di riserva, provocandone tutti quei fenomeni che permettono l'utilizzazione delle medesime nei processi germinativi ed il trasporto attraverso il corpo vegetale nei punti di maggior consumo, allora tali acidi, assumerebbero una parte importantissima nei fenomeni del metabolismo vegetale e la loro presenza più o meno abbondante in tutti i vegetali, avrebbe una giustificazione ben più importante, che non quella per ora concessagli di prodotti di rifiuto di ricambio vegetale.

A conclusione di quanto ho detto, affermo che, i risultati degli esperimenti eseguiti mi permettono, per il momento, di supporre che le azioni diastatiche subiscono l'influenza del mezzo, e la specificità, che per il momento, con gli elementi che sono in mio possesso non posso affermare se sia assoluta per ogni vegetale o gruppo di vegetali, m'appare in perfetta relazione con l'acidità del mezzo ove si determinano i fenomeni diastatici.

Se gli studi e gli esperimenti che seguirò su questo argomento, mi conducessero ad ammettere con assoluta certezza una netta azione specifica

degli estratti acquosi vegetali sugli amidi, sia di riserva, che autoctoni, delle piante o gruppi di piante affini, penso che tale mezzo potrà essere utilizzato per convalidare maggiormente i rapporti di parentela, che si sono già stabiliti fra i vegetali, attraverso le indagini morfologiche e, più recentemente, attraverso le indagini sierodiagnostiche.

Devo esprimere la mia viva riconoscenza al chiar.mo prof. Fabrizio Cortesi, direttore del R. Istituto e Orto Botanico di Perugia, per i consigli, i suggerimenti e il benevolo appoggio che mi ha dimostrato nel corso di queste ricerche.

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio SEVERI presenta il volume di « Scritti matematici » del Socio BERZOLARI, pubblicato in suo onore, nel cinquantennio del suo insegnamento con le seguenti parole:

« A nome del Comitato per le onoranze al prof. Luigi Berzolari, in occasione del cinquantennio d'insegnamento e del collocamento a riposo, presento il volume di " Scritti matematici " a Lui offerto.

« Scorrendo l'elenco dei sottoscrittori e degli autori delle Memorie pubblicate nel volume, si constata quale largo consenso di affetto e di stima abbia determinato l'iniziativa del Comitato. Sono cinquanta Memorie e fra gli autori figurano quasi tutti i maggiori matematici italiani e numerosi e valenti allievi del Berzolari, anziani e giovani.

« Il volume, veramente notevole, costituisce un altro servizio, benché indiretto, reso dal Berzolari alla nostra Scienza. Non occorre ch'io rievochi, perchè è conosciuta da tutti i componenti, la complessa opera di Luigi Berzolari. La geometria proiettiva spaziale e iperspaziale, la teoria delle forme algebriche, la geometria algebrica, si sono, grazie a quell'opera, arricchite di parecchi pregevoli risultati. Della geometria proiettivo-differenziale il Berzolari è stato uno dei primi cultori con una non dimenticata Memoria.

« Ma il debito della Matematica italiana verso di Lui si è notevolmente accresciuto nella più recente fase della sua attività scientifica per gli articoli vasti, ricchi, esaurienti, dottissimi e dominati da quel senso di misure e di equilibrio costituente una delle peculiari doti del Berzolari, ch'egli ha pubblicato nella Enciclopedia matematica tedesca e che hanno contribuito a rafforzare il grande prestigio di cui gode nel mondo matematico la nostra scuola geometrica.

« Ricordo Luigi Berzolari mio insegnante nei lontani anni de' miei studi a Torino. Fin da allora apprezzai il maestro efficace ed esemplare, al quale tanto debbono molte generazioni di allievi.

« Dopo appresi a volergli bene come amico, attratto dalle Sue belle doti morali.

« Sicuro interprete del vostro sentimento, rivolgo a Luigi Berzolari il fervido augurio che la Scienze italiana possa ancora per lunghi anni avvantaggiarsi dell'opera sua ».

Il Presidente sen. MILLOSEVICH ringrazia.



Il Corrispondente BOMPIANI presenta il volume delle « Memorie scelte » del Socio CASTELNUOVO con le seguenti parole:

« Nel 1935, ricorrendo il giubileo scientifico del prof. Guido Castelnuovo, si costituì un Comitato, presieduto da S. E. Alberto De Stefani, per rendere onoranze al Maestro che stava per lasciare la cattedra.

« Come Segretario di quel Comitato ho l'onore di presentare all'Accademia il volume di « Memorie scelte » fra la produzione scientifica del prof. Castelnuovo.

« In questo volume sono state raccolte le « Memorie » riguardanti la geometria algebrica (ed una che interessa il Calcolo delle Probabilità): rimangono esclusi da esso sia i primi lavori del Castelnuovo attinenti alla Geometria Proiettiva, sia i lavori pure di Geometria Algebrica redatti in collaborazione con F. Enriques, sia vari articoli che trattano questioni di filosofia naturale e particolarmente connessi con la teoria della relatività, cui il Castelnuovo ha dedicato un volume a parte; sia infine i classici trattati di Geometria Analitica e di Calcolo delle Probabilità.

« La scelta è stata fatta dal Maestro stesso ed ha determinato la fisionomia del volume.

« Come noi, suoi antichi allievi, ci siamo sentiti commossi nel riudire una sua lezione il 28 maggio 1935, in occasione della consegna della medaglia d'oro riprodotta nel volume, così lo siamo ora nel vedere raccolte in esso le Memorie che tanta gloria hanno recata all'Italia in questo campo. Si assiste, percorrendolo, ad uno dei momenti più belli, più ricchi della Geometria: superate con vedute nuove le precedenti e più particolari ricerche sulle curve algebriche, il Castelnuovo inizia e prosegue, con una ricchezza di fantasia e con una sicurezza d'intuito che lasciano attoniti ancor oggi, la creazione della teoria delle superficie algebriche, cui dava pure in quel primo periodo contributi essenziali F. Enriques.

« Il Comitato sa di avere, con la pubblicazione di questo volume, reso un servizio all'Italia e alla Scienza: ed è lieto di potere, in questa illustre sede, ringraziare il prof. Castelnuovo di quanto Egli ha ancora fatto per i giovani, anche per quelli che non avranno il privilegio del Suo insegnamento diretto. In fine ad ogni gruppo di lavori Egli ha riassunto il movimento di ricerca cui esso ha dato luogo ed ha indicato i problemi ancora aperti e nei quali quei metodi sembrano ancora poter dare frutto. Grazie Maestro ».

Il Presidente ringrazia.

Il Socio CASTELNUOVO ringrazia vivamente il collega BOMPIANI delle troppo lusinghiere parole, ed il Presidente della gentile accoglienza fatta al volume. Egli stesso ha desiderato che il volume venisse offerto a questa illustre Accademia, la quale aveva accolto nei suoi « Rendiconti » una buona parte dei lavori oggi riuniti. Il Socio CASTELNUOVO aggiunge che a questa riproduzione delle sue Memorie egli ha consentito quando si è convinto che corredando quelle Memorie di brevi note, egli poteva rendere ancora un



modesto servizio alla scienza, sia stabilendo i collegamenti fra i suoi lavori e quelli che li precedettero o li seguivano, sia suggerendo nuovi temi di ricerche, che egli si augura possano attrarre l'attenzione di qualche studioso.

### PRESENTAZIONE DI LIBRI

L'Accademico Segretario aggiunto AMALDI presenta i libri inviati in omaggio all'Accademia segnalando il 2° volume delle « Opere complete di G. Humbert » e un gruppo di fogli della carta fotografica del cielo della Specola Vaticana.

### PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano Note per l'inserzione negli Atti i Soci: BOMPIANI, CASTELNUOVO, LEVI-CIVITA.

### COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente sen. MILLOSEVICH presenta alla Classe il volume « Dal Regno all'Impero » edito dall'Accademia per celebrare il primo Annuale della Fondazione dell'Impero ed annuncia che esso sarà distribuito a tutti i Soci non appena sarà stato presentato a S. M. il Re Imperatore e a S. E. il Capo del Governo.

# OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

*presentate nella seduta dell'8 maggio 1937*

- ALFIERI SECONDO. — Un quinquennio di osservazioni idrologiche sui torrenti Lys e Rutor. (Estr. dal « Bollettino del Comitato Glaciologico Italiano ». N. 16, 1936). Roma, 1936. 8°, pp. 1-11.
- BERZOLARI LUIGI. — Scritti matematici offerti a L. Berzolari. Pavia, 1936. 4°, pp. 1-XXIX, 1-686.
- CASTELNUOVO GUIDO. — Memorie scelte. Bologna, Editore Nicola Zanichelli, 1937. 8°, pp. 1-X, 1-588.
- DE BEAUX G. — Mammiferi. Spedizione zoologica del Marchese Saverio Patrizi nel Basso Giuba e nell'Oltregiuba, giugno-agosto 1934. (Estr. dagli « Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova ». Volume LVIII, pp. 150-173, tav. I-XII). Genova, 1937. 8°.
- Ente Nazionale Serico. Annuario serico 1935. Milano, 1937. 5°, pagine 1-139.
- HUMBERT G. — Œuvres publiées par les soins de Pierre Humbert et de Gaston Julia. Tome II. Paris, Editeur Gauthier-Villars. 1936. 8°, pp. 1-574.
- LONGO LUIGI. — Contributo alla storia del R. Orto Botanico di Napoli. (Estr. dal « Bull. dell'Orto Botanico della R. Università di Napoli ». Tomo XIII). Napoli, 1937. 8°, pp. 1-8.
- ΟΕΡΙΚ ΕΡΝΣΤ. — Meteor heights from the Arizona Expedition. (Reprinted from the « Proceedings of the National Academy of Sciences ». Vol. XXII, pp. 525-530). s. l. 1936. 8°.
- RUSSO ACHILLE. — Appunti echinologici eritrei. (Estr. dal « Bollettino delle sedute dell'Accademia Gioenia di Scienze Naturali in Catania ». Serie III, fasc. V). Catania, 1937. 8°, pp. 1-11.
- Specola Astronomica Vaticana. — Carta fotografica del cielo, tavole N. 50. Roma, Castel Gandolfo, 1937. 4°.
- Specola Astronomica Vaticana. — Inaugurandosi in Castel Gandolfo la Specola Astronomica Vaticana. XXIX settembre 1935. Città del Vaticano, 1935. 8°, pp. 1-14.
- STERNE T. E. — The mathematical and physical meaning of probability. (Reprinted from « Science Progress ». N. 122, 1936. pp. 250-257). London, 1936. 8°.
- TOMITA TÔKU. — Geology of Dâgo, Oki Islands, in the Japan Sea. (Separate print of the « Journal of the Shanghai Science Institute ». Section II, Volume II, pp. 37-146, Pl. I-XVIII). Shanghai, 1936. 8°.
- WITTNICH CARRISSO L. — Conspectus Florae Angolensis elaborado pelo Instituto Botanico de Coimbra. Vol. I. Coimbra, 1937. 8°, pp. 1-176.

N. P.

SORE

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

---

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

---

*Seduta del 4 giugno 1937 - Anno XV*

*Presidenza del prof. F. MILLOSEVICH*

---

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica** (Geometria algebrica). — *I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali.* Nota I <sup>(1)</sup> del Socio F. SEVERI.

In un corso (che verrà pubblicato) sulla serie e sui sistemi d'equivalenza, tenuto quest'anno all'Università di Roma, ho esposto dettagliatamente la laboriosa dimostrazione delle seguenti proposizioni fondamentali <sup>(2)</sup>:

I. *Un sistema unirazionale (in particolare razionale) di varietà, effettive o virtuali,  $V_k$ , sopra una varietà, irriducibile o riducibile,  $M_r$ , è un sistema d'equivalenza (di specie  $k$ ).*

II. *Condizione necessaria e sufficiente perchè un sistema algebrico di varietà, effettive o virtuali,  $V_k$ , sopra  $M_r$ , sia un sistema d'equivalenza, è che sia razionale o contenuto totalmente in un sistema razionale di varietà  $V_k$  (la cui varietà generica è in generale virtuale, anche se le varietà di partenza sono effettive).*

Le  $V_k$ ,  $M_r$  sono naturalmente varietà pure, cioè irriducibili o costituite da parti di ugual dimensione ( $k$  o  $r$ ). Il teorema II è un corollario del I e la condizione in esso contemplata, essendo soddisfatta se il dato sistema è unirazionale, ne deriva che ogni sistema unirazionale è contenuto totalmente in un sistema razionale.

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Nei miei precedenti lavori sulla teoria tali proposizioni furon dimostrate per le serie d'equivalenza sulle superficie e, in casi particolari, anche per sistemi di specie  $k$  sopra una  $M_r$ . Le dimostrazioni di questi casi lasciavan già presagire i teoremi generali.

La definizione generale e definitiva di *sistema d'equivalenza di specie  $k$*  sopra una  $M_r$ , trovasi nella mia più recente Memoria sulla teoria <sup>(1)</sup>: un tal sistema è una somma algebrica di sistemi elementari; e si può addirittura supporre che ognun di questi sia un sistema d'intersezione completa, appartenente ad una componente irriducibile di  $M_r$  o ad una varietà subordinata; cioè che ogni addendo sia intersezione completa di  $r - k$  sistemi lineari, eventualmente  $\infty^0$ , di varietà ad  $r - 1$  dimensioni, tracciati su quella componente. Dalla definizione scende senz'altro che un sistema d'equivalenza completo, di  $V_k$  virtuali, è sempre un sistema razionale, perchè lo è ogni sistema d'intersezione completa; ma la reciproca è ben più riposta ed importante.

Ci occorrerà pure di ricordare che ogni sistema d'equivalenza di varietà, effettive o virtuali,  $V_k$ , dato sulla  $M_r$  di  $S_d$ , è proiettivamente costruibile intersecando  $M_r$  con una varietà, effettiva o virtuale,  $W_{d+k-r}$ , variabile con continuità in  $S_d$ , fuori di eventuali varietà *fisse* o *semifisse*. Viceversa: ogni luogo d'intersezioni siffatte è un sistema d'equivalenza. Una varietà di  $M_r$  l'ho chiamata *semifissa* quando descrive un sistema di equivalenza  $\rho$ -dimensionale, sopra una varietà a  $\rho < r$  dimensioni subordinata a  $M_r$ .

Il punto di partenza della dimostrazione dei teoremi I, II, che qui riassumo, è la *rappresentazione monoidale graduale* di una varietà pura, effettiva o virtuale, entro uno spazio lineare, quale trovasi nella mia Memoria citata; e uno studio preliminare di talune proprietà elementari, ma generali, delle corrispondenze tra varietà algebriche, che espongo in succinto nelle linee seguenti.

1. Considerata una corrispondenza fra due varietà algebriche come varietà contenuta nel loro prodotto, essa esprime con una somma di corrispondenze irriducibili tra varietà irriducibili. Una corrispondenza tra due varietà irriducibili  $M_r, N_s$  è *degenere*, sopra  $M_r$  o sopra  $N_s$ , quando essa non agisce rispettivamente su tutti i punti di  $M_r$  o di  $N_s$ . La *dimensione*  $\rho$  d'una corrispondenza fra  $M_r, N_s$  è  $\leq r + s$  (= se comprende tutte le coppie del prodotto  $M_r \times N_s$ ). Essa è certamente degenere su  $M_r$  (o su  $N_s$ ) se  $\rho < r$  (o  $\rho < s$ ); ma può essere degenere anche se  $\rho \geq r$  (o  $\rho \geq s$ ).

Nell'applicazione che (in lavori precedenti) ho fatto delle serie e dei sistemi d'equivalenza alle corrispondenze tra varietà algebriche, le corrispondenze degeneri adempiono ad un ufficio essenziale, come elementi costitutivi delle corrispondenze a valenza.

Sia  $T$  una corrispondenza non degenere, irriducibile,  $\infty^0$ , fra  $M_r, N_s$  <sup>(2)</sup>. Si trova allora agevolmente la relazione (equivalente, com'è noto, alla precisazione del cosiddetto *computo delle costanti*):

$$\rho = r + l = s + k,$$

(1) *Contributi alla teoria delle serie e dei sistemi di equivalenza sulle varietà algebriche*. «Memorie della Reale Acc. d'Italia», vol. VIII, 1937, p. 387.

(2)  $T$  denota la corrispondenza come varietà di coppie o (a seconda dei casi) l'operazione da  $M_r$  a  $N_s$ , la cui operazione inversa vien denotata da  $T^{-1}$ .

ove  $l, k$  denotano rispettivamente le dimensioni delle varietà  $V_l, V_k$ , luoghi dei punti  $x', x$  associati a un dato  $x$  di  $M_r$  o a un dato  $x'$  di  $N_s$ . Le  $V_k, V_l$ , funzioni razionali rispettive di  $x', x$ , risultano a parti permutabili fra loro per le circolazioni di  $x', x$ .

La corrispondenza  $T$  può esser *semplice* o *composta* su  $M_r$  (e similmente su  $N_s$ ). La  $T$  è composta su  $M_r$  quando ivi esiste più di un punto  $x$  (generico) che fornisce la medesima  $V_l$ . In tal caso le  $V_k$  pel generico  $x$  hanno in comune tutti gli  $x$  cui corrisponde la medesima  $V_l$ . Questi  $x$  coniugati, riempiono in  $M_r$  una varietà algebrica pura  $Z_{r'}$ , di dimensione  $r' \geq 0$  (se  $r' = 0$ ,  $T$  è composta su  $M_r$  con un'involuzione). Le  $Z_{r'}$  formano un sistema algebrico irriducibile  $\infty^{r'-r'}$ , d'indice 1, ossia pel generico  $x$  passa una sola  $Z_{r'}$ .

Ad una  $T, \infty^e$ , composta su  $M_r$  con varietà  $Z_{r'}$ , può sostituirsi una corrispondenza algebrica  $\bar{T}$ , semplice sopra una varietà  $\bar{M}_{r-r'}$ , trasformata razionale di  $M_r$  e su cui la  $M_r$  vien distesa  $\infty^{r'}$  volte. Questa considerazione riconduce lo studio delle corrispondenze composte a quello delle semplici; onde basta limitarsi a queste ultime.

2. Fra le corrispondenze degeneri irriducibili fra  $M_r, N_s$  hanno particolare importanza i prodotti

$$\Phi(x) = x \times N_s \quad , \quad \Phi'(x') = x' \times M_r,$$

i quali, al variar di  $x, x'$  in  $M_r, N_s$ , descrivon, sul prodotto  $M_r \times N_s$ , due sistemi unisecantisi, d'indice 1, di dimensioni rispettive  $r, s$ , costituiti da varietà  $\Phi, \Phi'$  birazionalmente equivalenti a  $N_s, M_r$ .

Se  $T$  è una corrispondenza  $\infty^e$ , anche degenera, fra  $M_r, N_s$  ed è  $\rho \geq r$ , il simbolo d'intersezione  $(T, \Phi)$  ha un significato preciso<sup>(1)</sup>: esso rappresenta una varietà virtuale, eventualmente nulla, di dimensione  $\rho - r$ , luogo delle coppie  $x, x'$  di  $T$ , per le quali  $x$  è genericamente dato. Come ho spiegato nelle mie Lezioni (in rapporto ai più generali problemi d'intersezione), il simbolo  $(T, \Phi)$  ha un valore relativo ad una scelta, preliminarmente fatta, d'una relazione algebrica d'equivalenza fra le varietà ad  $s$  dimensioni di  $M_r \times N_s$ . Eseguita tale scelta,  $(T, \Phi)$  resta definito su  $T$  a meno dell'equivalenza di specie  $\rho - r$ , sezione di quella di specie  $s$  data su  $M_r \times N_s$ . In particolare (ed è questo il caso importante pel nostro scopo) la relazione prescelta può esser quella di *equivalenza razionale* (cioè quella che dà luogo ai sistemi d'equivalenza). In tal caso resta definito il sistema d'equivalenza dove deve scegliersi la varietà virtuale  $(T, \Phi)$ . La quale può non esistere come varietà effettiva o avere dimensione maggiore della normale.

(1) Ved. SEVERI, *Ueber die Grundlagen der algebraischen Geometrie*. « Abhandl. aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität », Bd. 9, 1933, p. 361.



Quando  $T, \infty^e$  ( $\rho \geq r$ ), è degenerare in  $M_r$ , non esiste alcuna varietà effettiva corrispondente al simbolo  $(T, \Phi)$ , per  $x$  generico; e considerate le varietà di dimensione  $s$ , su  $M_r \times N_s$ , a meno di un'equivalenza razionale, si dimostra che  $(T, \Phi)$  è lo zero dell'equivalenza (razionale) di specie  $\rho - r$  su  $M_r$ . Si prova di più che ad un  $x$  di  $M_r$ , su cui  $T$  agisca, corrisponde una varietà effettiva, equivalente a zero, formata da parti di dimensione  $\geq \rho - r + 1$  <sup>(1)</sup>.

**Matematica** (Geometria algebrica). — *I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali.* Nota II del Socio F. SEVERI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica** (Algebra). — *Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito.* Nota del Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) Questo medesimo concetto dà luogo a un trasporto del criterio di PLÜCKER-CLEBSCH (ved. SEVERI, *Sulla compatibilità dei sistemi di equazioni algebriche ed analitiche*. Questi « Rendiconti », 1933) all'intersezione di  $r$  varietà algebriche ad  $r - 1$  dimensioni, mobili con continuità, entro una  $M_r$  irriducibile (priva di punti multipli): Se per posizioni generiche delle  $r$  varietà le loro intersezioni cadono tutte in varietà fisse subordinate ad  $M_r$  (in particolare talune restano fisse) e per particolari posizioni esiste una ulteriore intersezione, fuori di tali varietà subordinate, essa non è mai isolata. Esporrò altrove la semplice dimostrazione algebrico-geometrica di quest'estensione, che può d'altronde derivarsi con facilità dal criterio di PLÜCKER-CLEBSCH trasportato ai sistemi di equazioni analitiche, come nella seconda parte della mia Nota lineea sopra citata.

**Elettrochimica.** — *Sulla possibilità della lavorazione elettrolitica del rame fortemente impuro e sulla formazione di arbore-scenze catodiche nella raffinazione industriale del rame.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. O. SCARPA.

In tutti i trattati di elettrometallurgia vien messa in rilievo la necessità di impiegare anodi di rame di alto titolo (si consiglia di non scendere a titoli inferiori al 98 % in rame) per poter eseguire industrialmente la raffinazione elettrolitica del rame.

Fra le difficoltà che si oppongono all'impiego di materiali anodici troppo impuri ha importanza la maggior facilità con cui si formano le escrescenze sulla superficie dei catodi, le quali possono causare corti circuiti tra anodo e catodo diminuendo i rendimenti elettrochimici. Inoltre, anche quando non raggiungono le dimensioni necessarie per produrre i corti circuiti, esse conducono a perdite di rame catodico, perchè in parte cadono nei fanghi e perchè all'atto del prelievo dei catodi e durante la loro lavatura debbono venir eliminate se hanno dimensioni notevoli.

Con anodi molto impuri tali escrescenze possono assumere forme assai differenti da quelle riportate nei trattati <sup>(2)</sup> e sovente appaiono come vere arbore-scenze (Fig. 1), che sorgono in numerosi punti distribuiti sulla superficie dei catodi senza alcuna legge e si propagano nella direzione degli anodi rimanendo attaccate al catodo con una piccola base. In altri casi hanno la forma di lunghi filamenti più o meno attorcigliati.

Nell'anno 1922 ho avuto occasione di studiare se e come era possibile ottenere mediante elettrolisi la estrazione del rame (con produzione di metallo di titolo superiore a 99.9) da rottami di varia natura (ottoni, bronzi, leghe di rame-nichel ecc.).

È questo un problema che presentava e presenta grande importanza per l'Italia poichè, essendo noi poveri di minerali di rame, dobbiamo cercare di ottenere, almeno in parte, il rame più puro di cui abbisogniamo soprattutto per la costruzione delle macchine e delle condutture elettriche, utilizzando quei cascami e quei rottami che non sono adatti per impieghi diretti (fabbricazione di leghe di valore o di solfato di rame).

Un simile problema si era presentato agli elettrochimici tedeschi durante la guerra europea del 1914-18, ma i procedimenti da loro seguiti furono

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) J. BILLITER, *Electrometallurgie des solutions*. Paris, 1930, pp. 40 e 41.

tenuti segreti <sup>(1)</sup>. Ove non si adottino metodi differenti da quelli impiegati nella raffinazione elettrochimica del rame e non si prendano precauzioni speciali, il rame risultante dal trattamento elettrolitico dei bronzi e degli ottoni diventa infatti, dopo poco tempo dall'inizio dell'elettrolisi, molto impuro e di pessimo aspetto. I rendimenti elettrochimici tendono inoltre a diventare molto bassi.

Lo studio teorico e sperimentale della questione mi condusse a ideare dei metodi <sup>(2)</sup> di lavorazione di cui alcuni ebbero largo impiego industriale, essendo stati applicati nell'impianto che venne eseguito in Torino nell'anno 1923-24 dalla Società Ollomont, per la estrazione del rame e dello stagno dai rottami di bronzo di cui a quell'epoca vi era grande dovizia sul mercato Italiano in quanto provenivano dalla demolizione, nel dopo guerra, di numerose navi italiane ed estere <sup>(3)</sup>.

L'impianto della Società Ollomont aveva la potenza di produzione di circa quattro tonnellate al giorno di rame e delle corrispondenti quantità di stagno, e lavorò fino all'anno 1926 quando la materia prima divenne più scarsa e quindi più cara, e diminuì la differenza di prezzo fra i rottami di bronzo e i metalli recuperati; si ebbe inoltre, in quell'epoca, un grave rincalimento dei prezzi del rame e dello stagno. In totale produsse circa 4000 tonnellate di rame e una ingente quantità di stagno purissimo.

Dieci anni dopo, alla fine dell'anno 1936, le condizioni del mercato del rame in Italia mostrarono la utilità, e anzi la necessità, di ristabilire un'industria del medesimo tipo. Questa venne realizzata in Milano con una produzione giornaliera che ora raggiunge più di sei tonnellate di rame elettrolitico. La fig. 2 dà una idea delle sale di elettrolisi per il ricupero del rame e dello stagno installate nel 1924 a Torino, e la 3 una veduta della sala principale di elettrolisi per il rame, installata in Milano.

In ambedue questi impianti dovetti studiare le cause che contribuiscono alla formazione delle dette arborescenze e di escogitare i metodi più adatti per eliminarle.

(1) Tali procedimenti sono talvolta citati ma non mai descritti nei trattati di elettrometallurgia. Vedi, per tutti, nel più ampio: V. ENGELHARDT, *Technische elektrolyse Wasseriger Lösungen*. Leipzig, 1932, vol. II, p. 93.

(2) *Processo per preparare rame pulverulento*. Brevetto Italiano N. 225.390, anno 1923; *Cella per elettrolisi*. Brevetto Italiano N. 224.793, anno, 1923; *Curve pour Electrolyse*. Brevetto Francese N. 586.654 e Brevetto Belga N. 320.670, anno 1924; *Processo ed impianto per l'estrazione elettrolitica dello stagno e del rame dai bronzi*. Brevetto Italiano N. 227.161, anno 1924; *Processo per la separazione dello stagno dal piombo e dal rame*. Brevetto Italiano N. 227.988, anno 1924; *Processo per l'estrazione del nichel*. Brevetto Italiano N. 233.862, anno 1924; *Process for electrolytic extration of tin*. Brevetto Inglese N. 227.125 e Brevetto Francese N. 591.363, anno 1925.

(3) Vedi in O. SCARPA: *Extraction electrolytique de l'étain et du cuivre des déchets de bronze*. « Bull. Soc. Franc. Electriciens », 1930.

Quasi tutti i trattati di elettrometallurgia accennano alle formazioni delle escrescenze catodiche, ma le cause e i rimedi sono appena adombrati. Ritengo quindi interessante pubblicare le più singolari apparenze dei fenomeni che ho potuto esaminare accennando alle cause da me rilevate, alcune delle quali si accordano, ed altre no, con quanto è stato pubblicato sull'argomento.

Le formazioni arborescenti che hanno sede agli spigoli dei catodi sono ben note ai pratici. È noto che esse sono dovute all'addensarsi della corrente elettrica sugli spigoli degli elettrodi, epperò in alcuni casi vengono impedito rivestendo gli spigoli dei catodi con sostanze isolanti (bitumi ecc.) o con bacchette di legno o altri materiali (ebanite ecc.) nei quali gli spigoli vengono incastrati. Ove, come nel caso della lavorazione di anodi molto impuri, si abbia abbondante formazione di sottilissimi fanghi anodici, i depositi di polvere sullo spigolo superiore (orizzontale) dei catodi può aumentare notevolmente la importanza locale di queste escrescenze.

Un particolare interesse hanno le escrescenze che talvolta si generano sulla superficie dei catodi. Escrescenze del medesimo tipo si incontrano anche in altre elettrolisi industriali ad esempio in quella dello zinco; quelle che si vedono nei due catodi della fig. 4 furono da me osservate nell'elettrolisi di anodi molto impuri (titolo in rame circa 93 %) provenienti da rottami di rame, quando non erano stati presi gli opportuni provvedimenti onde impedirne la formazione.

Una di queste escrescenze è stata tolta dal catodo e riprodotta nella fig. 1 in grandezza naturale.

È evidente che sulla velocità e sulla entità del loro sviluppo ha particolare importanza il valore della densità della corrente, e ciò risulta in modo indubbio dal confronto delle figg. 4 e 5 che si riferiscono alle superficie opposte dei medesimi catodi interposti fra anodi di egual natura e quindi in eguali condizioni di temperatura, costituzione dell'elettrolita ecc. ma soggetti a differente densità superficiale di corrente.

Una arborescenza veramente eccezionale è riprodotta in grandezza naturale nella fig. 6. La sua altezza massima è di ben 10 centimetri.

Un tipo completamente diverso di escrescenza è quello rappresentato in grandezza naturale nella fig. 7. Qui si tratta di filamenti (barbe) di rame che pur sorgono da punti singolari distribuiti senza legge sulla superficie dei catodi e si sviluppano mediamente nella direzione degli anodi, contorcendosi e sovente attorcigliandosi su se stesse in modo bizzarro di assai difficile spiegazione.

Un altro tipo di escrescenza che pur si impianta e si accresce normalmente alla superficie dell'elettrodo è rappresentato in grandezza naturale nella fig. 8. Tanto questa escrescenza quanto le arborescenze delle figg. 1, 4, 5, 6 sono costituite da aggregati di piccoli cristalli di rame con facce sovente visibili ad occhio nudo; le barbe di cui la fig. 7 hanno invece apparenza non cristallina (con facce visibili) e sorse il dubbio che si tratti di cristalli



unici. Ho fatto perciò eseguire dal mio assistente, ing. Vincenzo Montoro, l'esame röntgenografico di piccoli tratti di queste barbe, usufruendo della Camera Debye-Scherrer. Ne è risultato lo spettro riprodotto nella fig. 9 dal quale si deduce che esse sono costituite da aggregati di minutissimi cristallini di rame con orientazione non unica.

È interessante ricordare che fra le cause che principalmente contribuiscono alla formazione delle più grandi arborescenze si sono trovate alcune impurità di natura organica provenienti dalle vernici con cui erano state protette alcune parti che venivano in contatto con l'elettrolita caldo, mentre le più grandi barbe si riscontrarono allorquando il tenore dell'elettrolita in ioni cloro (la cui presenza è necessaria per la precipitazione nei fanghi anodici dell'argento e dell'antimonio) era eccessivamente basso.

L'aggiunta all'elettrolita di opportune sostanze colloidali (gelatine ecc.) e di sostanze non colloidali, ma ad alto peso molecolare, tende come è noto a rendere il metallo catodico assai compatto e di bell'aspetto e quindi contrasta la formazione delle usuali escrescenze nodulari. Ciò avviene anche per le arborescenze.

La scelta di sostanze colloidali giustamente dosate, un' oculata regolazione della temperatura e della composizione dell'elettrolita, una conveniente regolazione della densità della corrente e della agitazione dell'elettrolita hanno permesso di eliminare, in modo praticamente completo, la formazione delle sopradescritte barbe e arborescenze e di ottenere catodi di rame dello spessore di circa un centimetro con superficie unita, microcristallina, senza protuberanze, e con spigoli sui quali si osserva soltanto la formazione di cordoni tondeggianti che non sono di alcun pericolo rispetto alla formazione di corti circuiti fra gli elettrodi.





Fig. 1

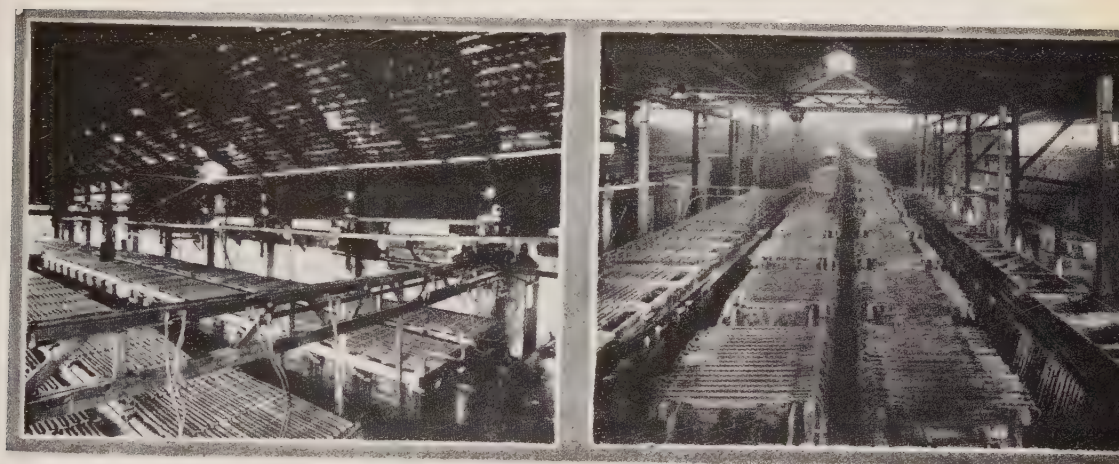


Fig. 2



Fig. 3

Fig. 1 - Arborescenza catodica (grandezza naturale).

Fig. 2 - Impianto elettrolitico per ricupero del rame e dello stagno dai rottami di bronzo.



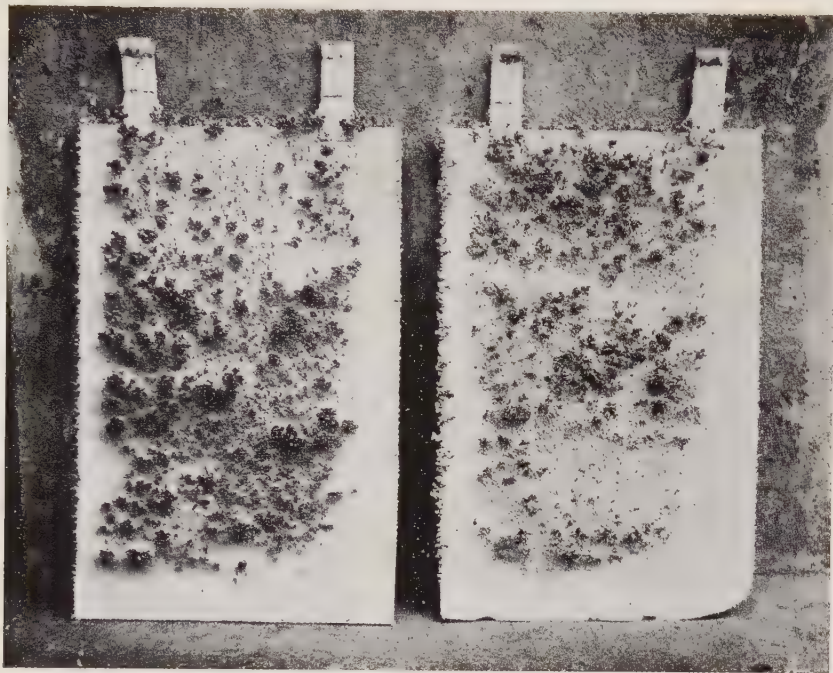


Fig. 4

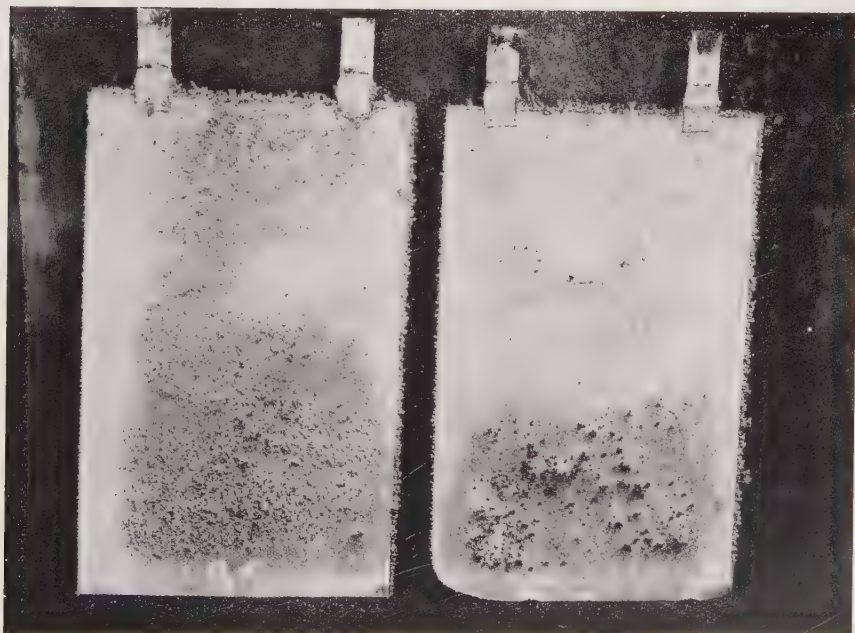


Fig. 5

Fig. 4 - Catodi di rame con arborescenze (grandezza: circa 1/14 del naturale).  
Fig. 5 - Idem.







Fig. 6

Fig. 6 - Grande arborescenza catodica (grandezza naturale).







Fig. 7

Fig. 7 - Escrescenze catodiche filiformi (grandezza naturale).





Fig. 8



Fig. 9

Fig. 8 - Escrescenza catodica massiccia (grandezza naturale).

Fig. 9 - Spettro Debye-Scherrer di una escrescenza catodica filiforme.





**Mineralogia.** — *Sopra una formazione gabbro-dioritica e kinzigitica nell'Alta Valtellina.* Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. A. STELLA.

Chi entra nell'Alta Valtellina scendendo dal giogo dello Stelvio lungo l'ardita rotabile costruita dal Donegani, percorre la gola del Braulio sprofondata nella nuda montagna dolomitica per sboccare improvvisamente ai bagni di Bormio in vista della magnifica verdeggiante conca bormiese aperta negli scisti cristallini antichissimi, ammantati in basso dalle morene e dalle alluvioni. Il corso del fiume Adda solca questi terreni di trasporto, ma subito a valle della conca di Bormio esso sprofonda il suo corso in un'altra gola, la quale si svolge da Cepina a Bolladore, stringendosi al fiume nelle così dette Serre di Morignone.

In questa tratta vengono a giorno oltre agli scisti cristallini anche importanti masse di rocce eruttive: il tutto costituisce un complesso geologicamente molto interessante; ed è questo complesso l'oggetto della presente comunicazione.

Io ho avuto modo di studiare o meglio di ristudiare tale complesso in questi ultimi anni, in cui d'accordo colla Direzione del R. Ufficio Geologico mi sono dedicato a completare il rilevamento geologico dell'Alta Valtellina, rilevamento da me incominciato e già avanzato parecchi anni addietro.

Fin d'allora io ebbi occasione di richiamare l'attenzione, oltre che sulle rocce eruttive gabbro-dioritiche delle Serre di Morignone già segnalate dai vecchi geologi, anche sulla presenza di speciali scisti micaceo-gneisici di tipo kinzigitico; onde questo complesso di rocce veniva a presentare analogia col complesso costituente le ben note zone diorito-kinzigitiche Ivrea-Verbanese, studiate e rilevate in collaborazione da me, dal Collega V. Novarese e dal compianto ingegnere, nostro socio, S. Franchi. Il Novarese ha tenuto conto di questa analogia nel curare la nuova edizione della Carta Geologica d'Italia edita dal R. U. G. nella scala di 1 : 1.000.000, dove appare per la prima volta segnata, sia pure schematicamente, nell'Alta Valtellina una formazione kinzigitica, alla quale il Novarese ha anche accennato in una sua Memoria interessante <sup>(2)</sup>: *Sulle formazioni kinzigitiche in Italia*. Ivi egli riferisce pure sui contributi petrografici portati da alcuni distinti allievi dell'Istituto geologico universitario di Jena, diretto dal prof. Link, che pubbli-

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) « Boll. R. Ufficio Geologico », 1931.

carono accurate diagnosi microscopiche di una serie di campioni provenienti sia dalle rocce eruttive (O. Hecker, O. Rasch, A. Zapf <sup>(1)</sup>), sia dalle rocce scistose (Sauerbrei <sup>(2)</sup>). Anzi queste diagnosi mi permettono qui di rendere più rapida la mia esposizione, soffermandomi soltanto sopra alcuni punti di speciale interesse litologico, per dare invece risalto alle condizioni di giacitura geologica, quali risultano dal rilevamento eseguito nell'aspro terreno, e che gettano luce sulla singolare associazione di tipi litologici in questo interessante complesso roccioso.

La sua giacitura d'insieme rispetto alle formazioni cristalline laterali è all'incirca quella di un irregolare elissoide originariamente sepolto sotto la coperta degli scisti cristallini, coperta sbrecciata da Nord a Sud per un 25 Km. dalla valle dell'Adda, la quale mette allo scoperto sui fianchi le rocce che compongono l'elissoide stesso.

Di gran lunga prevalenti vi affiorano rocce schiettamente eruttive, essenzialmente gabbriche e dioritiche: sono preminenti le prime e formano un blocco esteso su quasi tutta l'area che sta a Sud di Morignone fino a Bolladore; mentre le seconde si mostrano a Nord di quel punto in prosecuzione delle prime fino a Cepina, affiorando in modo più discontinuo. La individualità di questi due gruppi di rocce non è da intendersi assoluta, poichè dal punto di vista litologico si ha certa variazione in ciascun gruppo e anche una transizione dall'uno all'altro gruppo. La maggior parte di queste varietà litologiche furono descritte dai giovani studiosi sopra menzionati. Importa però di notare che permane tuttavia sufficiente individualità geologica marcata nei due gruppi, sì da essere delimitabili sul terreno.

Le rocce gabbriche sono essenzialmente gabbri a orneblenda, mentre sono molto subordinati quelli con olivina e quelli pirossenici, sia di tipo schiettamente eufotidico con pirosseno diallagico, sia con pirosseno rombico cioè di tipo noritico. Tutti presentano poi varietà granatifere. Inoltre queste varietà granatifere si sviluppano in lenti accessorie e talora in fasce che danno luogo a una caratteristica zonatura specialmente nelle varietà noritiche (Le Prese, Mondadizza). Si possono presentare casi estremi di fasce che col diminuire o sparire del pirosseno e col prevalere del granato diventano delle granatiti più o meno felspatiche (S. Agnese, Morignone); oppure sparando quasi pirosseno e granato danno luogo a delle specie di anartositi (Suville, Santella della rovina). Queste ultime specialmente hanno anche mineralizzazione pirritica diffusa con impregnazioni anche di pirrotina, che nel passato hanno dato luogo a piccole ricerche minerarie (sotto Suville, Prades). È degna di nota l'analogia che presentano le nostre anartositi granatifere con certe varietà delle cosiddette stromboliti descritte dall'Artini.

Anche le rocce dioritiche sono essenzialmente dioriti ad orneblenda; biotitiche e più o meno quarzose, presentano talora *facies* granito-tonalitica,

(1) « Neues Jahrbuch für M. G. P. », 1911, 1912.

(2) Ibidem 1903.

con parti aplitiche e venuzze pegmatitiche con orneblenda (Cepina, S. Martino). Più comunemente però le dioriti tendono a *facies* basica che le lega ai gabbri. Di rado presentano anche zone di laminazione di aspetto gneisico (Alpe Oultier); il che si accorda col fatto degli scarsi fenomeni cataclastici osservabili al microscopio sia in queste come nelle altre rocce della zona.

È da aggiungere che si osservano filoni di pegmatiti solamente nella parte meridionale dei gabbri a Sud di Mondadizza su ambi i fianchi della valle principale e del vallone di Lenasca: sono pegmatiti tormalinifere e berillifere già descritte da Link <sup>(1)</sup>.

Conviene aggiungere alcune osservazioni riguardo alla giacitura di questo plutonite gabbro-diorititico che si disse far parte di una specie di elissoide irregolare allungato in senso meridiano. Questa irregolarità diventa notevole specialmente nella porzione mediana in sinistra della valle, dove la massa dioritica forma una grande protuberanza, cosicchè il contatto della massa eruttiva cogli scisti sale trasversalmente all'andamento generale di questi dall'abitato di Aquilone (m. 1070) fino alla cresta di Profa (m. 3000) attraversando le successive zone degli scisti kinzigitici, dei gneis e delle filadi. Analogo comportamento trasversale presenta la minore massa dioritica che attraversa la rotabile a Morignone incassandosi negli scisti kinzigitici. Così pure si incassa trasversalmente ai micascisti la massa gabbbrica nella sua porzione meridionale in destra della valle a monte di Sondalo rimpetto a Mondadizza. Singolari sono poi le digitazioni filoniane della diorite negli scisti, rilevabili lungo il fianco sinistro del vallone della Piscia che sbocca rimpetto a Cepina. Il fenomeno riappare evidente nelle balze rimpetto a Cepina; mentre nella prosecuzione di quelle balze verso Morignone si notano frequenti inclusi di scisti nella diorite, sia nella cava presso Cepina, sia in quella presso Aquilone e infine nei tagli presso S. Martino, dove si trovano rocce migmatitiche per compenetrazione di magma dioritico negli scisti biotitici <sup>(2)</sup>.

Passando alle rocce scistose che ho raggruppato sotto la denominazione di « gruppo kinzigitico » esse hanno sviluppo subordinato rispetto alle rocce gabbro-dioritiche; e vengono ad affiorare in condizioni quanto mai varie e singolari. Cioè si osservano in fasce allungate interposte fra le masse eruttive e la soprastante formazione gneisica, come avviene nell'alto del versante sinistro della valle fra il vallone delle Presure e quello del Solcio; e anche a mezza costa rimpetto a S. Antonio Morignone. Oppure affiorano in lenti irregolari in piene rocce eruttive, come avviene nella massa gabbbrica delle balze sopra il ponte del Diavolo e in quella delle Prese sui due fianchi della valle. Finalmente affiorano anche in striscie interposte fra gabbro e dioriti come avviene superiormente alle balze di Morignone.

(1) « Jeneische Zeitschrift f. Naturwissenschaften », 1903.

(2) Cfr. comunicazione Stella nel « Boll. Soc. Geol. It. », 1936, I.



Lo sviluppo litologico di questi parascisti kinzigitici è multiforme nel dettaglio, ma abbastanza unitario nell'insieme di ciascuna zona di affioramento; presentando quasi sempre le stesse alternanze di banchi con aspetto variabile di micascisti, di filladi, di gneis minuti e anche di corneane e di quarziti. La loro costituzione essenziale è quella di rocce biotitico-quarzose sempre granatifere, felspatiche in variabile misura, con frequente notevole presenza di sillimanite cui si accompagna grafite e raramente cordierite. Ne nascono tipi litologici vari che si possono definire: filladi quarzoso-granatifere e quarzoso-sillimanitiche, scisti biotitici granatiferi a sillimanite, gneis biotitici sillimanitici più o meno granatiferi, corneane quarzo-sillimanitiche più o meno felspatiche, quarziti debolmente granatifere e sillimanitiche.

Le condizioni di giacitura di questa formazione kinzigitica costituita di scisti altamente metamorfici in stretta associazione e implicazione con le masse eruttive gabbro-dioritiche e soltanto con esse, giustificano l'idea che l'azione metamorfosante sia dovuta almeno in parte alle rocce eruttive. L'idea è confermata e precisata dal rilevamento geologico, nel senso che tale azione metamorfosante di origine eruttiva si sia sovrapposta e complicata con un precedente metamorfismo generale.

Effettivamente i rilievi sul terreno portano al risultato, che le striscie kinzigitiche dell'area Nord si raccordano geologicamente e litologicamente cogli scisti filladici di tipo normale che vanno a costituire la grande conca di Bormio. Quelle filladi vengono a incunearsi fra le masse eruttive, affiorando in alto su ambedue i versanti della valle nella tratta che dal ponte di Zola arriva poco oltre il ponte di Cepina, in modo che si passa gradualmente da *facies* di filladi ordinarie a *facies* di micascisti biotitici e in fine a *facies* marcatamente kinzigitica. Onde si viene così al risultato di una kinzigitizzazione della precedente *facies* filladica per azione metamorfosante del plutonite gabbro-dioritico.

Con ciò si viene implicitamente a delimitare l'età delle masse eruttive, da ritenersi sicuramente posteriori alla formazione filladica. In merito all'età è interessante richiamare l'attenzione sulla non lontana massa di diorite orneblendica della nota miniera del Zebrù da me studiata<sup>(1)</sup>, che è intrusa nella dolomia triassica presso il contatto discordante di essa colle filladi sottostanti e che ha metamorfosato la dolomia apportandovi anche la mineralizzazione di magnetite. Non è fuor di luogo il sospetto, che questo spuntone dioritico sia legato alla analoga diorite delle Serre di Morignone, sicchè anche la massa eruttiva delle Serre possa con probabilità riferirsi ad epoca postriassica, come lo sono del resto le masse eruttive dell'Adamello e di Predazzo.

Io non intendo generalizzare le considerazioni qui fatte sulla nostra formazione kinzigitica dell'Alta Valtellina per estenderle alle altre formazioni

(1) *Le miniere di ferro dell'Italia*, 1921, Lattes, IV, cap. terzo.

kinzigitiche alpine; che anzi l'esame comparativo di esse ci mette in guardia contro tale generalizzazione. Senza entrare in particolari, se si richiamano le condizioni geolitologiche acquisite sulle formazioni kinzigitiche della Valtellina, della zona Ivrea-Verbanò, del Ticino, della Bassa Val Mera, dell'Alta Val Bregaglia, della Bassa Valtellina e della valle di Ultimo, bisogna riconoscere in esse, oltre a differenze litologiche, notevoli differenze geologiche date dal differente sviluppo di rocce eruttive che le accompagnano e dalla differente posizione nella catena scistoso-cristallina alpina: onde si spiega la difficoltà di una interpretazione genetica soddisfacente, quando non concorrono, come nel caso nostro, condizioni favorevoli alla individuazione di un duplice metamorfismo.

Sta di fatto però, che quasi tutti gli studiosi delle formazioni kinzigitiche sono stati condotti al concetto di attribuirle al cosiddetto polimetamorfismo, in parte di profondità in parte di varia influenza eruttiva. Sicchè in definitiva si è portati alla conclusione, che le formazioni kinzigitiche alpine, senza appartenere necessariamente ad una medesima zona geologica, siano da considerarsi come parascisti con *facies* altamente metamorfica derivanti da speciali gruppi di sedimenti, *facies* prodottasi per la convergenza di multiple azioni metamorfiche, le quali si sono potute qui individuare nel caso speciale dell'Alta Valtellina.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari.* Nota I di S. CHERUBINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

L'applicazione del calcolo di matrici e delle proprietà infinitesimali di queste ai sistemi lineari di equazioni differenziali è ormai di dominio comune <sup>(2)</sup>. L'algoritmo delle matrici costituisce, invero, un ausilio potente per presentare problemi e risultati sotto forma elegante, semplice e brevissima e in pari tempo assai comoda per le applicazioni. Però, salvo il caso delle equazioni a coefficienti costanti, non mi consta si siano finora incontrati esempi notevoli di sistemi la cui integrazione in matrici possa farsi, *anche formalmente*, in modo del tutto analogo a quella di un'equazione ad una sola variabile (scalare) incognita.

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Basta consultare il trattato di L. SCHLESINGER, *Einführung in die Th. der gewöhnlichen Differentialgleichungen*. [Berlin, W. de Gruyter, Dritte Auflage, 1922]. Vedasi anche il corso di lezioni di LAPPO-DANILEVSKY pubblicato nel 1934 dall'Istituto fisico-matematico Stekloff dell'Accademia delle Scienze dell'U. R. S. S. col titolo: *Mémoires sur la théorie des systèmes de équations différentielles linéaires*.



Orbene, come si vedrà in queste pagine, la nozione e le proprietà di funzione olomorfa di matrici, recentemente da me stabilite <sup>(1)</sup>, permettono di indicare estese classi di sistemi lineari la cui matrice integrale si esprime precisamente allo stesso modo di come si esprimerebbe l'integrale dell'equazione differenziale a variabili ordinarie

$$y' = f(x) y.$$

Nè il calcolo effettivo della matrice integrale presenta maggiori difficoltà di quello per le variabili scalari, sicchè il metodo può impiegarsi anche per la calcolazione numerica.

La nozione di funzione di matrici, come è stata considerata dallo Spampinato <sup>(2)</sup> e da me, permette anzi di estendere le osservazioni che seguono al caso in cui i coefficienti, le funzioni incognite e la variabile siano matrici, anzichè quantità scalari. Ma di ciò ho intenzione di occuparmi in altra occasione <sup>(3)</sup>.

1. Con  $y_1, y_2, \dots, y_n$  indichiamo  $n$  funzioni incognite della variabile complessa  $x$ , legate alle loro derivate dalle relazioni

$$(1) \quad \frac{dy_i}{dx} = a_{i1} y_1 + a_{i2} y_2 + \dots + a_{in} y_n \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ove gli  $a_{ik}$  son funzioni olomorfe (monogene) della  $x$ , definite in un certo intorno di  $x = x_0$ .

Siano, se possibile,

$$(2) \quad y_{1r}, y_{2r}, \dots, y_{nr} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

$n$  sistemi di soluzioni linearmente indipendenti del sistema (1), ciascuna  $y_{sr}$  essendo una funzione olomorfa di  $x$ , nello stesso intorno di  $x = x_0$  di cui sopra, o in uno contenuto in esso.

(1) S. CHERUBINO, *Funzioni olomorfe di matrici*. « Annali Sc. Norm. di Pisa », 1937. Citerò questa, in seguito, con F. Ved. anche i « Comptes Rendus » del giugno 1936.

(2) *Sulle funzioni di una variabile in un'algebra complessa ad  $n$  unità dotata di modulo*. « Rend. Palermo », to. 57-58-59, anni 1933-34-35.

(3) Così pure è possibile estendere lo studio dei sistemi lineari di equazioni differenziali dal caso regolare, il solo qui considerato, a quello singolare (come già si fa con la teoria infinitesimale delle matrici secondo VOLTERRA e SCHLERINGER). Occorrerà, naturalmente, proseguire la trattazione iniziata nella mia Memoria avanti citata considerando funzioni analitiche di matrici e studiar le loro singolarità. Il che può certo farsi senza inconvenienti. A tal proposito è utile ricordare che lo SPAMPINATO [Memoria II, note ai §§ 7 e 9] ha mostrato che la derivazione e l'integrazione di una sostituzione secondo VOLTERRA rientrano nel suo più generale punto di vista. È opportuno anche ricordare che la definizione di funzione olomorfa di matrice vale anche in algebre non commutative [ved. F, n. 15, osservazione].

Ponendo

$$A = \| a_{ik} \|, \quad Y = \| y_{sr} \|$$

ed indicando con

$$\frac{dY}{dx} = \left\| \frac{dy_{sr}}{dx} \right\|$$

a matrice i cui elementi son le derivate di quelli di egual posto in Y, le (1) si riassumono ne l'unica equazione in matrici

$$(3) \quad \frac{dY}{dx} = A \cdot Y.$$

Il sistema (2) si dice un *sistema fondamentale* di soluzioni olomorfe di (1) ed Y una *matrice integrale* di (1), ovvero di (3).

Come condizioni iniziali poniamo che per  $x = x_0$  la matrice incognita Y assuma la determinazione  $Y = Y_0 = \| y_{sr}^{(0)} \|$ .

Poichè le soluzioni (2) sono linearmente indipendenti, il determinante  $|Y|$  di Y non è identicamente nullo e la (3) può anche scriversi <sup>(1)</sup>

$$(4) \quad \frac{dY}{dx} \cdot Y^{-1} = A.$$

Se Y è una matrice integrale di (3), o di (4) che è lo stesso, anche

$$Z = YC,$$

ove C è una matrice costante arbitraria, non degenera, è soluzione della equazione stessa. Al variare di C si hanno tutte le possibili soluzioni della (3), o della (4), ossia tutti i possibili sistemi fondamentali di soluzioni del sistema (1). Ed è ovvio che dall'olomorfismo delle soluzioni date con la Y si deduce quello delle soluzioni compendiate in  $Z = YC$ .

La teoria classica <sup>(2)</sup> permette di integrare la (3) con le posizioni <sup>(3)</sup>

$$(5) \quad A = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \dots$$

$$(6) \quad Y = Y_0 + Y_1(x - x_0) + Y_2(x - x_0)^2 + \dots$$

(1) Si tenga presente che sia nella (3) che in questa (4) non è, in generale, lecito lo scambio dei fattori rispettivamente al 2° ed al 1° membro.

(2) Cfr. il citato trattato dello SCHLERINGER, cap. V, § 36, pp. 132-141. Vedi anche, pel caso dei coefficienti costanti, il recentissimo trattato di GASTON JULIA, *Introduction Mathématique aux théories quantiques*. « Cahiers scientif. », Paris, Gauthier-Villars, 1936, cap. II, § IV, pp. 109-110.

(3) Queste (5)-(6) son 2 serie di potenze della variabile scalare  $x - x_0$ , con coefficienti matrici.

La prima di queste serie si deduce ovviamente dagli analoghi sviluppi degli elementi  $a_{ik}$  di  $A$ ; la (6) sintetizza gli sviluppi delle soluzioni (2). Sostituendo nella (3) ed identificando i due membri, si ottengono le formole ricorrenti

$$(7) \quad (k+1) Y_{k+1} = A_0 Y_k + A_1 Y_{k-1} + \dots + A_k Y_0 \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

che dalla serie (5), nota  $Y_0$ , permettono di calcolare i termini di (6), ed insieme, mercè opportune osservazioni, il campo di convergenza di questa (6).

2. Vogliamo qui porre in rilievo una classe di sistemi lineari, o meglio di equazioni del tipo (3), o del tipo (4) che è lo stesso, in cui la integrazione può ottenersi senza l'uso di formole ricorrenti, e precisamente integrando la (4) come se  $Y$  fosse un'ordinaria variabile (funzione incognita) ed  $A$  un'ordinaria funzione di variabile complessa. E cioè con la relazione

$$(8) \quad Y = Y_0 \int_{x_0}^x A dx$$

dove  $\int_{x_0}^x A dx$  indica la matrice i cui termini si ottengono integrando, sempre fra  $x_0$  ed  $x$ , i termini di egual posto di  $A$ .

Per intendere questa (8) ricordiamo che si può porre <sup>(1)</sup>

$$(9) \quad e^Z = I + \frac{I}{1!} Z + \frac{I}{2!} Z^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( I + \frac{Z}{n} \right)^n,$$

dove  $I$  è la matrice identica e  $Z$  una matrice variabile: questa serie risulta convergente <sup>(2)</sup> qualunque sia la matrice  $Z$ .

La cosa è già nota, e segue ovviamente dal metodo sopra ricordato <sup>(3)</sup>, quando la matrice  $A$  sia costante, cioè quando si abbiano equazioni lineari a coefficienti costanti. Si tratta di indicare altri casi in cui la risoluzione di (3) sotto la forma (8) è ancora possibile.

### 3. Considerando la matrice scalare

$$X = xI,$$

(1) Cfr., ad es., H. WEYL, *Gruppentheorie und quantenmechanik*. Leipzig, Hirzel, 1928, cap. I, § 6, p. 25.

(2) Per le serie di potenze a coefficienti matrici, vedi le condizioni di convergenza nella mia Nota: *Sulle serie di potenze di una variabile in un'algebra*. «Rend. Lincei», vol. XXII, 1935, pp. 211-216.

(3) Cfr. i mentovati trattati di G. JULIA e di H. WEYL, loc. cit.

prodotto dell'identità per la variabile complessa  $x$ , e scrivendo quindi  $dX = dx \cdot I$  si può porre, come subito si riconosce,

$$(12) \quad \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dX},$$

cioè  $Y$  risulta funzione derivabile (a derivata unica) di  $X$ . Ponendo poi

$$(13) \quad A = f(X),$$

cioè esprimendo che  $A$  è funzione della matrice variabile  $X$  (ossia i suoi elementi funzioni di quelli di  $X$ ), dal fatto che gli elementi di  $A$  son funzioni olomorfe della variabile numerica  $x$ , segue subito che  $A = f(X)$  è funzione olomorfa di  $X$ .

Infatti, posto  $x = \alpha + i\beta$  e dicendo  $s$  e  $t$  le parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica di  $X$ , si ha

$$X = s + t, \quad s = \alpha I, \quad t = i\beta I \quad i = \sqrt{-1}.$$

Essendo  $\sigma$  e  $\tau$  le parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica di  $f(X)$ , si ha

$$f(X) = \sigma + \tau$$

con

$$2\sigma = \|a_{ik} + \bar{a}_{ki}\|, \quad 2\tau = i\|a_{ik} - \bar{a}_{ki}\|,$$

ove si è posto

$$a_{ik} = \alpha_{ik} + i\beta_{ik}, \quad \bar{a}_{ik} = \alpha_{ik} - i\beta_{ik}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Dopo di che, si verificano immediatamente le condizioni di olomorfismo (ved. F., § 4, n. 15)<sup>(1)</sup>. Cioè a dire si ha

$$\frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial s}$$

e che queste due matrici sono, ordinatamente, antisimmetrica ed antiemisimmetrica<sup>(2)</sup>.

(1) Come si vede, si tratta di condizioni perfettamente analoghe a quelle per le variabili ordinarie: la differenza nel segno della seconda è dovuta all'inclusione del coefficiente  $i$  nelle parti antiemisimmetriche. Di più, se l'algebra in cui si opera è commutativa (e contiene l'identità, la variabile indipendente e la funzione) vale il teorema di Cauchy con le sue conseguenze. Ne segue che, nelle algebre commutative, si opera sulle funzioni olomorfe di matrici precisamente come su quelle di variabile complessa scalare.

(2) Dopo di che si ha:

$$\frac{df(X)}{dX} = \frac{\partial \sigma}{\partial s} + \frac{\partial \tau}{\partial s} = \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\tau}{dt} = \frac{df(X)}{dx}.$$

Supposto ora che  $f(X)$  e la sua derivata varino in un'algebra commutativa contenente l'identità, si può scrivere

$$(14) \quad \int_{x_0}^x A dx = \int_{X_0}^X f(X) dX = A^* - A_0^*,$$

l'integrale al secondo membro essendo esteso a un arco di Jordan, del resto arbitrario, di estremi  $X_0$  ed  $X$  e tutto contenuto nell'insieme (dello spazio rappresentativo dell'algebra) in cui si considera variabile  $X$ . La matrice costante  $A_0^*$  dipende soltanto da  $\alpha_0$ .

Questa  $A^* - A_0^*$  non è poi altro che la matrice ottenuta da  $A$  integrando i suoi termini fra  $x_0$  ed  $x$ , nel campo in cui varia  $x$ , quindi è funzione olomorfa di  $X$ , perchè i suoi termini son funzioni monogene di  $x$ .

4. Di qui, ed è questo il punto essenziale, non può senz'altro dedursi l'integrale della (4) nella forma (8).

All'ipotesi dell'olomorfismo dei coefficienti  $a_{ik}$  di (1), già completata con la variabilità di  $f(X)$  e della sua derivata, al variare di  $x$ , in un'algebra commutativa di matrici contenente l'identità, occorre aggiungere l'altra che la matrice (14) sia contenuta in una stessa algebra commutativa con  $f(X)$ , la derivata di questa, ed  $I$ , quindi con  $X = xI$ . Allora si ha <sup>(1)</sup>

$$(15) \quad \frac{d}{dX} \int_{X_0}^X f(X) dX = f(X)$$

cioè  $A^* - A_0$  è funzione derivabile, a derivata unica, di  $X$  ed ha per derivata  $f(X)$ . Anzi è funzione olomorfa di  $X$ , il che avevamo già osservato <sup>(2)</sup>.

Ciò posto, ricordiamo <sup>(3)</sup> che la serie scalare di potenze (9), se  $Z$  varia in un'algebra commutativa, definisce una funzione olomorfa di  $Z$  la cui derivata rispetto a  $Z$  risulta

$$(16) \quad \frac{de^Z}{dZ} = I + \frac{1}{1!} Z + \frac{1}{2!} Z^2 + \dots = e^Z$$

cioè può scriversi

$$(17) \quad de^Z = e^Z \cdot dZ = dZ \cdot e^Z.$$

La matrice  $Z$ , invece che variabile indipendente, può essere una funzione olomorfa di  $X$ : ad esempio la (14). Questa relazione, per quanto si è detto

(1) È ciò anche se  $x$  non è una matrice scalare. Vedi i §§ 6-7-8 della F.

(2) Però solo per  $X$  matrice scalare mentre ora la conclusione vale anche per  $X$  qualunque [F., § 8, n. 24].

(3) Cfr. ancora la F., § 5.



poco fa, continuerà ad aver valore, purchè  $Z$ , cioè la (14), appartenga all'algebra commutativa in cui variano  $X$ ,  $A = f(X)$  e la sua derivata: tanto perchè alla stessa algebra commutativa bisogna che appartenga  $dZ = f(X) dX$ .

Quindi potrà scriversi

$$(18) \quad de^{\int f(X) dX} = dX \cdot f(X) \cdot e^{\int f(X) dX} = e^{\int f(X) dX} \cdot f(X) dX,$$

ove, per semplicità di scrittura, abbiamo ommesso gli estremi di integrazione.

Dopo di che la (4), che in forza delle (12)–(13) si scrive più espressivamente

$$(4)^* \quad \frac{dY}{dX} \cdot Y^{-1} = f(X),$$

s'integra appunto con la (8).

**Matematica.** — *Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari.* Nota II di S. CHERUBINO, presentata dal Corrisp. G. SCORZA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques.* Nota di B. D'ORGEVAL, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio F. ENRIQUES.

Monsieur Enriques<sup>(2)</sup> a démontré, que si l'on fait varier les courbes d'une famille de sorte que l'une d'elles acquière des points doubles supplémentaires, qui la rendent rationnelle, on peut retrouver la géométrie sur la courbe générale de la famille, en supposant ces points doubles accidentels virtuellement inexistants. On considère alors sur la courbe des séries auxquelles on impose de contenir des couples neutres.

Une extension immédiate, dont nous ferons usage par la suite, est la propriété suivante.

« Une courbe de genre  $\bar{p}$ , sur laquelle on considère des séries possédant  $i$  couples neutres, peut être retenue comme virtuellement de genre  $\bar{p} + i$  ».

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) F. ENRIQUES, *Il principio di degenerazione e la geometria sopra le curve algebriche.* « Math. Annalen », Bd. 85, 1922.

Une telle propriété est-elle susceptible de se généraliser aux surfaces algébriques? Il est bien certain que l'on ne peut obtenir une extension aussi générale, car la déformation continue d'une surface, ne permet pas de lui faire acquérir toutes les singularités que l'on peut désirer. Aussi nous bornerons-nous à traiter le problème restreint; supposons qu'une surface possédant une certaine courbe double  $\gamma_1$ , puisse être rendue rationnelle par l'adjonction d'une autre courbe double  $\gamma_2$ ; que peut-on déduire de l'étude de la représentation plane de la surface si l'on suppose  $\gamma_2$ , virtuellement inexistante? Je partirai d'un système triplement infini de courbes  $|C|$  possédant  $\sigma$  points-bases. Soit  $n$  l'ordre de la courbe  $C$ ,  $r_i$  la multiplicité de  $C$  au point-base  $B_i$ . Ce système représente une surface rationnelle d'ordre  $N$ , tel que:

$$N = n^2 - \sum_i^{\sigma} r_i^2.$$

Sur cette surface existe une courbe double d'ordre  $\frac{(N-1)(N-2)}{2} - p$ ,  $p$  désignant le genre des courbes  $C$ . Cette courbe double se représente sur le plan, si l'on suppose les points-bases indépendants, par une courbe  $\Gamma$  d'ordre  $n(N-4) + 3$  passant aux points-bases avec les multiplicités  $r_i(N-4) + 1$ . Les courbes du système  $|C|$  découpent sur cette  $\Gamma$ ,  $i$  couples de points appartenants à une  $\gamma_2^i$ . Il existe en général

$$t = \frac{1}{6} (N^2 - 8N + 18) - p(N-8) - \sigma,$$

points triples de la surface, triples pour la courbe double, imposants une seule condition aux courbes qui doivent y passer.

Caporali a montré<sup>(1)</sup> que l'on pouvait supposer qu'il n'y a pas de courbes fondamentales, sauf s'il existe seulement deux points-bases de multiplicités  $r_1$  et  $r_2$  avec  $r_1 + r_2 = n$ ; nous ne traiterons pas ce cas qui donne lieu aux mêmes conclusions.

Je suppose alors  $\Gamma$  décomposée en deux courbes  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , dont je supposerais  $\Gamma_1$  virtuellement inexistante. Je considérerais seulement les courbes du plan qui découpent sur  $\Gamma_1$  des couples d'une  $\gamma_2^i$  et je leur imposerais de posséder en ces points des couples neutres.

Remarquons que si l'on désigne par  $\Pi$ ,  $\Pi'$ , les genres dans le plan et sur la surface de la courbe double, et par  $\tau$  le nombre des points triples, un système de courbes dépendant dans le plan de  $\Theta$  conditions et dont le nombre d'intersections avec la courbe double est  $2i$ , donne par l'imposition de la condition de passage par les couples de la  $\gamma_2^i$  un système de dimension,

$$\Theta - i + \Pi + \tau - \Pi'.$$

(1) *Sopra i sistemi lineari triplamente infiniti di curve algebriche piane.* « Memorie di geometria », p. 171 (B. Pellerano, Napoli, 1888).

Soit alors  $|K|$  un système de courbes dans le plan. Sur la surface le système canonique et le système jacobien contiennent la courbe double. Si donc on la suppose ne plus exister, elle doit faire partie du système jacobien. Ceci nous suggère la définition suivante; j'appellerai système jacobien  $|K_j|$  de  $|K|$  le système somme du système jacobien des courbes dans le plan  $|\bar{K}_j|$  et de la courbe des couples neutres.

$$|K_j| = |\bar{K}_j + \Gamma_1|.$$

Considérons alors les systèmes  $|K|$  et  $|L|$ , j'obtiens

$$|(K + L)_j| = |(\bar{K} + \bar{L})_j + \Gamma_1| = |\bar{K}_j + 3L + \Gamma_1| = |\bar{L}_j + 3K + \Gamma_1|$$

d'où

$$|K_j + 3L| = |L_j + 3K|$$

$$|K_j - 3K| = |L_j - 3K|.$$

Le système ainsi introduit sera le système canonique. Nous allons évaluer son degré  $p^{(2)}$  et son genre  $p^{(1)}$ .

Supposons  $\Gamma_1$  d'ordre  $m$  et de multiplicités  $s_i$ , les courbes canoniques seront d'après leur définition d'ordre,

$$3n - 3 + m - 3n = m - 3$$

passant aux points-bases avec les multiplicités,

$$3r_i - 1 + s_i - 3r_i = s_i - 1.$$

*Théorème. I.* Le système canonique est formé des adjointes d'ordre  $(m - 3)$  à  $\Gamma_1$ , les adjointes étant assujetties à ne passer qu'aux points multiples de  $\Gamma_1$ , bases pour le système et à découper sur  $\Gamma_1$  des couples de la  $\gamma_2^1$ .

II. Le genre géométrique  $p_g$ , nombre des courbes canoniques linéairement indépendantes est le nombre de ces courbes adjointes linéairement indépendantes.

On aura alors:

$$p^{(2)} = (m - 3)^2 - \sum_1^{\sigma} (s_i - 1)^2$$

$p^{(1)} = \bar{p} + \alpha$ , où  $\bar{p}$  est le genre dans le plan des courbes et  $\alpha$  le nombre de points d'intersection d'une de ces courbes et de  $\Gamma_1$ ,

$$\bar{p} = \frac{(m - 4)(m - 5)}{2} - \sum_i^{\sigma} \frac{(s_i - 1)(s_i - 2)}{2}$$

$$\alpha = \frac{m(m - 3)}{2} - \sum_1^{\sigma} \frac{s_i(s_i - 1)}{2}$$

$$p^{(1)} = \bar{p} + \alpha = (m-3)^2 - \sum_1^{\sigma} (s_i - 1)^2 + 1 = p^{(2)} + 1$$

$$p^{(2)} = p^{(1)} - 1.$$

On peut encore considérer des systèmes pluricanoniques, multiples du système canonique. Par exemple le système bicanonique sera fourni par les courbes d'ordre  $(2m-6)$  passant  $2(s_i-1)$  fois aux points-bases et découpant sur  $\Gamma_1$ , les couples de la  $\gamma_2^1$ . Leur nombre sera le bigéner.

Supposons qu'il existe une décomposition de  $\Gamma$  en  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , telle que  $\Gamma_1$  soit une courbe rationnelle non transformable en une droite, on pourra obtenir des surfaces de genre  $p_g = 0$  et  $P = 0$ . Le problème de construire de telles surfaces se trouve ramené à la déformation continue d'une courbe gauche en deux autres, dont l'une soit rationnelle.

La définition du système adjoint  $|K'|$  au système  $|K|$

$$|K'| = |K_f - 2K|$$

permettrait de retrouver la propriété des courbes du système adjoint de découper sur une  $K$  générique des groupes de la série canonique. On peut encore montrer que si  $b \geq N-4$ , les systèmes adjoints aux systèmes  $|bC|$  multiples du système triplement infini dont nous sommes partis forment un système complet. Donc si  $\Gamma_1$  est virtuellement inexistante, on peut obtenir le système complet adjoint à  $|bC|$  en prenant le système  $|(b+N-4)C|$  et en lui imposant de contenir  $\Gamma_2$ .

Cherchons à calculer le nombre des adjointes. Nous obtenons ainsi un nombre  $p_a \leq p_g$ . Nous avons,

$$p_a = \frac{m(m-3)}{2} - \sum_1^{\sigma} \frac{s_i(s_i-1)}{2} - \frac{m(m-3)}{2} + \\ + \sum_1^{\sigma} \frac{s_i(s_i-1)}{2} + p_1 + t_1 - p'_1$$

$$p_a = p_1 + t_1 - p'_1 = P + t - P' - p_2 - t_2 + p'_2 - i$$

( $2i$  étant le nombre des intersections de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ )

$$2i = [n(N-4) + 3 - m]m - \sum_1^{\sigma} s_i[r_i(N-4) + 1 - s_i] \\ p_2 + t_2 = \frac{[n(N-4) + 3 - m][n(N-4) - m]}{2} - \\ - \sum_1^{\sigma} \frac{[r_i(N-4) + 1 - s_i][r_i(N-4) - s_i]}{2} - 2t_2 + 1$$

$$p_2 + t_2 + i = \frac{n(N-4)[n(N-4) + 3 - n]}{2} - (N-4) \sum_1^{\sigma} \frac{r_i[r_i(N-4) + 1 - s_i]}{2} - 2t_2 + 1.$$

Mais sur la surface le degré de  $\Gamma_2$  est  $v = \frac{n[n(N-4) + 3 - m]}{2}$ , et

$$P + t + P' = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}$$

$$\text{d'où } p_a = \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6} - v(N-4) + 2t + p'_2 - 1$$

qui est la formule connue du genre arithmétique.

Si alors on cherche à évaluer la dimension d'un système de courbes, on est amené, par des raisonnements analogues au cas ordinaire, au théorème de Riemann-Roch pour les surfaces <sup>(1)</sup>.

Nous avons considéré le cas d'une surface  $F$  qui devient rationnelle par l'adjonction d'une courbe double  $\Gamma$ ; la théorie développée envisage la surface  $F$  où l'on tient une partie  $\Gamma_x$  de  $\Gamma$  supposée décomposée, virtuellement inexistante. Il y a lieu de considérer aussi des surfaces  $F$  douées de courbe double  $\Gamma$  qui deviennent rationnelles par l'imposition d'un point multiple  $P$ , soit par exemple d'un point triple, on peut traiter le même problème sur  $F$  où le point multiple soit virtuellement inexistant.

La surface  $F$  douée de point triple sera alors représentable sur un plan et l'on supposera que l'image du point triple soit une cubique elliptique. Cette cubique sera fondamentale pour le système représentatif c'est à dire qu'elle n'a pas d'intersections variables avec les images des sections planes, de plus les sections planes contenant le point triple doivent y posséder trois tangentes, d'où

$$\begin{aligned} 3n &= \sum_1^{\sigma} r_i \\ 3(n-3) - \sum_1^{\sigma} r_i - \sigma &= 0 \\ \sigma &= 12. \end{aligned}$$

C'est cette courbe fondamentale que l'on devra ajouter au système représentatif des sections planes ou à un de ses multiples pour en construire l'adjoint.

(1) Cfr. ENRIQUES-CAMPEDELLI, *Lezioni sulla teoria delle superficie algebriche*. Cedam, Padova, 1932.



La F où le point triple est supposé virtuellement inexistant, apparaît alors comme une surface régulière de genres 1, à courbe canonique d'ordre zero.

La recherche de ces surfaces F dépend de la construction des surfaces à sections canoniques de genre  $p$ , d'ordre  $2p - 2$  dotées d'un point triple.

La dimension du système représentatif est  $p$ .

La résolution arithmétique du système d'équations indéterminées,

$$\begin{aligned} 3n - \sum_1^{12} r_i &= 0 \\ r_i + r_j + r_k &\leq n \\ n^2 - \sum_1^{12} r_i^2 &= N \end{aligned}$$

nous montre que « de telles surfaces existent en nombre fini, pour toutes les valeurs de  $p$  ».

En effet on peut établir l'inégalité,

$$N + 12 \geq 2n$$

qui montre que l'on a un nombre fini de solutions; pour établir leur existence j'ai construit les types suivants, .

$$N = 6\beta - 4 \left\{ \begin{array}{l} \beta = 2\alpha - 1, n = 3\alpha + 2, r_1 = r_2 = \dots = r_9 = \alpha, \\ r_{10} = 3, r_{11} = 2, r_{12} = 1 \\ \beta = 2\alpha, n = 3\alpha + 4, r_1 = \dots = r_6 = \alpha + 1, r_7 = r_8 = \\ = r_9 = \alpha, r_{10} = 3, r_{11} = 2, r_{12} = 1 \end{array} \right.$$

$$N = 6\beta - 2, \beta = \alpha, n = 3\alpha + 1, r_1 = r_2 = \dots = r_9 = \alpha, r_{10} = r_{11} = \\ = r_{12} = 1$$

$$N = 6\beta, \beta = \alpha, n = 3\alpha + 3, r_1 = \dots = r_6 = \alpha + 1, r_7 = r_8 = \\ = r_9 = \alpha, r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1.$$

Ce nombre croît d'ailleurs rapidement, j'ai déterminé le nombre des solutions pour les premières valeurs de N.

N	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
	1	1	1	3	4	3	6	7	7	10	12	16	16	20

Remarquons que les formules de Caporali généralisées au cas d'un système triplement infini, avec cubique fondamentale, nous donnent pour genre de la courbe double d'ordre  $\frac{N(N-4)}{2}$ ,

$$P' = \frac{(N-4)(2N-9)}{2} + 1$$

et pour nombre des points triples,

$$t = \frac{(N-2)(N-4)(N-6)}{6}.$$

Ces surfaces rationnelles ont donc des courbes doubles ayant les mêmes caractères.

A ces surfaces virtuellement de genres 1, correspondt-il des surfaces effectivement de genres 1? c'est à dire peut-on toujours considérer une surface rationnelle avec un point triple, comme une particularisation d'une surface plus générale sans point triple?

Ce problème, sur lequel je pense bientôt revenir, mérite d'être approfondi. Il donnerait, en particulier, une nouvelle démonstration de l'existence des surfaces de genres 1 pour  $p$  quelconque, dans le cas où la réponse serait affirmative <sup>(1)</sup>. Il resterait encore à distinguer si les nombreuses familles rationnelles obtenues proviennent ou non, d'une seule famille de surfaces de genres 1.

**Matematica.** — *Sur un théorème de M. Mauro Picone.*  
Nota di M. GHERMANESCU, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

1. Considérons une fonction du point  $M$ ,  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$  d'un espace quelconque et telle qu'elle admette une *moyenne* sur toute hypersphère contenue dans  $D$ .

En désignant par  $\mu_0(u, M, \rho)$  la moyenne périphérique de la fonction  $u$ , prise sur l'hypersphère de centre  $M$  et de rayon  $\rho$ , contenue dans  $D$ , M. Mauro Picone a démontré le théorème suivant <sup>(3)</sup>:

Si la fonction  $u$  est polyharmonique d'ordre  $p$  dans  $D$ , on a, en tout point  $M$  de  $D$ , la relation

$$(1) \quad u(M) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \binom{p}{k} \mu_0(u, M, \rho \delta k).$$

La reciproque de cette proposition, ainsi qu'une nouvelle démonstration, ont été données par M. M. Nicolesco <sup>(4)</sup>.

(1) F. ENRIQUES, *Le superficie di genere 1*. «R. C. R. Accad. di Bologna», 1908; F. SEVERI, *Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero*. «Atti del R. Istituto Veneto», vol. LXVIII, 2<sup>a</sup> parte, 1909.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) «Bull. Math. de la Soc. roumaine des Siences», to. 33 (2), 1936, pp. 105-112.

(4) «Ibidem», pp. 113-116.

Nous allons montrer que le théorème de M. Mauro Picone, ainsi que sa réciproque, sont des cas très particuliers des propositions assez générales, que nous établirons dans ce qui suit.

Remarquons, à cet effet, que le deuxième membre de la relation (1) est une combinaison linéaire et omogène des moyennes de la fonction  $u$ , prises sur  $p$  hypersphères concentriques en  $M$  et dont les rayons dépendent d'une manière univoque du rayon initial  $\rho$ , combinaison qui, vu le premier membre, est indépendante de  $\rho$ .

Remarquons encore que, puisque  $\mu_0(u, M, \rho)$  se réduit à  $\mu_0(u, M, 0) = u(M)$  pour  $\rho = 0^{(1)}$ , (1) est une combinaison linéaire et homogène, à coefficients constants, entre les moyennes de la fonction  $u(M)$ , prises sur  $p + 1$  hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $0, \rho \sqrt{k}$ .

Ces deux remarques nous ont conduit aux propositions très générales qui suivent.

2. THÉORÈME I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$ , soit  $p$ -harmonique dans ce domaine, est que les moyennes de la fonction  $u(M)$ , prises sur les hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $\rho_i = a_i \rho$ , contenues dans  $D$ , soient linéairement indépendantes  $p$  à  $p$ .*

Dans cet énoncé, les  $a_i$  désignent des constantes non-négatives différentes, rangées, si l'on veut, dans l'ordre croissant.

La condition est nécessaire parce que, si  $u(M)$  est  $p$ -harmonique dans  $D$ ,  $\mu_0(u, M, \rho)^{(2)}$  est un polynome du  $(p - 1)^e$  degré en  $\rho^2$  et il faut  $p + 1$  relations pour éliminer  $\rho$ .

Elle est aussi suffisante, parce que de la relation

$$(2) \quad \sum_{i=1}^{p+1} A_i \mu_0(u, M, a_i \rho) = 0 \quad , \quad A_i = \text{const.}$$

on déduit en premier lieu que  $u(M)$  admet des dérivées de tous les ordres, régulières (loc. cit., 3) pour  $\rho = 0$ . Ensuite (2) est une équation fonctionnelle linéaire et homogène en  $F(\rho) = \mu_0(u, M, \rho)$ , dont la seule solution, régulière ainsi que ses dérivées par rapport à  $\rho$  pour  $\rho = 0$ , est un polynome du  $(p - 1)^e$  degré en  $\rho^2$ , ce qui caractérise les fonctions  $p$ -harmoniques.

3. Prenons en particulier  $a_{p+1} = 0$ ,  $\mu_0(u, M, a_{p+1} \rho)$  se réduit à  $u(M)$  et la relation (2) prend la forme

$$(3) \quad u(M) = \sum_{i=1}^p A_i \mu_0(u, M, a_i \rho),$$

ce qui conduit à proposition suivante:

(1) « Bull. Soc. Math. de France », to. 62, 1934, pp. 245 264.

(2) « Matematica », to. VIII, p. 134. Voir aussi loc. cit., 3.

THÉOREME II. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$ , soit  $p$ -harmonique dans  $D$ , est qu'il existe une combinaison linéaire et homogène, à coefficients constants, entre  $p$  moyennes linéairement indépendantes de la fonction  $u(M)$ , prises sur les hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $\rho_i = a_i \rho$ , situées dans  $D$ , égale à  $u(M)$  dans  $D$ .

La proposition peut encore être étendue, en remplaçant  $u(M)$  par un laplacien  $\Delta^k u(M)$ , où  $k < p$ .

En nous limitant au cas particulier énoncé, il comprend le théorème de M. Picone et son réciproque. On voit ainsi que la relation de M. Picone est assez particulière, la fonction  $p$ -harmonique  $u(M)$  pouvant d'une infinité de manières être exprimée par une relation telle que (3). On voit encore, ce qui ne ressort pas explicitement de l'énoncé de M. Picone, mais qui y est cependant satisfait, qu'il est nécessaire que les  $p$  moyennes  $\mu_0(u, M, \rho_i)$  soient linéairement indépendantes.

4. THÉOREME III. — La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$ , soit polyharmonique d'ordre  $r + p$  au plus, dans  $D$ , est qu'il existe une combinaison linéaire et homogène, à coefficients constants, entre  $p$  moyennes linéairement indépendantes de la fonction  $u(M)$ , prises sur  $p$  hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $\rho_i = a_i \rho$ , qui se réduise à un polynome de degré  $r$  en  $\rho^2$ ,

$$(4) \quad \sum_{i=1}^p A_i \mu_0(u, M, a_i \rho) = \sum_{k=0}^r b_k \rho^{2k}.$$

La relation (4) est une équation fonctionnelle, dont  $\mu_0(u, M, \rho) = F(\rho)$  est la solution, régulière ainsi que ses dérivées par rapport à  $\rho$  pour  $\rho = 0$ . On démontre que cette solution est un polynome en  $\rho^2$ , du  $(r + m)^c$  degré au plus,  $m$  étant le plus petit entier positif, moindre que  $p$ , tel que

$$(5) \quad \sum_{i=1}^p A_i a_i^{2(m+r)} = 0.$$

Pour  $r = 0$ , on retrouve le théorème II.

Les coefficients  $b_k$  ne sont pas arbitraires. En posant

$$(6) \quad \mu_0(u, M, \rho) = \sum_{i=0}^{r+m} c_i \rho^{2i},$$

on a, d'après (4),

$$(7) \quad \sum_{i=1}^p A_i a_i^{2k} = b_k.$$

D'autre part, j'ai démontré (loc. cit., 3) que la moyenne  $\mu_0(u, M, \rho)$  est la solution régulière de l'équation aux dérivées partielles

$$(8) \quad \Delta \mu_0 = \frac{\partial^2 \mu_0}{\partial \rho^2} + \frac{s-1}{\rho} \frac{\partial \mu_0}{\partial \rho},$$

se réduisant à  $u(M)$  pour  $\rho = 0$ ,  $s$  étant le nombre de dimensions de l'espace qui comprend  $D$ . On a donc  $c_0 = u(M)$  et de (8) on déduit pour les autres coefficients  $c_i$

$$(9) \quad \Delta c_i = (2i+2)(2i+s)c_{i+1},$$

qui, avec (7), précisent les  $b_k$ .

5. Désignons par  $\mu_1(u, M, \rho)$  la moyenne spatiale de la fonction  $u(M)$ , prise dans l'intérieur de l'hypersphère de centre  $M$  et de rayon  $\rho$ . J'ai démontré (loc. cit., 3) aussi la relation

$$(10) \quad \Delta \mu_1 = \frac{s}{\rho} \frac{\partial \mu_0}{\partial \rho}.$$

En dérivant (3) par rapport à  $\rho$  et compte tenu de (10), on obtient

THÉORÈME IV. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$ , soit  $p$ -harmonique dans ce domaine, est qu'il existe une combinaison linéaire et homogène, à coefficients constants, entre  $p$  moyennes spatiales, linéairement indépendantes, de la fonction  $u(M)$ , prises à l'intérieur de  $p$  hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $\rho_i = a_i \rho$ , intérieures à  $D$ , qui soit harmonique dans  $D$ .*

Cette proposition peut encore être étendue dans l'ordre d'idées local, en y remplaçant les derniers mots par « polyharmonique d'ordre moindre que  $p$  dans  $D$  ».

6. Rappelons que nous avons défini encore (loc. cit., 3) les moyennes successives  $\mu_i(u, M, \rho)$  de la fonction  $u(M)$ , par la relation

$$(11) \quad \mu_i(u, M, \rho) = \frac{s-2i+2}{\rho^{s+2i-2}} \int_0^\rho \rho^{s+2i-3} \mu_{i-1}(u, M, \rho) d\rho,$$

qui satisfont aussi à la relation, généralisation de (10),

$$(12) \quad \Delta \mu_i = \frac{s+2i-2}{\rho} \frac{\partial \mu_{i-1}}{\partial \rho}.$$

En dérivant  $r+1$  fois la relation (4) par rapport à  $\rho$ , on obtient, compte tenu de (12),

THÉORÈME V. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction  $u(M)$ , définie dans un domaine  $D$ , soit polyharmonique d'ordre  $r+p$  au plus dans ce domaine, est qu'il existe une combinaison linéaire et homogène, à coeffi-*



cients constants, entre  $p$  moyennes linéairement indépendantes de la fonction  $u(M)$ , d'ordre  $r + 1$ , relativement aux hypersphères de centre  $M$  et de rayons  $\rho_i = a_i \rho$ , contenues dans  $D$ , qui soit polyharmonique d'ordre  $r + s$  dans  $D$ .

On peut étendre encore cette proposition, soit en diminuant l'ordre des moyennes  $\mu_i$ , soit en augmentant l'ordre de polyharmonicité de la combinaison des moyennes jusqu'à  $r + p - 1$  au plus.

On obtient des propositions encore plus générales et qui embrassent même des fonctions plus générales que les polyharmoniques, en remplaçant les constantes  $A_i, a_i$  par des polynômes en  $\rho$  ou même par des fonctions convenablement choisies, ce que je ferai dans une autre Note.

Les détails des démonstrations paraîtront ailleurs dans un travail plus étendu.

**Matematica.** — *Su di una condizione perchè una funzione analitica periodica si riduca ad un polinomio trigonometrico.*  
Nota di F. GIACCARDI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

TEOREMA. — *Se data una funzione analitica  $g(z)$ , periodica a periodo  $2\omega$ , reale, olomorfa in un campo comprendente l'asse reale, si possono trovare due numeri positivi  $M$  ed  $\alpha$ , tali che per  $z$  reale sussista la disegualianza*

$$\left| \frac{d^r g(z)}{dz^r} \right| < M \alpha^r \quad (r = 1, 2, \dots),$$

*allora la  $g(z)$ , si riduce ad un polinomio trigonometrico di ordine  $n$ ,*

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^n \left( a_s \cos s \frac{\pi}{\omega} z + b_s \sin s \frac{\pi}{\omega} z \right),$$

*con  $n$  eguale al minimo intero soddisfacente la condizione*

$$n > \frac{\alpha \omega}{\pi} - 1,$$

*e viceversa.*

*Dimostrazione.* — Se  $g(z)$  è limitata, periodica ed analitica sull'asse reale delle  $z$ , sarà certo

$$(1) \quad g(z) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \left( a_s \cos s \frac{\pi}{\omega} z + b_s \sin s \frac{\pi}{\omega} z \right)$$

ed essendo la sua derivata *resima* pure limitata è periodica ed analitica, sarà la (1) derivabile termine a termine  $r$  volte <sup>(2)</sup>.

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Cfr. L. TONELLI, *Serie Trigonometriche*, cap. VI, § 3, p. 349.

Avremo dunque

$$(2) \quad \frac{d^r g(\zeta)}{d\zeta^r} = \begin{cases} \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \left(a_s \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta + b_s \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta\right), & [r \equiv 0, (\text{mod } 4)] \\ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \left(-a_s \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta + b_s \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta\right); & [r \equiv 1, \quad \text{»} \quad ] \\ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \left(-a_s \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta - b_s \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta\right); & [r \equiv 2, \quad \text{»} \quad ] \\ \sum_{s=1}^{\infty} \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \left(a_s \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta - b_s \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta\right); & [r \equiv 3, \quad \text{»} \quad ] . \end{cases}$$

Risulta che, a parte i segni, i coefficienti di un termine dello sviluppo (2) della derivata *resima* saranno dati da

$$\left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r a_s \quad ; \quad \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r b_s ;$$

ma essi sono pure espressi, rispettivamente, dalle formule di Fourier e cioè

$$\left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r a_s = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \frac{d^r g(\zeta)}{d\zeta^r} \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta d\zeta ,$$

$$\left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r b_s = \frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \frac{d^r g(\zeta)}{d\zeta^r} \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta d\zeta ,$$

ed essendo per ipotesi

$$\left| \frac{d^r g(\zeta)}{d\zeta^r} \right| < M\alpha^r ,$$

ed in quanto  $\left| \sin s \frac{\pi}{\omega} \zeta \right|$  e  $\left| \cos s \frac{\pi}{\omega} \zeta \right|$  risultano entrambi minori od al più eguali ad uno, i coefficienti saranno minori di

$$\frac{1}{\omega} \int_0^{2\omega} \left| \frac{d^r g(\zeta)}{d\zeta^r} \right| d\zeta = 2 M\alpha^r .$$

Si avrà perciò

$$\left| a_s \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \right| < 2 M\alpha^r \quad ; \quad \left| b_s \left(\frac{s\pi}{\omega}\right)^r \right| < 2 M\alpha^r$$

e poichè  $s$ ,  $\pi$  ed  $\omega$  sono positivi, risulta

$$(3) \quad |a_s| < 2 M \left(\frac{\alpha\omega}{s\pi}\right)^r \quad ; \quad |b_s| < 2 M \left(\frac{\alpha\omega}{s\pi}\right)^r ,$$

qualunque sia  $r$ .

Determinando quindi il più piccolo intero  $n$  tale che

$$(4) \quad \frac{\alpha\omega}{\pi(n+1)} < 1 \quad \text{ovvero} \quad n > \frac{\alpha\omega}{\pi} - 1,$$

per ogni intero  $s > n$ , si ha

$$\frac{\alpha\omega}{s\pi} < 1.$$

Ma allora dovendo  $|a_s|$  e  $|b_s|$  per le (3) essere minori di  $2M \left( \frac{\alpha\omega}{s\pi} \right)^r$  per qualsivoglia  $r$ , si potrà, prefissato un  $\varepsilon$  comunque piccolo, determinare un  $r$  tale che  $|a_s|$  e  $|b_s|$  siano minori di  $\varepsilon$ , sia cioè in definitiva, non dipendendo  $a_s$  e  $b_s$  da  $r$ ,

$$a_s = 0, \quad b_s = 0 \quad (\text{per } s > n)$$

il che dimostra il teorema nella sua prima parte.

In particolare poi, se la  $g(\chi)$  ha periodo  $2\pi$  e si mantiene limitata con tutte le sue derivate sull'asse reale, allora deve essere

$$\alpha = 1, \quad \omega = \pi;$$

ne segue perciò,  $n = 1$  e quindi

$$(5) \quad g(\chi) = a_0 + a_1 \cos \chi + b_1 \sin \chi.$$

Inversamente poi, se è

$$g(\chi) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{s=1}^n \left( a_s \cos s \frac{\pi}{\omega} \chi + b_s \sin s \frac{\pi}{\omega} \chi \right),$$

posto  $M = \frac{1}{2} |a_0| + \sum_{s=1}^n [|a_s| + |b_s|]$ , è ovvio che (per un esame della (2))

la  $\frac{d^r g(\chi)}{d\chi^r}$  è in modulo minore di

$$\left( \frac{n\pi}{\omega} \right)^r \cdot M$$

qualunque sia  $r$ .

**Matematica.** — *Une nouvelle démonstration de l'équivalence de deux systèmes de Dirac.* Nota di RUY LUIS GOMES, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Soient

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$$

quatre matrices de Dirac, c'est à dire, quatre matrices de quatrième ordre vérifiant les relations fondamentales

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij}.$$

On a le théorème bien connu:

*Étant donnés deux systèmes de Dirac  $\gamma_i$  et  $\gamma'_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) il est toujours possible de construire une matrice non dégénérée  $S$  telle que*

$$\gamma'_i = S^{-1} \gamma_i S.$$

De ce théorème, bien important, comme l'on sait, pour la Physique nouvelle, il y a plusieurs démonstrations, mais pas une seule, à ma connaissance, qui soit basée sur les propriétés des valeurs et vecteurs fondamentales d'un système de Dirac quelconque. Or, dans l'idée qu'il soit ainsi, je vais en donner une ici.

1. Puisque, en particulier,

$$\gamma_i^2 = \mathbf{I},$$

il s'ensuit que  $+1$ ,  $-1$  sont les seules valeurs propres possibles de chacune des matrices de Dirac  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ .

Mais si l'on admet, par ex., que  $+1$  est une valeur propre de  $\gamma_i$  (un  $i$  déterminé), c'est à dire, qu'il existe un vecteur  $X \neq 0$  tel que

$$\gamma_i X = X,$$

on en déduit immédiatement

$$(I) \quad \gamma_i (\gamma_j X) = -\gamma_j (\gamma_i X) = -\gamma_j X; \quad j \neq i.$$

Et le vecteur  $\gamma_j X$  étant différent de zéro en même temps que  $X$  (vu que  $\gamma_j$  est non-dégénérée), l'équation (I) signifie tout simplement que  $-1$  est aussi une valeur propre de  $\gamma_i$ .

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

Chacune des matrices

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$$

a donc les deux valeurs propres

$$+1, -1.$$

En outre,  $X$  étant un vecteur propre de  $\gamma_i$  pour  $\pm 1$ ,  $\gamma_j X$  ( $j \neq i$ ) le sera aussi pour  $\mp 1$ .

2.  $+1$  et  $-1$  ce sont des valeurs propres du degré 2 de multiplicité. En effet, les matrices  $\gamma_i$  vérifient l'équation

$$\lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0,$$

dont le premier membre coïncide avec le produit des binômes correspondants à leurs valeurs propres différentes  $+1, -1$ .

Les matrices  $\gamma_i$  ont donc une base de vecteurs propres et peuvent en conséquence être réduites à une forme canonique (diagonale).

Comme base fondamentale prenons, par ex.,

$$e_1 = X_1, e_2 = X_2; e_3 = \gamma_2 X_1; e_4 = \gamma_2 X_2,$$

$X_1, X_2$  étant deux vecteurs propres indépendants de  $\gamma_1$  par rapport à  $+1$ .

Dans cette base on a évidemment

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \gamma_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -b_{11} & -b_{21} \\ 0 & 0 & -b_{12} & -b_{22} \\ b_{11} & b_{21} & 0 & 0 \\ b_{12} & b_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma_4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -c_{11} & -c_{21} \\ 0 & 0 & -c_{12} & -c_{22} \\ c_{11} & c_{21} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -C \\ C & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right.$$



vu que

$$\begin{cases} \gamma_1 e_1 = e_1 ; \gamma_1 e_2 = e_2 ; \gamma_1 e_3 = -e_3 ; \gamma_1 e_4 = -e_4 \\ \gamma_2 e_1 = e_3 ; \gamma_2 e_2 = e_4 ; \gamma_2 e_3 = \gamma_2^2 e_1 = e_1 ; \gamma_2 e_4 = \gamma_2^2 e_2 = e_2 ; \\ \gamma_3 e_1 = b_{11} e_3 + b_{12} e_4 \\ \gamma_3 e_2 = b_{21} e_3 + b_{22} e_4 ; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \gamma_3 e_3 = \gamma_3 \gamma_2 e_1 = -\gamma_2 (\gamma_3 e_1) = -b_{11} \gamma_2 e_3 - b_{12} \gamma_2 e_4 = -b_{11} e_1 - b_{12} e_2 \\ \gamma_3 e_4 = -b_{21} e_1 - b_{22} e_2 ; \\ \gamma_4 e_1 = c_{11} e_3 + c_{12} e_4 \\ \gamma_4 e_2 = c_{21} e_3 + c_{22} e_4 ; \\ \gamma_4 e_3 = -c_{11} e_1 - c_{12} e_2 \\ \gamma_4 e_4 = -c_{21} e_1 - c_{22} e_2 , \end{cases}$$

et ayant égard à la signification géométrique des éléments de chaque colonne d'une matrice<sup>(1)</sup>. Et les relations fondamentales

$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 2 \delta_{ij}$$

se conservant valables pour ces matrices, vu qu'une transformation de base ou de coordonnées se traduit par

$$\gamma_i \rightarrow T^{-1} \gamma_i T ,$$

il s'ensuit que B, C — deux matrices de deuxième ordre — doivent vérifier les équations

$$\begin{aligned} B^2 = -I \quad , \quad C^2 = -I \\ BC + CB = 0. \end{aligned}$$

En faisant<sup>1</sup>

$$B_I = iB \quad ; \quad C_I = iC$$

on aura en

$$B_I \quad , \quad C_I$$

deux nouvelles matrices de Dirac:

$$\begin{aligned} B_I^2 = C_I^2 = I \\ B_I C_I + C_I B_I = 0. \end{aligned}$$

(1) Voir par exemple GASTON JULIA, *Introduction mathématique aux théories quantiques*.

Donc,

$$\gamma_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{vmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{vmatrix}; \quad \gamma_3 = i \begin{vmatrix} \mathbf{O} & -\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_1 & \mathbf{O} \end{vmatrix}; \quad \gamma_4 = i \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{C}_1 \\ -\mathbf{C}_1 & \mathbf{O} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1^2 = \mathbf{C}_1^2 = \mathbf{I} \quad ; \quad \mathbf{B}_1 \mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_1 \mathbf{B}_1 = \mathbf{O},$$

la base étant  $e_1, e_2, e_3, e_4$ .

Mais en procédant avec  $\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1$  comme nous avons procédé antérieurement avec  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ , nous arriverons à une matrice non dégénérée, de deuxième ordre,  $\mathbf{S}_1$ , telle que

$$\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{S}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{S}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{vmatrix}$$

Et en transformant le système (II) par intermède de la matrice

$$\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{S}_1 \end{vmatrix}; \quad \det \mathbf{S} = \det^2 \mathbf{S}_1 \neq 0,$$

on arrivera finalement au système

$$(III) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_1 \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{vmatrix} \\ \gamma_2 \rightarrow \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{vmatrix} \\ \gamma_3 \rightarrow i \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{O} \end{vmatrix} \\ \gamma_4 \rightarrow i \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{N} \\ -\mathbf{N} & \mathbf{O} \end{vmatrix} \end{array} \right.$$

avec

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & -\mathbf{I} \end{vmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{vmatrix}.$$

Ce système qui est d'une remarquable simplicité à en outre la particularité d'être constitué par matrices d'Hermite.

En résumé, un système quelconque de Dirac est toujours reducible à la forme hermitienne (III), moyennant une convenable transformation de coordonnées  $\mathbf{S}(\gamma_i)$  pour  $\gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ).

Si nous avons deux systèmes de Dirac :

$$\gamma_i \quad , \quad \gamma'_i,$$

nous pouvons donc écrire

$$S^{-1}(\gamma_i) \gamma_i S(\gamma_i) = S^{-1}(\gamma'_i) \gamma'_i S(\gamma'_i)$$

d'où

$$\gamma'_i = T^{-1} \gamma_i T,$$

avec

$$T = S(\gamma') S^{-1}(\gamma).$$

Le théorème est donc démontré.

**Matematica.** — *Un lemma notevole per i problemi di Mayer e una sua applicazione* <sup>(1)</sup>. Nota di B. MANIÀ, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. TONELLI.

I. Per risolvere la questione di esistenza dell'estremo assoluto nel problema di navigazione di Zermelo <sup>(3)</sup> io ho stabilito il seguente teorema generale in cui rientra il detto problema.

Se il campo  $D$  è limitato, chiuso, convesso; se il problema di Mayer considerato è definito regolare positivo; se  $K$  è la totalità delle curve continue e rettificabili  $C$  del campo  $D$  congiungenti due punti fissi e per le quali esiste il funzionale  $u_C(L)$  definito dall'equazione

$$(I) \quad u_C(s) = u_0 + \int_0^s F(x, y, x', y', u_C) ds \quad (0 \leq s \leq L);$$

allora, supposto che la classe  $K$  non sia vuota, in  $K$  esiste il minimo assoluto di  $u_C(L)$ .

La dimostrazione di questo teorema è fondata sopra un lemma che anche per sè presenta un certo interesse e di cui ricordiamo l'enunciato.

Se il campo  $D$  è limitato e chiuso e se il problema di Mayer relativo all'equazione (I) è regolare definito positivo; fissato un qualunque intervallo  $(u_1, u_2)$  finito e un numero  $\delta > 0$ , si può determinare un numero  $\lambda > 0$  tale che, comunque si fissi  $u_0$  nell'intervallo  $(u_1, u_2)$ , per ogni segmento  $PQ$  del campo  $D$  di lunghezza  $l \leq \lambda$  esista il funzionale  $u_C(L)$  e, presa una qualunque curva continua e rettificabile di  $D$ , congiungente i punti  $P, Q$  e di lunghezza

(1) Lavoro eseguito nel Seminario Matematico della R. Scuola Normale Superiore di Pisa.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) *Sopra un problema di navigazione di Zermelo*. « Math. Ann. », Bd. 113 (1936), pp. 584-599, e, in particolare, pp. 587-592. Ved. anche la Nota con lo stesso titolo nei « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXIII (1936), pp. 292-295.

$\geq (1 + \delta)l$ , se per essa esiste il funzionale  $u_C(L)$ , il suo valore è più grande di quello corrispondente al segmento PQ.

Qui mi propongo di dimostrare che questo lemma può essere notevolmente esteso; e, precisamente, l'ipotesi che il problema di Mayer sia definito positivo, cioè che sia sempre  $F > 0$ , può essere sostituita dall'altra, molto più generale, che esista un differenziale esatto  $A(x, y)dx + B(x, y)dy$  per il quale sia sempre

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) = F(x, y, x', y', u) + A(x, y)x' + B(x, y)y' \geq 0,$$

e i valori di  $\theta$  per i quali è  $\bar{F}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u) = 0$  in qualche punto  $(x, y, u)$  dell'insieme di definizione di  $F$  appartengano tutti a un arco di lunghezza  $< \pi$ ; l'ipotesi che il problema di Mayer sia regolare può essere sostituita dall'altra che sia quasi regolare normale; infine, in luogo dei segmenti PQ si possono considerare degli archi di curva continua e rettificabile qualunque sui quali l'angolo di direzione della tangente (dove esiste) abbia un'oscillazione sufficientemente piccola.

Il lemma così esteso si presta a varie importanti applicazioni. In particolare, si possono stabilire delle condizioni sufficienti per la semicontinuità del funzionale  $u_C(\cdot)$ , definito dalla (1) da cui seguono dei teoremi di esistenza dell'estremo assoluto per i problemi di Mayer nella forma parametrica, aventi la stessa generalità degli analoghi teoremi per i problemi liberi del calcolo delle variazioni. La dimostrazione non differisce essenzialmente da quella del teorema di esistenza ricordato sopra, e che è il caso più semplice ma particolarmente importante perchè in esso rientra il problema di navigazione di Zermelo. Però noi non ci occuperemo di queste applicazioni del lemma in questione<sup>(1)</sup>. Applicheremo invece questo lemma ad ottenere delle condizioni sufficienti per l'esistenza e la continuità della tangente sopra le curve estremanti nei punti che queste hanno eventualmente in comune con la frontiera del campo in cui il problema di Mayer è studiato.

2. Indicato l'oggetto di questo lavoro precisiamo le notazioni e le ipotesi.

Sia  $F(x, y, x', y', u)$  una funzione finita e continua insieme con le sue derivate parziali del primo ordine rispetto a  $x', y', u$ , per  $(x, y)$  appartenente a un campo  $D$ ,  $u$  appartenente a un intervallo  $\Delta$ , finito o infinito,  $x'^2 + y'^2 > 0$ ; per  $k > 0$  sia sempre  $F(x, y, kx', ky', u) = kF(x, y, x', y', u)$ . Poniamo

$$\begin{aligned} E(x, y; \cos \theta, \sin \theta; \cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}; u) &= F(x, y, \cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}, u) - \\ &- \cos \tilde{\theta} F_{x'}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u) - \sin \tilde{\theta} F_{y'}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u). \end{aligned}$$

(1) Questi teoremi, insieme con altri relativi anche ai problemi di Lagrange, sia nella forma parametrica che nella forma ordinaria, saranno dimostrati in una Memoria già annunciata del mio maestro L. TONELLI. Ved. «Rend. Acc. Naz. Lincei». ser. 6<sup>a</sup>, vol. XXIV (1936), pp. 399-404.

Essendo  $u_0$  un valore fissato nell'intervallo  $\Delta$ , se

$$x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq L),$$

sono le equazioni parametriche in funzione della lunghezza dell'arco  $s$  di una curva continua e rettificabile  $C$  del campo  $D$ , l'equazione (1) corrispondente a questa curva ha nell'intervallo  $(0, L)$  al più una unica soluzione  $u_C(s)$  con  $u_C(s)$  sempre appartenente a  $\Delta$ . Se una tale soluzione esiste diciamo che  $C$  è una *curva ordinaria*.

Per rendere possibile nel seguito una maggiore brevità di linguaggio definiamo la *condizione  $\alpha$* : Se esiste un differenziale esatto (di una funzione continua in  $D$ , frontiera compresa)  $A(x, y) dx + B(x, y) dy$  tale che, posto

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) + A(x, y) x' + B(x, y) y',$$

sia sempre  $\bar{F}(x, y, x', y', u) \geq 0$  e, per ogni parte limitata  $D'$  di  $D$  e ogni parte limitata  $\Delta'$  di  $\Delta$ , esista un arco  $\omega$  di lunghezza  $< \pi$  contenente tutti i valori di  $\theta$  per i quali  $\bar{F}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u) = 0$  in qualche punto  $(x, y, u)$  con  $(x, y)$  in  $D'$  e  $u$  in  $\Delta'$ , diremo che  $F(x, y, x', y', u)$  soddisfa la *condizione  $\alpha$* .

3. Infine premettiamo al lemma da dimostrare due osservazioni preliminari.

OSSERVAZIONE I. — Se il campo  $D$  è limitato e chiuso; se  $F(x, y, x', y', u)$  soddisfa la *condizione  $\alpha$* ; ad ogni parte limitata  $\Delta'$  di  $\Delta$  si può far corrispondere un numero  $\nu > 0$  tale che, comunque sia fissato  $u_0$  in  $\Delta'$ , se  $C_0$  è una curva ordinaria di lunghezza  $L_0$  per la quale  $u_{C_0}(s)$  appartiene sempre a  $\Delta'$ , presa una qualunque curva ordinaria  $C$  avente gli stessi punti terminali e di lunghezza  $L > \nu L_0$ , si abbia  $u_C(L) > u_{C_0}(L_0)$ .

Considerata una qualunque curva ordinaria

$$C: \quad x = x(s) \quad , \quad y = y(s) \quad (0 \leq s \leq L)$$

si ha, per  $0 \leq s' \leq s'' \leq L$ ,

$$(2) \quad u_C(s'') - u_C(s') = \int_{s'}^{s''} F(x, y, x', y', u_C) ds \geq - \\ - \int_{s'}^{s''} \{ A(x, y) x' + B(x, y) y' \} ds,$$

e quindi, se  $u_C(L) \leq u_{C_0}(L_0)$ , per  $0 \leq s \leq L$  si ha

$$u_C(s) \leq u_{C_0}(L_0) + \int_0^s \{ A(x, y) x' + B(x, y) y' \} ds.$$

Dunque, essendo  $u_{C_0}(L_0)$  limitato, per dimostrare l'asserto basta considerare le curve ordinarie  $C$  sulle quali  $u_C(s)$  resta inferiore a un numero fisso.



D'altronde, per la (2), sopra ogni curva ordinaria è

$$u_C(s) \cong u_0 - \int_0^s \{ A(x, y) x' + B(x, y) y' \} ds,$$

e quindi  $u_C(s)$  è limitato inferiormente sopra le curve ordinarie. Esiste perciò un intervallo finito  $\bar{\Delta}$  tale che per dimostrare l'enunciato basta considerare le curve ordinarie  $C$  sulle quali  $u_C(s)$  appartiene sempre a  $\bar{\Delta}$ .

Indichiamo con  $\omega'$  un arco di lunghezza  $< \pi$  contenente nel suo interno l'arco  $\omega$  corrispondente ad  $F(x, y, x', y', u)$ ,  $D$  e  $\bar{\Delta}$  per la condizione  $\alpha$ ), e sia  $m$  il minimo di  $\bar{F}(x, y, \cos \theta, \sin \theta, u)$  per  $(x, y)$  appartenente a  $D$ ,  $u$  appartenente a  $\bar{\Delta}$ ,  $\theta$  non interno a  $\omega'$ , ed  $M$  sia il massimo di  $\bar{F}(x, y, x', y', u)$  per  $(x, y)$  appartenente a  $D$ ,  $u$  a  $\Delta'$ ,  $x'^2 + y'^2 = 1$ . Allora, la misura  $L'$  dell'insieme dei punti di  $C$  nei quali la direzione della tangente è esterna all'angolo  $\omega'$  soddisfa la disuguaglianza

$$(3) \quad L' \cong \frac{1}{2} \left\{ L \cos \frac{1}{2} \omega' - d \right\}^{(1)},$$

essendo  $d$  la distanza dei punti terminali di  $C$ , e perciò

$$\int_C \bar{F}(x, y, x', y', u_C) ds \cong \frac{1}{2} \left\{ v \cos \frac{1}{2} \omega' - 1 \right\} L_0 m.$$

D'altro canto

$$\int_{C_0} \bar{F}(x, y, x', y', u_{C_0}) ds \leq M L_0,$$

e perciò se è

$$v > \left\{ \frac{2M}{m} + 1 \right\} : \cos \frac{1}{2} \omega'$$

la condizione dell'enunciato è verificata.

OSSERVAZIONE II. — Se  $\delta$  è un numero positivo e se è

$$\cos \gamma > \frac{2 + \delta}{2(1 + \delta)} \quad , \quad 0 < \gamma < \pi,$$

considerata una qualunque curva continua e rettificabile  $C$  di lunghezza  $L$  i cui punti terminali abbiano una distanza  $d$ , e per cui sia  $L \cong (1 + \delta) d$ , se indichiamo con  $\mu L$  la misura  $L'$  dell'insieme dei punti di  $C$  nei quali la tangente a  $C$  forma con la corda (orientata) sottesa da  $C$  un angolo  $> \gamma$ , è

$$\mu \cong \frac{\delta}{4(1 + \delta)}.$$

(1) Vedi L. TONELLI, *Fondamenti di calcolo delle variazioni*, vol. II, pp. 17-19.

In questo caso vale una disuguaglianza analoga alla (3), e perciò

$$L' \geq \frac{1}{2} \{ L \cos \Upsilon - d \} \geq \frac{1}{2} \left\{ \cos \Upsilon - \frac{1}{1 + \delta} \right\} L \geq \frac{\delta}{4(1 + \delta)} L.$$

4. Possiamo dimostrare ora il nostro lemma.

LEMMA. — Il campo  $D$  sia limitato e chiuso; la funzione  $F(x, y, x', y', u)$  soddisfi la condizione  $\alpha$ ); per  $\theta \equiv \bar{\theta} \pmod{2\pi}$  sia sempre

$$E(x, y; \cos \theta, \sin \theta; \cos \bar{\theta}, \sin \bar{\theta}; u) > 0 \quad (1);$$

allora, fissato un intervallo  $(u_1, u_2)$  interno a  $\Delta$ , e fissato un numero  $\delta > 0$ , si possono determinare due numeri positivi  $\lambda$  e  $\tau$  tali che, comunque si scelga  $u_0$  in  $(u_1, u_2)$ , sopra ogni curva continua e rettificabile  $C_0$  del campo  $D$  di lunghezza  $L_0 \leq \lambda$  esista il funzionale  $u_{C_0}(s)$  definito dalla (1) con  $u_{C_0}(s)$  sempre appartenente a  $\Delta$ , e, se sopra  $C_0$  l'oscillazione dell'angolo di direzione della tangente è  $< \tau$ , per ogni curva ordinaria  $C$  di lunghezza  $L \geq (1 + \delta)L_0$  avente gli stessi punti terminali di  $C_0$ , sia  $u_C(L) > u_{C_0}(L_0)$ .

Fissiamo un intervallo finito  $(u'_1, u'_2)$  contenuto in  $\Delta$  e contenente nel suo interno l'intervallo  $(u_1, u_2)$ , e scegliamo poi un numero  $\bar{\lambda} > 0$  tale che sopra ogni curva  $C_0$  del campo  $D$  di lunghezza  $L_0 \leq \bar{\lambda}$  esista il funzionale  $u_{C_0}(s)$  con  $u_{C_0}(s)$  sempre appartenente ad  $(u'_1, u'_2)$ , comunque si fissi  $u_0$  in  $(u_1, u_2)$ . Ciò posto, siano

$$C_0: \quad x = x_0(s) \quad , \quad y = y_0(s), \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

$$C: \quad x = x(\sigma) \quad , \quad y = y(\sigma), \quad (0 \leq \sigma \leq L),$$

le equazioni parametriche in funzione della lunghezza dell'arco delle due curve indicate nell'enunciato. Per la prima osservazione del numero precedente, possiamo supporre che sia  $L \leq \nu L_0$ .

È poi

$$\begin{aligned} u_C(L) - u_{C_0}(L_0) &= \int_0^L F(x, y, x', y', u_C) d\sigma - \int_0^{L_0} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{C_0}) ds = \\ &= \int_0^L \{ F(x, y, x', y', u_C) - F(x, y, x', y', u_0) \} d\sigma - \\ &\quad - \int_0^{L_0} \{ F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{C_0}) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \} ds + \\ &\quad + \int_0^L F(x, y, x', y', u_0) d\sigma - \int_0^{L_0} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) ds. \end{aligned}$$

(1) Questa circostanza si esprime dicendo che il problema di Mayer considerato è quasi regolare positivo normale,

Fissato ad arbitrio un numero  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un numero positivo  $\lambda_1 \leq \bar{\lambda}$ , tale che, se è  $L_0 \leq \lambda_1$ , sia

$$\left| \int_0^L \{ F(x, y, x', y', u_C) - F(x, y, x', y', u_0) \} d\sigma \right| < \nu L_0 \varepsilon$$

$$\left| \int_0^{L_0} \{ F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_{C_0}) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \} ds \right| < L_0 \varepsilon.$$

Eseguendo il cambiamento di variabile

$$\sigma = \frac{L}{L_0} s,$$

si ha inoltre

$$\begin{aligned} & \int_0^L F(x, y, x', y', u_0) d\sigma - \int_0^{L_0} F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) ds = \\ &= \int_0^{L_0} \left\{ \frac{L}{L_0} F(x, y, x', y', u_0) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \right\} ds = \\ &= \frac{L}{L_0} \int_0^{L_0} \{ F(x, y, x', y', u_0) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \} ds + \\ &+ \int_0^{L_0} \left\{ \left( \frac{L}{L_0} x' - x'_0 \right) F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) + \left( \frac{L}{L_0} y' - y'_0 \right) F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \right\} ds + \\ &+ \frac{L}{L_0} \int_0^{L_0} E(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y', u_0) ds. \end{aligned}$$

A questo punto determiniamo due numeri positivi  $\lambda_2$  e  $\tau$  sufficientemente piccoli affinché, se è  $L_0 \leq \lambda_2$ , sia

$$\left| \int_0^{L_0} \{ F(x, y, x', y', u_0) - F(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \} ds \right| < \frac{L_0}{\nu} \varepsilon,$$

e, se sopra  $C_0$  l'oscillazione dell'angolo di direzione della tangente è  $< \tau$ , sia

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{L_0} \left\{ \left( \frac{L}{L_0} x' - x'_0 \right) F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{L}{L_0} y' - y'_0 \right) F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0, u_0) \right\} ds \right| < L_0 \varepsilon. \end{aligned}$$

Dalle disuguaglianze ottenute segue

$$(L) - u_{C_0}(L_0) \geq \frac{L}{L_0} \int_0^{L_0} E(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y'; u_0) ds + \vartheta(3 + \nu) \varepsilon L_0,$$

con  $|\vartheta| < 1$ .

Fissiamo il numero  $\gamma$  indicato nella Osservazione II del numero precedente e sia  $\tau < \frac{\gamma}{2}$ . Allora, nei punti in cui la tangente a  $C$  forma con la corda un angolo  $> \gamma$ , la tangente a  $C$  forma con una qualunque retta tangente in un punto di  $C_0$  un angolo  $< \frac{\gamma}{2}$ . Di qua e dalla Osservazione II segue

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_0} \int_0^{L_0} E(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y'; u_0) ds = \\ = \int_0^L E(x_0, y_0; x'_0, y'_0; x', y'; u_0) ds > \frac{\delta L}{4(1 + \delta)} \rho \end{aligned}$$

essendo  $\rho$  il minimo di  $E(x, y; \cos \theta, \sin \theta; \cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}; u)$  per  $(x, y)$  appartenente a  $D$ ,  $u$  appartenente a  $(u_1, u_2)$ ,  $\theta$  e  $\tilde{\theta}$  direzioni formanti un angolo  $\geq \frac{\gamma}{2}$ . È perciò

$$u_C(L) - u_{C_0}(L_0) \geq \left\{ \frac{\delta \rho}{4} - \varepsilon(3 + \nu) \right\} \frac{L}{1 + \delta},$$

e se  $\varepsilon$  è stato scelto sufficientemente piccolo, si ha

$$u_C(L) > u_{C_0}(L_0).$$

5. Dal lemma dimostrato si può dedurre il seguente teorema.

**TEOREMA.** — *La frontiera del campo  $D$  sia costituita da un numero finito di archi di classe 1 o da una infinità numerabile di tali archi di cui in ogni regione limitata vi sia un numero finito; il problema di Mayer sia quasi regolare positivo normale;  $C_0$  sia una curva minimante  $u_C(L)$  in una classe  $K$  di curve ordinarie e  $u_{C_0}(s)$  sia sempre interno all'intervallo  $\Delta$ ;  $\alpha_0$  sia un arco di  $C_0$  tutto costituito, i punti terminali al più esclusi, di punti di indifferenza rispetto al campo  $D$  e alla classe  $K$ <sup>(1)</sup>; allora, in ogni punto di  $\alpha_0$ , il primo punto*

(1) Cioè per ogni punto di  $\alpha_0$  diverso dai punti terminali esista un intorno tale che ogni curva ordinaria ottenuta da  $C_0$  sostituendo un suo arco appartenente a quell'intorno con un altro arco, avente gli stessi punti terminali e appartenente a quell'intorno, è ancora una curva di  $K$ .

terminale al più escluso, esiste la tangente anteriore ed è continua a sinistra, e in ogni punto di  $\alpha_0$ , il secondo punto terminale al più escluso, esiste la tangente posteriore ed è continua a destra; nei punti di  $\alpha_0$ , diversi dai punti terminali, interni a  $D$  o interni a un arco di classe 1 della frontiera di  $D$ , esiste la tangente ed è continua; infine,  $\alpha_0$  non può avere punti diversi dai suoi punti terminali nei punti angolosi della frontiera di  $D$  in cui l'angolo acuto è rivolto verso l'interno del campo.

Siano

$$x = x_0(s) \quad , \quad y = y_0(s) \quad (0 \leq s \leq L_0),$$

le equazioni parametriche di  $C_0$  in funzione della lunghezza dell'arco, e sia  $P$  un punto dell'arco  $\alpha_0$  corrispondente a un certo valore  $s$  del parametro. Se il punto  $P$  è interno al campo  $D$ , è noto che in  $P$  esiste ed è continua la tangente ad  $\alpha_0$  <sup>(1)</sup>. Supponiamo che  $P$  sia un punto di  $\alpha_0$  diverso dai punti terminali e sia interno a un arco  $\gamma$  di classe 1 della frontiera di  $D$ . Indicati con  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  due numeri positivi sufficientemente piccoli, consideriamo i punti

$$Q_1 \equiv [x_0(s - \sigma_1), y_0(s - \sigma_1)] \text{ e } Q_2 \equiv [x_0(s + \sigma_2), y_0(s + \sigma_2)].$$

Se le rette orientate  $Q_1P$ ,  $PQ_2$  al tendere a zero di  $\sigma_1$  e di  $\sigma_2$  tendono a una stessa posizione limite, questa risulta tangente ad  $\alpha_0$  in  $P$ , e, a meno del senso, coincide con la tangente a  $\gamma$  nel punto  $P$ . Dimostriamo che questo è l'unico caso che si possa verificare.

Infatti, se  $Q_1P$  e  $PQ_2$  tendessero entrambe a diventare tangenti a  $\gamma$  nel punto  $P$  ma non tendessero alla stessa direzione, esse tenderebbero a direzioni opposte. Allora, per ogni circonferenza di centro  $P$  e raggio  $\rho$  sufficientemente piccolo potremmo considerare il più piccolo valore positivo  $\sigma_1$  per il quale  $Q_1$  appartiene a questa circonferenza e l'analogo valore  $\sigma_2$ . L'angolo  $Q_1\hat{P}Q_2$  tenderebbe a zero con  $\rho$  e il rapporto di  $\rho$  alla lunghezza del segmento  $Q_1Q_2$  tenderebbe, perciò, a  $+\infty$  per  $\rho$  tendente a zero. Si potrebbe quindi determinare un  $\delta > 0$  tale che, per  $\rho > 0$  sufficientemente piccolo, questo rapporto fosse sempre maggiore di  $1 + \delta$ , e allora sarebbe maggiore di  $1 + \delta$  anche il rapporto della lunghezza  $\sigma_1 + \sigma_2$  dell'arco  $C_0(Q_1, Q_2)$  alla lunghezza del segmento  $Q_1Q_2$ , e si potrebbe determinare (supposto  $\rho$  abbastanza piccolo) una curva continua e rettificabile  $\Gamma$ , congiungente  $Q_1$  e  $Q_2$ , appartenente a  $D$ , di lunghezza  $l$  tale che  $\sigma_1 + \sigma_2 > (1 + \delta)l$ , e su cui la tangente avesse un'oscillazione piccola ad arbitrio.

Ma se il problema di Mayer è quasi regolare positivo normale, si possono determinare tre numeri  $p, q, r$  con  $r > 0$ , tali che, per  $(x, y)$

(1) B. MANIÀ, *Proprietà delle estremanti nei problemi di Mayer*. « Ann. della R. Scuola Norm. Sup. », ser. II, vol. IV (1935), pp. 114-115.



appartenente al cerchio di centro P e raggio  $r$ , per  $u$  appartenente all'intervallo  $[u_{C_0}(s) - r, u_{C_0}(s) + r]$  e  $x'^2 + y'^2 > 0$ , sia

$$\bar{F}(x, y, x', y', u) \equiv F(x, y, x', y', u) + px' + qy' > 0.$$

Non resta perciò che applicare il lemma del numero precedente, prendendo come intervallo  $\Delta$  l'intervallo  $[u_{C_0}(s) - r, u_{C_0}(s) + r]$  e come intervallo  $(u_1, u_2)$  un intorno abbastanza piccolo di  $u_{C_0}(s)$ , per vedere che, sostituendo  $C_0(Q_1, Q_2)$  con  $\Gamma$  si otterrebbe una curva  $\bar{C}_0$  ordinaria della classe K per la quale si avrebbe  $u_{\bar{C}_0}(\bar{L}_0) < u_{C_0}(L_0)$ , e ciò è assurdo.

Supposto poi, per esempio, che la retta variabile  $Q_1 P$  al tendere di  $\sigma_1$  a zero non tenda a divenire tangente  $\gamma$ , si potrà determinare una successione di valori  $\sigma_1$ , tendente a zero, tali che per le rette corrispondenti  $Q_1 P$  il maggiore degli angoli formati con la tangente a  $\gamma$  in P sia sempre  $< \pi - \omega$ , essendo  $0 < \omega < \pi$ . Considerata la circonferenza di centro P passante per  $Q_1$ , se  $\sigma_1$  è abbastanza piccolo, esiste un minimo numero  $\sigma_2 > 0$  per cui il corrispondente punto  $Q_2$  appartiene a questa circonferenza. L'angolo  $Q_1 \widehat{P} Q_2$  è sempre  $< \pi - \omega$ , e quindi il rapporto della lunghezza  $\sigma_1 + \sigma_2$  di  $C_0(Q_1, Q_2)$  alla lunghezza del segmento  $Q_1 Q_2$  è  $> \frac{1}{\sin \frac{\pi - \omega}{2}}$ .

Fissato  $\delta > 0$  in modo che sia  $1 > (1 + \delta) \sin \frac{\pi - \omega}{2}$ , il ragionamento fatto dianzi porta ancora a un assurdo.

Così risulta dimostrato che nei punti di  $\alpha_0$ , diversi dai punti terminali, interni a un arco  $\gamma$  di classe I della frontiera di D, esiste la tangente ad  $\alpha_0$ , e questa, a meno del senso, coincide con la tangente a  $\gamma$ .

Lo stesso ragionamento fatto qui prova che in un punto angoloso della frontiera in cui l'angolo acuto sia rivolto verso l'interno del campo, non vi possono essere punti di  $\alpha_0$  diversi dai punti terminali.

Osserviamo poi che in un punto P di  $\alpha_0$ , diverso dai punti terminali, e non coincidente con un punto angoloso della frontiera, o la tangente coincide con la tangente a un arco della frontiera stessa, oppure P appartiene a un arco parziale di  $\alpha_0$  sul quale sono soddisfatte le equazioni

$$(4) \quad \begin{cases} F_{x'} + \int_0^s \{F_x + F_{x'} F_u\} ds = C_1 \text{ (cost.)} \\ F_{y'} + \int_0^s \{F_y + F_{y'} F_u\} ds = C_2 \text{ (cost.)} \end{cases} \quad (1).$$

Se  $P$  è interno a  $D$  la continuità della tangente in  $P$  segue dalle (4) e dal fatto che il problema di Mayer è quasi regolare normale. Se  $P$  è un punto interno un arco di classe 1 della frontiera di  $D$ , per dimostrare la continuità della tangente in  $P$ , consideriamo, per esempio, un intorno destro di  $P$  su  $\alpha_0$ . Se vi è un tale intorno che ha soltanto  $P$  sulla frontiera di  $D$ , la tangente ad  $\alpha_0$  ha un limite a destra di  $P$  e questo deve coincidere con la tangente in  $P$  ad  $\alpha_0$  di cui è già stata provata l'esistenza. Se vi è un intorno destro di  $P$  su  $\alpha_0$  che appartenga completamente alla frontiera del campo  $D$ , si vede ancora che la tangente ad  $\alpha_0$  è continua a destra in  $P$ . Se, infine, in ogni intorno destro di  $P$  su  $\alpha_0$  vi sono infine punti della frontiera e infiniti punti interni al campo  $D$ , questi ultimi sono distribuiti in una infinità numerabile di archi su ciascuno dei quali valgono le (4), e quindi l'oscillazione dell'angolo di direzione della tangente tende a zero con la lunghezza dell'arco stesso. D'altronde, nell'insieme dei punti dell'intorno destro di  $P$  su  $\alpha_0$  che appartengono alla frontiera, la tangente ad  $\alpha_0$  ha un limite a destra di  $P$  che coincide con la tangente in questo punto ad  $\alpha_0$ . Se ne conclude facilmente che anche in questo la tangente ad  $\alpha_0$  è continua a destra di  $P$ . Poichè analogamente si prova la continuità a sinistra di  $P$ , e poichè nel punto  $P$  esiste la tangente ad  $\alpha_0$ , risulta provata la continuità della tangente ad  $\alpha_0$  nel punto  $P$ .

Se  $P$  è un punto terminale di  $\alpha_0$  o un punto di  $\alpha_0$  situato in un punto angoloso della frontiera, il ragionamento ora fatto per provare l'esistenza dei limiti laterali nel punto  $P$  della tangente ad  $\alpha_0$ , si può ancora ripetere, soltanto non si può affermare che i limiti laterali coincidano, perchè non si è preventivamente dimostrato che in  $P$  esiste la tangente ad  $\alpha_0$ . Resta però dimostrata l'esistenza delle tangenti laterali, e quanto si è sopra affermato circa la loro continuità.

**Matematica.** — *L'equazione secolare a matrice circolante.*  
Nota di L. TOSCANO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. GIORGI.

1. Le equazioni secolari nel senso lato della parola (a matrice simmetrica o qualsiasi), per la loro larga applicazione a svariati problemi di Analisi, Meccanica e Geometria, sono state ampiamente studiate dal punto di vista della natura delle radici.

Se la matrice è simmetrica, Cauchy e Sylvester hanno dimostrato che le radici sono reali <sup>(2)</sup>; ma tale proprietà non è caratteristica per le equazioni secolari in senso stretto, in quanto è noto, ad esempio, il caso classico delle equazioni a matrice involutoria non simmetrica, studiato da Prym, aventi per radici  $+1$  o  $-1$  <sup>(3)</sup>; ed anch'io trovai nel 1928 una classe di equazioni a matrice non simmetrica con radici reali <sup>(4)</sup>.

Per le radici complesse valgono i risultati di Bendixson che assegnano un limite superiore per i valori assoluti dei coefficienti delle parti immaginarie delle radici e dei limiti per le parti reali <sup>(5)</sup>.

Bottasso ha ancora costruito l'equazione a matrice avente per radici le potenze simili, e Rados e Burnside i prodotti  $a^k a^k$ , sempre delle radici di una prefissata equazione a matrice <sup>(6)</sup>.

Però di ben poche equazioni a matrice si sanno costruire le radici, esclusi i casi ben noti riguardanti le matrici ortogonali e involutorie.

Nel 1935 alcune mie ricerche su gli operatori lineari mi hanno condotto al seguente risultato sulle matrici circolanti:

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) E. PASCAL, *I Determinanti*. (Hoepli, Milano, 1923, p. 103).

(3) F. PRYM, *Ueber orthogonale, involutorische und orthogonalinvolutorische Substitutionen*. (« Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen », 1892); L. TOSCANO, *Determinanti involutori*. (« Rend. R. Ist. Lombardo », vol. LXI, 1928); *Sull'equazione secolare*. (« Giornale di Matematiche di Battaglini », vol. LXVI, 1928).

(4) L. TOSCANO, *Equazioni reciproche a matrice*. (« Rend. R. Acc. Naz. dei Lincei », ser. 6<sup>a</sup>, vol. VIII, 2° sem. 1928); *Equazioni a matrici con radici reali*. (« The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 32, 1930).

(5) I. BENDIXSON, *Sur les racines d'une équation fondamentale*. (« Acta Mathematica », vol. 25, 1902).

(6) M. BOTTASSO, *Sull'equazione alle potenze di un'equazione secolare ed applicazione all'equazioni integrali*. (Atti R. Ist. Veneto », to. LXXI); W. BURNSIDE, *On the characteristic equation of certain linear substitutions*. (« The Quarterly Journal of pure and applied Mathematics », vol. XXXIII, 1902).



2. Indichiamo con  $\lambda$  una radice della (3): allora sarà sempre possibile soddisfare il sistema

$$(4) \quad a_r x_1 + a_{r+1} x_2 + a_{r+2} x_3 + \dots + a_{r+n-1} x_n = \lambda x_r \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

con valori non tutti nulli delle  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , e dove ogni indice maggiore di  $n$  si intenda sostituito col suo congruo rispetto al modulo  $n$ .

Sia  $\alpha$  una radice  $n$ -esima dell'unità e  $\bar{\alpha}$  la sua coniugata per cui  $\alpha^{n-r} = \bar{\alpha}^r$ . E posto

$$\varphi(y) = a_1 + a_2 y + a_3 y^2 + \dots + a_n y^{n-1}$$

noti che

$$a_r + a_{r+1} \alpha + a_{r+2} \alpha^2 + \dots + a_{r+n-1} \alpha^{n-1} = \alpha^{n-r+1} \varphi(\alpha) \quad (r = 2, 3, \dots, n).$$

Ciò fissato, moltiplichiamo le  $n$  equazioni del sistema (4) rispettivamente per  $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$  prima, e per  $1, \bar{\alpha}, \bar{\alpha}^2, \dots, \bar{\alpha}^{n-1}$  dopo. Sommando risulta

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} [x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n] \lambda = \\ = [x_1 + \bar{\alpha} x_2 + \bar{\alpha}^2 x_3 + \dots + \bar{\alpha}^{n-1} x_n] \varphi(\alpha) \\ [x_1 + \bar{\alpha} x_2 + \bar{\alpha}^2 x_3 + \dots + \bar{\alpha}^{n-1} x_n] \lambda = \\ = [x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n] \varphi(\bar{\alpha}). \end{array} \right.$$

A questo punto osserviamo che il sistema (4) si può scrivere nella forma

$$x_r a_1 + x_{r+1} a_2 + x_{r+2} a_3 + \dots + x_{r+n-1} a_n = \lambda x_{n-r+2} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$$

e riguardandolo rispetto alle incognite  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , che assumono valori finiti, si deduce che il determinante circolante

$$|x_1, x_2, \dots, x_n|$$

è diverso da zero, e che tali sono pure i fattori <sup>(1)</sup>

$$x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \dots + \alpha^{n-1} x_n.$$

Pertanto per  $n$  qualsiasi e  $\alpha = 1$  le (5) danno la radice

$$(6) \quad \lambda = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n;$$

per  $n$  pari e  $\alpha = -1$  si ha l'altra radice

$$(7) \quad \lambda = a_1 - a_2 + a_3 - \dots - a_n;$$

(1) E. PASCAL, *I Determinanti*. (Hoepli, Milano, 1923, p. 114).



e in ogni caso le rimanenti radici sono date dalla relazione

$$(8) \quad \lambda^2 = \varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha}),$$

che si ricava moltiplicando le (5) e ponendo per  $\alpha$  una radice complessa  $n$ -esima dell'unità.

Con le notazioni del paragrafo successivo daremo lo sviluppo di  $\varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha})$  utile per le applicazioni.

3. Denotiamo con

$$\varphi_{hk} = a_h a_k + a_{h+1} a_{k+1} + \dots + a_{h+n-1} a_{k+n-1}$$

la somma dei prodotti degli elementi corrispondenti delle orizzontali di indici  $h$  e  $k$  del circolante

$$|a_1, a_2, \dots, a_n|.$$

Si ha

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = \dots = \varphi_{nn} \quad , \quad \varphi_{h+i, k+i} = \varphi_{hk}$$

$$\varphi_{1r} = \varphi_{n-r+2, n+1} = \varphi_{n+1, n-r+2} = \varphi_{1, n-r+2};$$

e denotando per brevità con  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  gli elementi  $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \dots, \varphi_{1n}$ , si conclude che i valori distinti delle  $\varphi_{hk}$  sono  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$ .

Con tali notazioni si ha

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha}) &= \varphi_1 + \varphi_2 (\alpha + \bar{\alpha}) + \varphi_3 (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + \dots + \varphi_v (\alpha^{v-1} + \bar{\alpha}^{v-1}) + \\ &+ \frac{1}{2} \varphi_{v+1} (\alpha^v + \bar{\alpha}^v) \quad \text{per } n = 2v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha}) &= \varphi_1 + \varphi_2 (\alpha + \bar{\alpha}) + \varphi_3 (\alpha^2 + \bar{\alpha}^2) + \dots + \varphi_{v+1} (\alpha^v + \bar{\alpha}^v) \\ &\quad \text{per } n = 2v + 1. \end{aligned}$$

E poichè

$$\alpha^r + \bar{\alpha}^r = 2 \cos \frac{2ri\pi}{n} \quad (\alpha \neq 1 \quad \text{e} \quad \alpha \neq -1)$$

risulta in definitiva

$$\begin{aligned} (9) \quad \varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha}) &= [\varphi_1 + (-1)^i \varphi_{2\mu+1}] + 2[\varphi_2 + (-1)^i \varphi_{2\mu}] \cos \frac{2i\pi}{4\mu} + \dots \\ &\dots + 2[\varphi_\mu + (-1)^i \varphi_{\mu+2}] \cos \frac{2(\mu-1)i\pi}{4\mu} + 2\varphi_{\mu+1} \cos \frac{i\pi}{2} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, 2\mu-1) \end{aligned}$$

per  $n = 4\mu$ ,

$$(10) \quad \varphi(\alpha) \varphi(\alpha) = [\varphi_1 + (-1)^i \varphi_{2\mu+2}] + 2 [\varphi_2 + (-1)^i \varphi_{2\mu+1}] \cos \frac{2i\pi}{4\mu+2} + \dots \\ \dots + 2 [\varphi_{\mu+1} + (-1)^i \varphi_{\mu+2}] \cos \frac{2\mu i\pi}{4\mu+2} \\ (i = 1, 2, \dots, 2\mu)$$

per  $n = 4\mu + 2$ ,

$$(11) \quad \varphi(\alpha) \varphi(\alpha) = \varphi_1 + 2\varphi_2 \cos \frac{2i\pi}{2\nu+1} + \\ + 2\varphi_3 \cos \frac{4i\pi}{2\nu+1} + \dots + 2\varphi_{\nu+1} \cos \frac{2\nu i\pi}{2\nu+1} \\ (i = 1, 2, \dots, \nu)$$

per  $n = 2\nu + 1$ .

Allora le (6) e (8) per  $n$  dispari e le (6), (7), (8) per  $n$  pari, con  $\varphi(\alpha) \varphi(\bar{\alpha})$  data dalle (9), (10), (11), risolvono l'equazione secolare a matrice circolante.

In particolare  $a_1 \pm a_2$  sono le radici della  $\Phi_2(x) = 0$ ;

$$a_1 + a_2 + a_3, \quad \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - a_1 a_2 - a_2 a_3 - a_1 a_3} \quad \text{della} \quad \Phi_3(x) = 0;$$

$$a_1 \pm a_2 + a_3 \pm a_4, \quad \pm \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2} \quad \text{della} \quad \Phi_4(x) = 0;$$

$$a_1 \pm a_2 + a_3 \pm a_4 + a_5 \pm a_6, \quad \pm \sqrt{\varphi_1 \pm \varphi_2 - \varphi_3 \mp \varphi_4} \quad \text{della} \quad \Phi_6(x) = 0.$$

4. La somma delle potenze  $r$ -esime delle radici dell'equazione (3) è data dalla

$$S_r = \sum_{s_1} \sum_{s_2} \dots \sum_{s_r} a_{s_1 + s_2 - 1} a_{s_2 + s_3 - 1} \dots a_{s_r + s_1 - 1},$$

come risulta dalla citata Nota di Bottasso.

E per  $r = 1, 2, 3, 4$  si hanno le formule

$$S_1 = 2(a_1 + a_3 + \dots + a_{n-1}) = 2\sigma_1 \quad \text{per } n \text{ pari}$$

$$S_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sigma \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$S_2 = n\varphi_1$$

$$S_3 = 2\sigma_1 \sum_{i=0}^{\frac{n}{2}-1} \varphi_{2i+1} + 2\sigma_2 \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} \varphi_{2i} \quad \text{per } n \text{ pari} \quad (\sigma_2 = \sigma - \sigma_1)$$

$$S_3 = \sigma \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_{i+1} \quad \text{per } n \text{ dispari}$$

$$S_4 = n \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_{i+1}^2.$$

Infatti, trascurando i casi semplici  $r = 1$  e  $r = 2$ , si ha

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{u=1}^{u=n} \sum_{v=1}^{v=n} a_{s+u-1} a_{u+v-1} a_{v+s-1} = \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{u=1}^{u=n} a_{s+u-1} \varphi_{us} = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{u=1}^{u=n} a_{2u+i-1} \varphi_{u, u+i} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_{i+1} \sum_{u=1}^{u=n} a_{2u+i-1} \end{aligned}$$

da cui seguono le espressioni di sopra;

$$\begin{aligned} S_4 &= \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{u=1}^{u=n} \sum_{v=1}^{v=n} \sum_{t=1}^{t=n} a_{s+u-1} a_{u+v-1} a_{v+t-1} a_{t+s-1} = \\ &= \sum_{s=1}^{s=n} \sum_{v=1}^{v=n} \varphi_{sv}^2 = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{v=1}^{v=n} \varphi_{v+i}^2 = n \sum_{i=0}^{i=n-1} \varphi_{i+1}^2. \end{aligned}$$

Sostituendo ora in qualcuna di queste formule le espressioni esplicite di  $S_r$  e  $\varphi_i$  si hanno le identità notevoli

$$\begin{aligned} 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) &= (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2 + \\ &+ 2(a_1 - a_3)^2 + 2(a_2 - a_4)^2 \\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 &+ (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^4 + 2[(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2]^2 = \\ &= 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2) + 8(a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_1)^2 + \\ &+ 16(a_1 a_3 + a_2 a_4)^2 \end{aligned}$$

e altre se ne potrebbero dedurre per valori più elevati di  $r$  e di  $n$ .

5. Denotando con  $\Sigma_i$  la somma di tutti i minori diagonali di ordine  $i$  del circolante

$$|a_1, a_2, \dots, a_n|$$

si ha

$$\begin{aligned} (-1)^n \Phi_n(x) &= x^n - \Sigma_1 x^{n-1} + \\ &+ \Sigma_2 x^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1} x + (-1)^n \Sigma_n, \end{aligned}$$

e ponendo  $x = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sigma$  si trova la nuova formula

$$(-1)^{n-1} \Sigma_n = \sigma^n - \sigma^{n-1} \Sigma_1 + \sigma^{n-2} \Sigma_2 - \dots + (-1)^{n-1} \sigma \Sigma_{n-1}$$

che dà lo sviluppo del circolante  $|a_1, a_2, \dots, a_n|$ .

E poichè

$$\Sigma_n^r = \sigma (A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

con  $A_i$  complemento algebrico di  $a_i$  considerato nella prima orizzontale si ha ancora

$$(-1)^{n-1} (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = \sigma^{n-1} - \sigma^{n-2} \Sigma_1 + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1}.$$

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota III di G. COLONNETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nel caso particolare delle travature reticolari, la funzione che, nello stato di equilibrio, si deve render minima, assume la forma

$$\Phi + \Sigma \bar{s} S$$

dove  $S$  e  $\bar{s}$  stanno a rappresentare rispettivamente: gli sforzi che, nello stato di equilibrio considerato, competono alle singole aste, e le rispettive variazioni di lunghezza impresse.

Se  $k$  è il numero delle aste sovrabbondanti (grado di iperstaticità del sistema) e se si assumono gli sforzi in tali aste come incognite iperstatiche

$$X_1, \quad X_2, \dots, X_k$$

allo sforzo nell'asta generica si potrà sempre attribuire l'espressione

$$(1) \quad S = S_p + S_1 X_1 + S_2 X_2 + \dots + S_k X_k$$

essendo  $S_p$  lo sforzo che all'asta stessa compete nella travatura principale supposta sollecitata dal dato sistema di forze esterne, ed

$$S_1 = \frac{\partial S}{\partial X_1}, \quad S_2 = \frac{\partial S}{\partial X_2}, \dots, S_k = \frac{\partial S}{\partial X_k}$$

gli sforzi che, nella stessa asta generica, sarebbero determinati dalle singole sollecitazioni

$$X_1 = 1, \quad X_2 = 1, \dots, X_k = 1.$$

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937

Dette al solito:

$l$  la lunghezza di un'asta qualunque,

$A$  l'area della sua sezione retta,

E il modulo di elasticità normale del materiale di cui essa è costituita, e quindi:

$$(2) \quad s = \frac{Sl}{EA}$$

la variazione elastica di lunghezza che essa subisce sotto l'azione dello sforzo  $S$ ,

le  $k$  equazioni in cui la condizione di minimo al solito si risolve:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial X_1} (\Phi + \Sigma \bar{s} S) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} (\Phi + \Sigma \bar{s} S) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial X_k} (\Phi + \Sigma \bar{s} S) = 0 \end{array} \right.$$

si possono molto semplicemente scrivere sotto la forma:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_1} = 0 \\ \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X_k} = 0. \end{array} \right.$$

\* \* \*

Vediamo ora di farne l'applicazione ad un caso concreto, la cui voluta semplicità ci permetterà di interpretare più facilmente i singoli risultati.

Supponiamo dunque che si voglia far sopportare un certo sforzo di trazione verticale  $P$  ad un telaio iperstatico del tipo di quello rappresentato in fig. 1.

Un tale telaio si può evidentemente considerare come costituito dall'insieme di un'asta verticale (fig. 2) e di un quadrilatero a diagonale orizzontale (fig. 3); considerando questo quadrilatero come travatura principale, adotteremo la diagonale verticale come asta sovrabbondante, ed il relativo sforzo  $X$  come incognita iperstatica.



Supposte le due diagonali eguali, e detta  $l$  la loro lunghezza, ed  $A$  l'area della loro sezione retta, attribuiremo alle quattro aste di contorno, di lunghezze eguali ad  $\frac{l}{\sqrt{2}}$ , sezioni rette di area eguale ad  $\frac{A}{\sqrt{2}}$ .

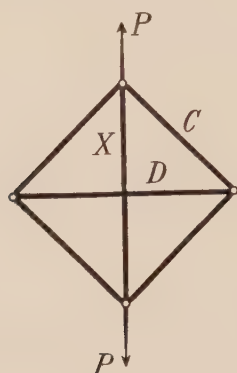


Fig. 1.



Fig. 2.

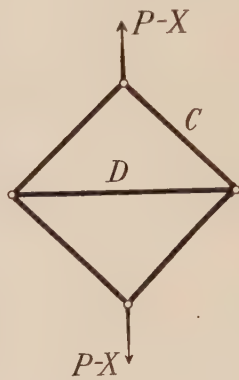


Fig. 3.

Designeremo con  $C$  e con  $D$  rispettivamente gli sforzi nelle aste di contorno e nella diagonale orizzontale; dalla statica dei sistemi rigidi si ha:

$$(5) \quad C = \frac{P-X}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad D = -(P-X)$$

quindi:

$$(6) \quad \frac{\partial C}{\partial X} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial D}{\partial X} = 1$$

mentre dalla teoria che siam qui venuti esponendo si ha un'equazione del tipo:

$$(7) \quad \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0.$$

Nel caso concreto, se incominciamo col supporre che le  $\bar{s}$  sian tutte nulle, ponendoci così dal punto di vista della teoria classica dell'elasticità, quest'equazione diviene:

$$X \frac{l}{EA} + 4 \frac{P-X}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{E \frac{A}{\sqrt{2}}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (P-X) \frac{l}{EA} = 0.$$

Se ne ricava:

$$\boxed{X = \frac{3}{4} P, \quad C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}}, \quad D = -\frac{1}{4} P.}$$

Notiamo subito che questa soluzione è poco soddisfacente in quanto accusa una scarsa partecipazione del quadrilatero alla resistenza dell'insieme, ed una utilizzazione soltanto parziale delle caratteristiche resistenti del materiale in esso impiegato.

Notiamo ancora che si potrebbe bensì, volendolo, far crescere a piacere la frazione del carico sopportata dal quadrilatero (e scaricare in conseguenza la diagonale principale); ma che per far ciò bisognerebbe evidentemente accrescere la rigidità del quadrilatero adottando per le sue aste sezioni maggiori, con che non migliora il grado di utilizzazione delle caratteristiche del materiale; perciò il maggior quantitativo di esso, impiegato nella costruzione del quadrilatero, non verrebbe, se non in minima parte, compensato dalla riduzione di dimensioni realizzabile nella diagonale verticale.

La soluzione resta quindi in ogni caso eminentemente anti-economica.

Una soluzione economica si ottiene invece se si provvede a creare nel sistema un opportuno stato di coazione; ed il modo più semplice per ottenerlo è proprio quello di provocare una deformazione plastica dell'asta sovrabbondante.

Si supponga infatti che la sezione A di quest'asta sia stata scelta per modo che, quando la forza esterna raggiungerà il valore  $P' = \frac{2}{3} P$  (sicchè nell'asta si generi lo sforzo  $X' = \frac{3}{4} P' = \frac{1}{2} P$ ) il materiale raggiunga ivi il suo limite di elasticità.

È inteso che (se adottiamo le convenzioni postulate nella Nota I) da quell'istante in poi — vale a dire mentre la sollecitazione esterna continuerà a crescere da  $P'$  a  $P$  — lo sforzo in quell'asta non potrà crescere più, ma resterà definitivamente stabilizzato sul valore  $\frac{1}{2} P$ .

Si determinerà intanto nell'asta stessa una variazione permanente di lunghezza  $\bar{s}$  grazie alla quale l'equilibrio si potrà tuttavia raggiungere quando sia verificata l'equazione

$$(7) \quad \Sigma (s + \bar{s}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

la quale nel caso concreto (tutte le altre  $\bar{s}$  continuando naturalmente ad esser nulle) diviene:

$$\left( X \frac{l}{EA} + \bar{s} \right) 1 + 4 \frac{P - X}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{E \frac{A}{\sqrt{2}}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - (P - X) \frac{l}{EA} 1 = 0.$$

Da questa equazione, se si attribuisce ad  $X$  il suo valore  $\frac{1}{2} P$ , si ricava

$$(8) \quad \bar{s} = P \frac{l}{EA}$$

Quanto agli sforzi nelle varie aste, essi avranno nel frattempo mantenuti i valori obbligati:

$$X = \frac{1}{2} P \quad , \quad C = \frac{1}{2} \frac{P}{\sqrt{2}} \quad , \quad D = -\frac{1}{2} P$$

Nelle nuove condizioni di equilibrio così definite, il quadrilatero si è dunque addossata effettivamente la metà del carico, e la resistenza dei materiali è ovunque utilizzata appieno.

\* \* \*

Alla (8) si dovrà naturalmente ricorrere quando si voglia risalire, dalla configurazione di equilibrio sotto carico, allo stato naturale (vale a dire allo stato di equilibrio per forze esterne tutte nulle) senza ricorrere al principio di sovrapposizione.

Per caratterizzare questo stato si ritornerà ancora una volta alla equazione

$$(7) \quad \Sigma (\delta + \bar{\delta}) \frac{\partial S}{\partial X} = 0$$

nella quale si attribuiranno agli sforzi nelle singole aste ed alle loro derivate i valori che le (5) e le (6) forniscono quando in esse si ponga  $P = 0$ .

Tenuto conto della (8) quella equazione diviene infatti:

$$\left( X \frac{l}{EA} + P \frac{l}{EA} \right) \delta - 4 \frac{X}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\frac{l}{\sqrt{2}}}{E \frac{A}{\sqrt{2}}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + X \frac{l}{EA} \delta = 0$$

e se ne deduce:

$$X = -\frac{1}{4} P \quad , \quad C = \frac{1}{4} \frac{P}{\sqrt{2}} \quad , \quad D = -\frac{1}{4} P$$

Ma anche più importante — come già abbiamo a suo tempo avvertito — è l'uso che della (8) noi possiamo fare allo scopo di risolvere il dubbio, che in ogni singolo problema speciale potrebbe sorgere, in ordine alle conseguenze che, dal punto di vista dei margini di sicurezza della struttura, possono derivare dalla deformazione permanente impressa alla diagonale verticale.

La (8) ci dà infatti la misura di questa deformazione, e ci consente quindi di farci, caso per caso, un'idea della importanza di essa per rapporto a quelle deformazioni che il materiale impiegato può effettivamente sopportare prima di rompersi.

Così per esempio il fatto che, nel caso concreto, la deformazione permanente definita dalla (8) sia dello stesso ordine di grandezza delle deformazioni elastiche — e precisamente sia eguale alla deformazione che l'asta di cui si tratta subirebbe se, mantenendosi perfettamente elastica, dovesse sopportare da sola l'intero carico  $P$  — è indubbiamente da considerarsi come molto rassicurante.

S'intende però che una effettiva valutazione dei margini di sicurezza della struttura non potrà mai, in definitiva, venir fatta se non tenendo conto di quello che è il comportamento reale che il materiale presenta all'ulteriore accrescersi del carico.

Se infatti dopo il periodo cosiddetto dello snervamento (durante il quale le deformazioni permanenti si verificano sotto carico praticamente costante) il materiale accusa, come spesso avviene, una netta e ragguardevole ripresa della resistenza, la differenza fra il suo carico di rottura e quello a cui lo snervamento si era prodotto potrà anche essere sufficiente a garantire il desiderato margine di sicurezza.

Se invece la ripresa della resistenza manca od è inadeguata, il carico  $P$  a cui i precedenti calcoli si riferiscono dovrà venir riguardato come una specie di carico critico, oltre il quale ci si avvia più o meno rapidamente verso la rottura, e dal quale convien quindi in pratica tenersi a rispettosa distanza.

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota IV di G. COLONNETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Meccanica.** — *Su di una generalizzazione dinamica del teorema di Betti diversa da quella di Lord Rayleigh.* Nota di E. FROLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

È noto come il teorema di Betti sia stato generalizzato alla dinamica da Lord Rayleigh («London Math. Soc. Proc.», vol. IV, 1873).

Il teorema di Rayleigh dice: se di uno stesso corpo elastico si considerano due distinti atti di moto caratterizzati, il primo dalle componenti di moto:  $(u_1, v_1, w_1)$ , e dalle forze di massa:  $\rho X_1, \rho Y_1, \rho Z_1$  e dalle forze di superficie:  $X_{v_1}, Y_{v_1}, Z_{v_1}$ ; il secondo da:  $(u_2, v_2, w_2)$  ( $\rho X_2, \rho Y_2, \rho Z_2$ ) ( $X_{v_2}, Y_{v_2}, Z_{v_2}$ ) allora il lavoro (in senso statico)

$$\begin{aligned} & \iint\limits_S [(\rho X_1 - \rho \ddot{u}_1) u_2 + (\rho Y_1 - \rho \ddot{v}_1) v_2 + (\rho Z_1 - \rho \ddot{w}_1) w_2] dS + \\ & + \iint\limits_S (X_{v_1} u_2 + Y_{v_1} v_2 + Z_{v_1} w_2) dS \end{aligned}$$

che le forze applicate e le forze di inerzia del sistema con indice 1 compiono per gli spostamenti del sistema con indice 2 è uguale al reciproco lavoro:

$$\begin{aligned} & \iint\limits_S \{[\rho X_2 - \rho \ddot{u}_2] u_1 + [\rho Y_2 - \rho \ddot{v}_2] v_1 + [\rho Z_2 - \rho \ddot{w}_2] w_1\} dS + \\ & + \iint\limits_S [X_{v_2} u_1 + Y_{v_2} v_1 + Z_{v_2} w_1] dS \end{aligned}$$

che forze applicate e forze di inerzia con indice 2 compiono per gli spostamenti con indice 1.

Mi sono proposto di generalizzare, o meglio di trovare un equivalente del teorema di Betti per il caso dinamico, quando non si vogliano considerare le forze d'inerzia alla stregua delle forze esterne, quando si voglia usare la parola lavoro con il consueto significato che gli si attribuisce in dinamica.

Considero un corpo elastico S: da un certo tempo  $t_0$  in poi, siano:

$$\begin{aligned} & u_1(p, t), v_1(p, t), w_1(p, t) \\ & \rho X_1(p, t), \rho Y_1(p, t), \rho Z_1(p, t) \\ & X_{v_1}(p, t), Y_{v_1}(p, t), Z_{v_1}(p, t) \end{aligned}$$

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.



rispettivamente le componenti dello spostamento di un punto  $p$  al tempo  $t$ , del carico di massa, e di quello di superficie, relative ad una prima condizione di moto, caratterizzata all'istante iniziale  $t_0$  dalle distribuzioni

$$(u_{01}(p), v_{01}(p), w_{01}(p)) \quad (\dot{u}_{01}(p), \dot{v}_{01}(p), \dot{w}_{01}(p))$$

di spostamenti, e di velocità. Siano le stesse lettere con indice 2 le stesse quantità relative ad una seconda condizione di moto.

Il lavoro che i carichi 1 compiono nell'intervallo  $t_0, t$ , per effetto del moto 2 dei loro punti di applicazione è:

$$L_{12} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho [X_1 \dot{u}_2 + Y_1 \dot{v}_2 + Z_1 \dot{w}_2] dp + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_s (X_{v1} \dot{u}_2 + Y_{v1} \dot{v}_2 + Z_{v1} \dot{w}_2) ds$$

indicata con  $s$  la superficie contorno di  $S$ .

Essendo il sistema 1 dinamicamente equilibrato, dette  $(e_{xx1}, \dots, e_{xy1}, \dots)$  le sei componenti di deformazione relative al sistema 1, e  $W$  l'energia potenziale elastica locale, sarà:

$$\rho X_1 = \rho \ddot{u}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx1}} + \dots \right]; \quad \rho Y_1 = \rho \ddot{v}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xy1}} + \dots \right];$$

$$Z_{\rho 1} = \rho \ddot{w}_1 - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{zx1}} + \dots \right].$$

$$X_{v1} = \left( \frac{\partial W}{\partial e_{xx1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right); \quad Y_{v1} = \left( \frac{\partial W}{\partial e_{xy1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right);$$

$$Z_{v1} = \left( \frac{\partial W}{\partial e_{zx1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right)^{(1)}$$

per cui potrà scriversi:

$$L_{12} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho [\ddot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots] dS + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_s \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial e_{xx1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{u}_2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial W}{\partial e_{xy1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{v}_2 + \left( \frac{\partial W}{\partial e_{zx1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{w}_2 \right\} dS - \bullet$$

(1) Mancano, come è noto, nelle condizioni al contorno termini contenenti le derivate ricerche dello spostamento secondo il tempo, perchè tali condizioni esprimono, in ultima analisi, le condizioni di equilibrio di una membrana ideale di spessore e massa nulli, avviluppante il corpo.

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} + \dots \right] \dot{u}_2 + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} + \dots \right] \dot{v}_2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{\chi x1}} + \dots \right] \dot{w}_2 \right\} dS.$$

Tenendo conto che, come si ricava mediante una integrazione per parti, è:

$$\iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \dot{e}_{xx1} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \dot{e}_{xy1} + \dots \right] dS = \\ = \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{u}_2 + \left( \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{v}_2 + \right. \\ \left. + \left( \frac{\partial W}{\partial \ell_{\chi x1}} \cos \widehat{xv} + \dots \right) \dot{w}_2 \right\} dS + \iiint_S \left\{ \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} + \dots \right] \dot{u}_2 + \right. \\ \left. + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} + \dots \right] \dot{v}_2 + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial \ell_{\chi x1}} + \dots \right] \dot{w}_2 \right\} dS_2^{(1)}.$$

posso facilmente scrivere:

$$(1) \quad L_{12} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho [\ddot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots] dS + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \dot{e}_{xx2} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \dot{e}_{xy2} + \dots \right] dS.$$

Integro nella (1) per parti rispetto al tempo, il primo addendo diventa ovviamente:

$$+ \left[ \int_{t_0}^{t_1} \iiint_S \rho (\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots) dS - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho (\dot{u}_1 \ddot{u}_2 + \dots) dS \right]$$

il secondo essendo  $\left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \dot{e}_{xx2} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \dot{e}_{xy2} + \dots \right]$  una forma bilineare simmetrica in  $(\ell_{xx1}, \dots, \ell_{xy1}, \dots)$  ed in  $(\dot{e}_{xx2}, \dots)$  si riduce per la detta integrazione per parti a:

$$+ \left[ \int_{t_0}^{t_1} \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \ell_{xx2} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \ell_{xy2} + \dots \right] dS - \right. \\ \left. \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx2}} \dot{e}_{xx1} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \dot{e}_{xy1} + \dots \right] dS \right]$$

(1) Indico con  $(\dot{e}_{xx2}, \dots, \dot{e}_{xy2}, \dots)$  le derivate rispetto al tempo delle componenti di deformazione relative al secondo sistema.

segue allora:

$$(2) \quad L_{12} = \left|_{t_0}^{t_1} \iiint_S \rho [\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots] dS + \left|_{t_0}^{t_1} \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \ell_{xx1} + \dots \right] dS + \right. \\ \left. - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho [\ddot{u}_2 \dot{u}_1 + \dots] dS - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx2}} \dot{\ell}_{xx1} + \dots + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy2}} \dot{\ell}_{xy1} + \dots \right] dS. \right.$$

Considero il lavoro reciproco, che i carichi esterni del secondo sistema compiono per il moto relativo al primo sistema; esso può ottenersi dalla (1), invertendo gli indici 1 e 2, ho perciò:

$$(3) \quad L_{21} = \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \rho [\ddot{u}_2 \dot{u}_1 + \dots] dS + \\ + \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx2}} \dot{\ell}_{xx1} + \dots + \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy2}} \dot{\ell}_{xy1} + \dots \right] dS.$$

Sommando la (2) con la (3) ottengono:

$$(4) \quad L_{12} + L_{21} = \left|_{t_0}^{t_1} \iiint_S \rho [\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots] dS + \right. \\ \left. + \left|_{t_0}^{t_1} \iiint_S \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \ell_{xx2} + \dots \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \ell_{xy2} + \dots \right] dS. \right.$$

Se chiamo « energia totale mista relativa alle due condizioni 1 e 2 al tempo  $\theta$  » l'espressione:

$$\left[ \iiint_S \left\{ \rho [\dot{u}_1 \dot{u}_2 + \dots] + \left[ \frac{\partial W}{\partial \ell_{xx1}} \ell_{xx2} + \dots \frac{\partial W}{\partial \ell_{xy1}} \ell_{xy2} + \dots \right] \right\} ds \right]_{t=\theta}.$$

posso per la (4), concludere.

« Se un corpo elastico è soggetto a due qualunque condizioni di moto dal tempo  $t_0$  al tempo  $t_1$ , la somma del lavoro che i carichi esterni relativi alla prima condizione compiono per il moto relativo alla seconda condizione, nell'intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$  e del reciproco lavoro che i carichi relativi alla seconda condizione compiono il moto relativo alla prima condizione, sempre nell'intervallo di tempo  $(t_0, t_1)$ , è uguale alla differenza dei valori che l'energia totale mista, relativa alle condizioni considerate, assume negli istanti  $t_0$  e  $t_1$  ».

**Meccanica** (Idrodinamica). — *Anelli vorticosi che generalizzano lo schema di Bénard-Kármán della resistenza idraulica.*  
Nota di G. LAMPARIELLO, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

§ I. — INTRODUZIONE.

Nella presente Nota mi propongo di esporre uno schema matematico atto alla valutazione della resistenza idraulica che si oppone al moto traslatorio uniforme di un solido di rivoluzione immerso in un liquido perfetto, sottratto all'azione di forze di massa e mobile nella direzione dell'asse di simmetria.

Per quanto le osservazioni non siano state ancora condensate in leggi nitidamente definite, è tuttavia plausibile di ritenere acquisito che le cose sostanzialmente vanno come se a poppa del solido si distaccassero con ritmo periodico dei filamenti vorticosi ragionevolmente schematizzabili, per la simmetria del fenomeno, in sottili anelli vorticosi aventi per asse l'asse di simmetria.

È questa del resto l'unica ipotesi compatibile con la teoria matematica dei vortici in un fenomeno di moto fluido con simmetria assiale.

La formazione di ciascun anello vorticoso richiede manifestamente una certa quantità  $e$  di energia che dipende dalle costanti geometriche dell'anello e dalla sua intensità.

Procederemo al calcolo di questa energia nel caso in cui il solido è una sfera, con che si perviene ad un'espressione semplice e maneggevole; indicheremo anche il procedimento matematico da seguire nel caso di un qualunque solido di rivoluzione.

Se  $v$  è il numero di anelli che si distaccano dalla superficie del solido nell'unità di tempo,  $ve$  è l'energia per unità di tempo che viene messa in gioco secondo il precedente schema dei fenomeni poppieri.

D'altra parte questa stessa energia può essere valutata per via puramente meccanica sotto forma di lavoro eseguito nell'unità di tempo dalla incognita resistenza idraulica  $R_e$ .

Questo lavoro è manifestamente  $R_e V_o$ , se  $V_o$  è la velocità (intensiva) di traslazione del solido.

Eguagliando queste diverse espressioni della medesima energia per unità di tempo, l'una desunta da ragionevole interpretazione dei fenomeni poppieri

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

quali vengono più o meno confusamente offerti dall'osservazione diretta, l'altra dalla consueta schematizzazione meccanica, abbiamo

$$\begin{aligned} v e &= R_e V_0, \\ R_e &= \frac{v e}{V_0}. \end{aligned}$$

Per poter trarre da questa formola pratiche conclusioni è ancora necessario che l'esperienza consenta una misura o almeno un apprezzamento del periodo (o frequenza) del fenomeno, nonchè delle caratteristiche geometrico-cinematiche degli anelli.

Tutto deve potersi ridurre a dipendere unicamente dalla densità  $\rho$  del fluido, dal raggio  $R$  della sfera e da  $V_0$ ; allora si avrebbe finalmente una espressione esplicita teorico-sperimentale della resistenza.

La dipendenza dell'energia e da queste costanti fondamentali del fenomeno dev'esser tale che ne emerga, conformemente alla legge newtoniana quadratica della resistenza, la proporzionalità al cubo della velocità  $V_0$ .

## § 2. - CALCOLO DELL'ENERGIA $e$ .

Assumiamo l'asse di simmetria del fenomeno quale asse  $x$  di un sistema cartesiano ortogonale e, seguendo la consueta rappresentazione matematica, supponiamo che il solido  $\sigma$  di rivoluzione intorno all'asse  $x$ , a contorno regolare, sia tenuto fisso e sia investito da una corrente liquida irrotazionale stazionaria, la cui velocità asintotica  $V_0$  abbia la direzione e il verso dell'asse  $x$ .

Ammettiamo ora che si formi a valle dell'ostacolo  $\sigma$  un anello vorticoso simmetrico intorno all'asse  $x$ .

L'energia cinetica del liquido compreso tra  $\sigma$  e una sfera  $\sigma_\infty$  di raggio comunque grande è la somma dell'energia cinetica dovuta alla corrente irrotazionale, dell'energia cinetica dovuta alle velocità indotte dall'anello vorticoso e di un'interazione cinetica che al crescere di  $\sigma_\infty$  tende a zero <sup>(1)</sup>.

Dunque, l'energia  $e$  di formazione di un anello vorticoso, che è la differenza tra l'energia dovuta alla sovrapposizione della corrente irrotazionale e dell'azione concomitante dell'anello e l'energia della sola corrente, appare indipendente da questa.

Concludiamo che l'energia  $e$  è tutta e sola l'energia dovuta alle velocità indotte dall'anello vorticoso ed è quindi calcolabile, quando si conosca la funzione di Stokes (o di corrente)  $\psi$  dell'anello, con la formola

$$(1) \quad e = \pi \rho \int \psi \omega d\tau,$$

(1) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Interazione cinetica tra vortici e correnti irrotazionali*. « Rend. Lincei », 1937, p. 444.



l'integrazione essendo estesa alla sezione  $\tau$  dell'anello con un semipiano meridiano  $x, y$ ; vi appare il vortice  $\omega$  nel generico punto di  $\tau$  <sup>(1)</sup>.

Quando si tratti di anelli molto sottili si potrà supporre che  $\omega$  sia sensibilmente costante su  $\tau$ .

Siamo dunque condotti a determinare la funzione  $\psi$  dell'anello in presenza di un solido fisso.

Si sa che la determinazione delle velocità quando sia noto il campo dei vortici in presenza di un ostacolo esige la risoluzione preliminare di un sistema di equazioni integrali di Fredholm.

Si pone dunque il problema di ricercare la funzione di Stokes di un anello vorticoso in presenza di un solido di rivoluzione il cui asse coincida con quello dell'anello.

Il problema è manifestamente traducibile in un'unica equazione nell'incognita funzione, ma noi preferiamo rimandare ad altra occasione l'analisi della questione e consideriamo qui il caso più semplice della sfera in cui la determinazione della  $\psi$  si consegue con mezzi elementari <sup>(2)</sup>.

Supponiamo che la sezione meridiana  $\tau$  dell'anello vorticoso sia circolare e riguardiamo il suo raggio  $\varepsilon$  come una quantità del 1° ordine. Siano  $x_0, a$  le coordinate, nel semipiano meridiano  $x, y \geq 0$ , del centro di  $\tau$  e  $\Gamma$  l'intensità dell'anello.

La funzione  $\psi$  in presenza della sfera fissa  $\sigma$  è la somma della funzione  $\psi_1$  dell'anello in assenza della sfera e della funzione  $\psi_2$  dell'anello ottenuto dal precedente con un'inversione rispetto a  $\sigma$  e la cui intensità  $\Gamma'$  è legata a  $\Gamma$  dalla relazione

$$\Gamma' = -\frac{\delta}{R} \Gamma,$$

dove  $R$  è il raggio della sfera e  $\delta$  è la distanza di  $x_0, a$  dal centro.

Si sa <sup>(3)</sup> che

$$\psi_1 = \frac{\Gamma}{2\pi} ay \int_0^\pi \frac{\cos \alpha}{\Delta} d\alpha,$$

dove

$$\Delta^2 = (x - x_0)^2 + a^2 + y^2 - 2ay \cos \alpha.$$

Se  $x'_0, a'$  sono le coordinate (sul piano meridiano) dell'immagine di  $x_0, a$  rispetto alla sfera e si pone

$$\Delta'^2 = (x - x'_0)^2 + a'^2 + y^2 - 2a'y \cos \alpha,$$

(1) Cfr. H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6ª ed., n. 162, Cambridge, University Press, 1932.

(2) Cfr. G. LAMPARIELLO, *Un'applicazione del metodo delle immagini ai moti vorticosi*.

«Rend. Lincei», 1936, vol. XXIII, pp. 426-431.

(3) Cfr. H. LAMB, loc. cit., n. 161.

si ha per  $\psi$  l'espressione

$$(2) \quad \psi = \psi_1 + \psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi} ay \int_0^\pi \frac{\cos \alpha}{\Delta} d\alpha + \frac{\Gamma'}{2\pi} a'y \int_0^\pi \frac{\cos \alpha}{\Delta'} d\alpha.$$

Si tratta dunque di valutare l'integrale (1), introducendo per  $\psi$  la (2) e riguardando il vortice  $\omega$  costante su  $\tau$ .

Basterà calcolare il contributo  $e_1$  di energia dovuto alla  $\psi_1$ , dato da

$$(3) \quad e_1 = \pi \rho \int_\tau \psi_1 \omega d\tau,$$

in funzione delle caratteristiche  $x_0, a, \varepsilon, \Gamma$ , poichè allora il contributo  $e_2$  della  $\psi_2$  si otterrà con la stessa formola sostituendo le  $x_0, a, \varepsilon$  con le trasformate per inversione  $x'_0, a', \varepsilon'$  e ponendo  $\Gamma'$  al posto di  $\Gamma$ .

La valutazione asintotica dell'integrale (3) è stata fatta dal Maxwell<sup>(1)</sup> ed è riportata nel trattato più volte citato del Lamb, n. 163.

Si perviene alla formola

$$e_1 = \frac{1}{2} a \Gamma^2 \rho \left( \log \frac{8a}{\varepsilon} - \frac{7}{4} \right).$$

Dunque

$$e_2 = \frac{1}{2} a' \Gamma'^2 \rho \left( \log \frac{8a'}{\varepsilon'} - \frac{7}{4} \right).$$

Ammettiamo ora, com'è nella natura delle cose, che l'anello vorticoso circolare sia tangente alla sfera, con che la sezione  $\tau$  è un piccolo cerchio tangente alla sezione meridiana della sfera. La distanza  $\delta$  del centro di  $\tau$  dal centro della sfera è allora

$$\delta = R + \varepsilon$$

e il raggio  $\varepsilon'$  della sezione dell'anello ottenuto per inversione è dato da

$$\varepsilon' = R - \frac{R^2}{\delta} = R \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{R}} \right) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{R} + \dots$$

Si ha inoltre

$$a' = \frac{R^2}{\delta^2} a = \left( 1 - \frac{2\varepsilon}{R} \right) a$$

e

$$a' \Gamma'^2 = a \Gamma^2.$$

(1) Cfr. il Cap. XIV del *Treatise on Electricity and Magnetism*, artt. 704, 705.

Dunque

$$\frac{a'}{\varepsilon'} = \frac{a}{\varepsilon} \left(1 - \frac{2\varepsilon}{R}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon}{R}\right) = \frac{a}{\varepsilon} \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right)$$

e

$$\log \frac{8a'}{\varepsilon'} = \log \frac{8a}{\varepsilon} + \log \left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\right) = \log \frac{8a}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{R}.$$

Si ha così

$$(4) \quad e = e_1 + e_2 = \frac{1}{2} a \Gamma^2 \rho \left(2 \log \frac{8a}{\varepsilon} - \frac{7}{2} - \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

La resistenza  $R_e$  appare dunque legata alle caratteristiche fondamentali del fenomeno nel modo espresso dalla formola

$$(5) \quad R_e = \frac{1}{2} \frac{a \Gamma^2 \nu \rho}{V_o} \left(2 \log \frac{8a}{\varepsilon} - \frac{7}{2} - \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Si può anche scrivere

$$R_e = \frac{1}{2} \frac{a \nu}{V_o} \frac{\Gamma^2}{V_o^2} \rho V_o^2 \left(2 \log \frac{8a}{\varepsilon} - \frac{7}{2} - \frac{\varepsilon}{R}\right).$$

Si osservi ora che  $\frac{V_o}{\nu}$  è omogenea ad una lunghezza e che  $\Gamma$  è il prodotto di una velocità per una lunghezza; dunque  $\frac{a \nu}{V_o}$  è un numero puro e  $\frac{\Gamma^2}{V_o^2}$  è omogeneo ad un'area.

Ne segue, poichè l'espressione entro parentesi denota un numero puro, che l'espressione di  $R_e$  è ben conforme, dal punto di vista delle dimensioni, alla veduta newtoniana secondo cui la resistenza è proporzionale alla densità del fluido, al quadrato della velocità di traslazione del solido e ad un'area (l'area investita).

**Meccanica.** — *Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio del De Saint-Venant in un solido isotropo.* Nota di O. ZANABONI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. P. BURGATTI.

In una Nota precedente <sup>(2)</sup>, basandomi sulla proprietà del lavoro di deformazione di diminuire continuamente allorchè, lasciate invariate le forze superficiali agenti, e la zona di carico, il corpo si accresce con legge arbitraria ma determinata, ho dato la dimostrazione qualitativa del principio del De Saint-Venant.

Riprendendo i concetti ed i metodi allora impiegati, darò qui delle valutazioni di carattere quantitativo, pure del tutto generali, sulle approssimazioni dovute al principio stesso <sup>(3)</sup>.

1. Premettiamo l'enunciazione e la dimostrazione di alcuni teoremi valevoli nel senso più generale, e quindi anche per i solidi anisotropi.

Le proprietà di cui essi sono oggetto, discendono dall'ipotesi comune che il solido in questione sia reso libero nello spazio, e che sia soggetto ad un sistema di forze essenzialmente superficiali, che devono costituire, naturalmente, un sistema equilibrato.

È inoltre indispensabile che al suo contorno esista almeno una zona scarica, partendo dalla quale si possa procedere ad una progressiva applicazione di materia, e dedurre, da quello dato, una serie continua di corpi sempre più ampi.

Questo processo di accrescimento deve, all'occorrenza, potersi svolgere illimitatamente, essendo nello spirito del principio del De Saint-Venant, il paragone tra il comportamento elastico di un corpo di dimensioni comunque grandi, con quello di una sua parte di estensione, in confronto, generalmente assai ridotta, ed, in ogni caso, sempre finita.

Come indice della maggiore o minore approssimazione colla quale il principio vale per un determinato corpo, assumeremo allora l'ordine di infinitesimo della differenza  $L - \bar{L}$ , ove con  $L$  si indica il lavoro di defor-

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) *Dimostrazione generale del principio del De Saint-Venant.* «Rendiconti Accademia dei Lincei», 1937, febbraio, fascicolo 3.

(3) Le stesse finalità, esaminando direttamente la variazione delle tensioni interne, sono state raggiunte dal Supino per un corpo isotropo, piano, convesso, in *Sopra alcune limitazioni per sollecitazione elastica e sopra la dimostrazione del principio del De Saint-Venant.* «Annali di Matematica Pura ed Applicata», ser. IV, to. IX, anno 1931.

mazione in un generico stato di accrescimento intermedio, e con  $\bar{L}$  il limite di  $L$  quando il solido si accresce indefinitamente con una legge prefissata.

**TEOREMA I.** — *In un corpo che soddisfa alle ipotesi indicate, la convergenza al limite del lavoro di deformazione, avviene con una rapidità che non dipende dal sistema delle forze applicate, ma solo dalla forma del corpo stesso.*

Applichiamo al solido dato un sistema di forze  $A$  che dia luogo al lavoro di deformazione  $L_A$ .

Se  $\bar{L}_A$  è il limite di  $L_A$  quando le dimensioni del corpo si accrescono indefinitamente secondo una legge prefissata, possiamo porre:

$$L_A = \bar{L}_A + \alpha$$

dove  $\alpha$ , in virtù della circostanza più volte ricordata che  $L_A$  varia decrescendo, si mantiene sempre positiva e diviene infinitesima durante il passaggio al limite.

Le stesse cose si possono ripetere per un secondo sistema  $B$ , per il quale si pone:

$$L_B = \bar{L}_B + \beta.$$

Consideriamo ora il sistema  $A + B$ , ed il relativo lavoro che può esprimersi mediante la somma dei lavori diretti  $L_A, L_B$ , e del lavoro indiretto  $L_{AB}$ .

Poichè ciascuno dei tre lavori diretti che compaiono in questa relazione tende ad un limite, e per il noto teorema che il limite della somma uguaglia la somma dei limiti quando il numero degli addendi è costante, avremo che anche  $L_{AB}$  tende ad un limite, e si potrà scrivere:

$$L_{AB} = \bar{L}_{AB} + \gamma.$$

Contrariamente ai casi precedenti, qui potremo dire della variabile  $\gamma$  soltanto che essa diviene infinitesima: nulla si potrà asserire circa il suo segno, il quale dipende dal segno di  $L_{AB}$  che, a sua volta, deriva dai sensi relativi dei due sistemi  $A, B$ .

Scelto ora un numero a piacere  $m$ , si consideri il sistema  $C = A + mB$ , ed il suo lavoro  $L_C$ .

Procedendo per sovrapposizione degli effetti, si avrà:

$$L_C = \bar{L}_C + \alpha + m^2\beta + m\gamma$$

dove, in linea generale, si dovrà supporre che gli infinitesimi  $\alpha, \beta, \gamma$ , siano di ordine diverso.

Siccome la rapidità di convergenza al limite di  $L_C$  è data dall'infinitesimo di ordine più basso, esaminiamo quale ipotesi si possano formulare al riguardo, vagliando quelle che non danno luogo ad alcuna incompatibilità.



Sia dunque dapprima  $\gamma$  di ordine inferiore ad  $\alpha$  e  $\beta$ .

Ricordando la constatata possibilità per  $\gamma$  di assumere il segno negativo, scegliamo per  $m$  quello tra i due valori 1, e  $-1$ , che rende negativo il termine  $m\gamma$ .

Per il particolare sistema C così costruito dovrebbe, in base a ciò, risultare che  $L_C$  tende al proprio limite crescendo, e siccome questo non è possibile, così non è accettabile la nostra ipotesi su  $\gamma$ .

Siano allora  $\beta$  e  $\gamma$  di ordine superiore ad  $\alpha$ .

In tal caso, qualunque si sia il valore di  $m$ , vale a dire anche quando il sistema  $mB$  divenga prevalente su A, l'infinitesimo di ordine più basso resterebbe sempre  $\alpha$ , e quindi, anche numericamente, l'effetto di A si conserverebbe sempre preponderante su quello di  $mB$ .

Siamo dunque di nuovo caduti in una contraddizione che ci dimostra l'impossibilità di questa nostra seconda ipotesi.

Scambiando  $\alpha$  con  $\beta$ , si ha nello stesso modo che  $\alpha$  e  $\gamma$  non possono essere entrambi di ordine inferiore a  $\beta$ .

Siano ora  $\beta$  e  $\gamma$  dello stesso ordine tra di loro, ed  $\alpha$  di ordine superiore.

L'infinitesimo di ordine più basso resta  $m^2\beta + m\gamma$ , e, per quanto ci è noto, esso deve sempre essere positivo per qualsiasi valore di  $m$ .

Ciò però non si verifica se  $m$  varia entro l'intervallo  $\left[ -\frac{\gamma}{\beta} \div 0 \right]$  e ciò è sufficiente per eliminare l'ipotesi da cui siamo partiti.

Alle stesse conclusioni si perviene scambiando  $\alpha$  con  $\beta$ , e supponendo che  $\alpha$  e  $\gamma$  siano dello stesso ordine tra di loro, e di ordine inferiore a quello di  $\beta$ .

A questo punto non rimane che supporre  $\alpha$  e  $\beta$  dello stesso ordine tra di loro, e di ordine uguale od inferiore a quello di  $\gamma$ .

Tale ipotesi non porta evidentemente ad alcuna incongruenza, e permette di concludere che, per i tre sistemi A, B, C, la convergenza al limite avviene colla stessa rapidità.

Ricordata l'assoluta arbitrarietà di A, B, e quindi anche di C, il teorema resta di conseguenza provato nel modo più generale.

**TEOREMA 2.** — *Il principio del De Saint-Venant è verificato con più forte rapidità per i corpi che, a parità di ogni altra circostanza, sono maggiormente assottigliati al di là della zona caricata.*

Sia un corpo  $C_1$  nelle solite condizioni, dal quale, a partire da un certo punto, togliamo un pò di materia in modo da provocare una strozzatura sulla cui entità ed estensione non si formula alcuna ipotesi.

Si ottiene così un nuovo corpo  $C_2$  coincidente per un certo tratto con  $C_1$ , soggetto nella stessa zona di contorno allo stesso sistema di forze, e che può paragonarsi con  $C_1$  ad ogni istante in un comune stato di accrescimento.

Esaminiamo ora il modo di variare della differenza  $\delta L = L_2 - L_1$  tra i lavori di deformazione che competono in un momento qualsiasi a  $C_2$  e  $C_1$ .

Fintantochè i due corpi rimangono contenuti entro il tratto iniziale in cui essi coincidono, i lavori sono uguali e  $\delta L$  si annulla.

In tutti i punti successivi,  $C_1$  si ricava da  $C_2$  per aggiunta di materia, e quindi, per cose note <sup>(1)</sup>, deve essere  $L_2 > L_1$ , ossia  $\delta L > 0$ .

Ne consegue, per ragioni di continuità, che esiste un certo tratto lungo il quale  $L_2 - L_1$  è crescente.

Supponiamo, se è possibile, che esso sia di lunghezza finita, e che quindi si possa individuare un punto P in cui  $\delta L$  risulti invece decrescente.

Osserviamo allora che le quantità  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\delta L$ , dipendono soltanto dal modo col quale i due corpi hanno variato fino al punto considerato, ma che non possono dipendere da quelle che saranno le variazioni future, seguenti il punto stesso: osserviamo inoltre che, sia pure introducendo cambiamenti repentini di sezione, le tensioni interne, e conseguentemente  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $\delta L$ , variano con continuità.

Ciò posto, se dal punto P in avanti tronchiamo  $C_2$ , mentre lasciamo accrescere  $C_1$ , il lavoro  $L_2$  resta costante, ed il lavoro  $L_1$  diminuisce progressivamente.

Ne deriva che, appena al di là di P, la  $\delta L$  risulta crescente, mentre al di qua, per ipotesi, era decrescente.

Non accordandosi tutto questo colla continuità, ne segue che in P, come in ogni altro punto fuori del tratto comune a  $C_1$  e  $C_2$ , la  $\delta L$  è sempre crescente.

Per due successivi gradi di accrescimento dei due corpi, vale dunque la diseuguaglianza:

$$L_2^{(a)} - L_1^{(a)} < L_2^{(b)} - L_1^{(b)}.$$

Od anche:

$$L_2^{(a)} - L_2^{(b)} < L_1^{(a)} - L_1^{(b)}.$$

Ricordando che in entrambi i corpi il lavoro è decrescente, i due membri della relazione precedente sono positivi, e ciascuno di essi esprime l'errore assoluto che si commetterebbe qualora si valutasse il lavoro di deformazione limitando i due corpi in  $[a]$  invece che in  $[b]$ .

Siccome poi è  $C_2 < C_1$ , così è sempre  $L_2 > L_1$ , e, a maggior ragione, la diseuguaglianza resta valida per gli errori relativi.

In virtù del teorema precedente, il quale dimostra che l'unica possibilità di variazione della rapidità di tendenza al limite è offerta dal cambiamento della legge di accrescimento del corpo, potremo quindi concludere che, per il corpo più assottigliato, è più rapidamente verificato il principio del De Saint-Venant.

E ciò è appunto quanto si doveva dimostrare.

(1) Vedi la mia Nota citata in (2).

COROLLARIO. — *Di due corpi che differiscono tra di loro unicamente per il fatto che l'uno possiede più connessioni interne dell'altro, il secondo verifica il principio del De Saint-Venant con più forte rapidità.*

Possono infatti verificarsi due casi: o la maggiore connessione interna si ottiene applicando effettivamente della materia al corpo originario, ed allora si rientra direttamente nel caso contemplato dal 2° teorema; oppure i punti da connettersi si trovano già inizialmente a contatto, ed il collegamento si ottiene istituendo semplicemente la continuità, senza un vero e proprio apporto di materia.

In questa seconda ipotesi permane tuttavia la condizione che ha permesso di dedurre il teorema fondamentale sull'andamento decrescente del lavoro di deformazione<sup>(1)</sup>, la quale si riassume nel fatto che, mentre nello stato iniziale una superficie che faceva parte del contorno del corpo dato era libera da forze, nella successiva condizione essa diviene invece una superficie di ideale separazione tra due parti contigue del nuovo corpo, e, come tale, è soggetta ad un regime di tensioni interne costituenti un sistema equilibrato di forze non nulle.

Essendo valido il teorema fondamentale, è anche provato che, per il fatto della connessione, il lavoro di deformazione deve diminuire.

Si crea quindi, nei due corpi da paragonarsi, quella relazione tra i rispettivi lavori di deformazione che consente di ripetere parola per parola la dimostrazione del teorema 2°.

La maggiore connessione interna equivale quindi, a tutti gli effetti che ci interessano, ad aggiunta di materia.

2. — I risultati conseguiti al paragrafo precedente permettono, in seguito a confronto con casi concreti noti, o per mezzo di un calcolo diretto assumendo quel sistema di forze a piacere che più si reputa conveniente al caso che si esamina, di assegnare dei valori maggioranti per l'errore dovuto all'applicazione del principio del De Saint-Venant.

Senonchè non è possibile fornire maggiori precisazioni altro che introducendo ipotesi più determinate sui corpi in esame, e giacchè la condizione indubbiamente più interessante sia dal punto di vista teorico, sia da quello pratico, è quella dell'isotropia, così supporremo per il seguito di trovarci in questo caso, e, per semplicità di linguaggio, ci riferiremo dapprima ai sistemi piani.

Tra tutti questi, secondo il teorema 2°, l'errore massimo (che secondo i nostri concetti identifichiamo colla più lenta convergenza al limite del lavoro di deformazione) si riscontrerà in quel corpo che, procedendo verso le estreme regioni del piano, a partire dalla zona caricata, si espanderà nel modo più rapido ed ampio possibile.

(1) Vedi la mia Nota citata in (2).

L'errore sarà ulteriormente accresciuto se, come afferma il corollario dello stesso teorema, introduciamo il maggior numero possibile di connessioni interne.

Tutte queste condizioni si realizzano assumendo una cavità caricata internamente da un sistema equilibrato di forze, e contornandola con strati di materia di spessore ugualmente crescente secondo ogni raggio partente dal centro della cavità assegnata, in modo da coprire gradatamente tutto il piano.

A sufficiente distanza dal contorno interno, il bordo esterno del corpo differirà di poco da una circonferenza, mentre, alla cavità interna, per evidenti ragioni di simmetria, si dovrà pure assegnare la forma circolare, allo scopo di raggiungere quel massimo che ci prefiggiamo.

In sostanza, il caso più sfavorevole dal punto di vista della più lenta convergenza al limite del lavoro di deformazione, è offerto da una corona circolare di spessore continuamente crescente.

Secondo il teorema 1°, il sistema di forze da prendere in considerazione è completamente arbitrario, e perciò assumeremo una pressione unitaria uniforme, agente normalmente su tutto il perimetro interno.

Il caso è notissimo, e fu studiato del Lamè: con notazioni evidenti si hanno per esso le tensioni interne:

$$\sigma_r = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 - \frac{R_e^2}{r^2} \right) \quad \sigma_t = \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \left( 1 + \frac{R_e^2}{r^2} \right).$$

Il lavoro di deformazione per tutto il corpo, fino al raggio  $R_e$ , è dato da:

$$L = \frac{\pi R_i^4}{mE(R_e^2 - R_i^2)} \left[ (m-1) + (m+1) \frac{R_e^2}{R_i^2} \right].$$

Se facciamo tendere  $R_e$  all'infinito, il corrispondente lavoro diviene:

$$\bar{L} = \frac{\pi(m+1)}{m} R_i^2.$$

L'errore assoluto massimo è dunque:

$$\Delta L = L - \bar{L} = \frac{2\pi R_i^2}{E(R_e^2 - R_i^2)}$$

e l'errore relativo:

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{\bar{L}} = \frac{2m}{m+1} \cdot \frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}.$$

Indicando con  $R$  la minima distanza tra il punto che si considera e la zona caricata, quando  $R_e$  è sufficientemente grande, l'errore, assoluto o relativo, assume la forma  $AR^{-2}$ .

In base a quanto sappiamo, esso rappresenta il massimo possibile per un solido nel piano, nel senso che l'applicazione del principio del De Saint-Venant darà luogo a delle differenze che potranno essere inversamente proporzionali, al massimo, al quadrato della distanza.

In genere la rapidità di convergenza sarà ancora maggiore.

In maniera del tutto analoga si può impostare la trattazione per un corpo isotropo nello spazio, e si giungerà a considerare una sfera cava soggetta nel suo interno ad una pressione normale uniforme di intensità unitaria.

Impiegando di nuovo i risultati conseguiti dal Lamè, si perviene, collo stesso procedimento già usato, e con pari facilità, alla conclusione che, nello spazio, l'errore massimo è inversamente proporzionale al cubo della distanza.

Nello spazio, dunque, si avranno da considerare in ogni caso degli infinitesimi del terzo ordine almeno.

**Geofisica (Sismologia).** — *I risultati scientifici d'una grande mina.* Nota di G. AGAMENNONE, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio F. MILLOSEVICH.

A scopo industriale fu deciso l'abbattimento della cresta d'uno sperone in una cava di marmo di Carrara, prima segandone la base col filo elicoidale, e poi facendola saltare mediante due mine a brevissimo intervallo: la 1<sup>a</sup> con 200 kg. di cheddite, la 2<sup>a</sup> con 20.000 kg. di polvere nera. Poichè era una bella occasione per sfruttare questo pseudosismo a scopo di studio, il direttore del R. Ufficio Centr. di Met. e Geofisica incaricò il geofisico capo, prof. C. Alessandri, di approntare i necessari strumenti pel 21 novembre 1936, giorno stabilito per la grandiosa esplosione. Come stazione sismica fu scelta una galleria a m. 240 dalla mina. Mediante un cronometro di marina — regolato a 0<sup>s</sup>.05 — e con l'ausilio di due cronografi astronomici, l'Alessandri dispose le cose con meticolosa cura per determinare i precisi istanti di accensione ed esplosione delle mine.

Lo scotimento del suolo fu registrato col trepidometro «Agamennone» <sup>(2)</sup> a due componenti (la verticale e l'orizzontale orientata verso la mina), il quale diè un bel sismogramma con l'inizio a 10<sup>h</sup> 3<sup>m</sup> 36<sup>s</sup>, 4 (Gr.) e brusco rinforzo a 10<sup>h</sup> 3<sup>m</sup> 36<sup>s</sup>, 8 dovuto alla seconda più potente esplosione. Tanto l'inizio che il rinforzo indicarono sollevamento e contemporaneo moto orizzontale del suolo verso la mina con onde di ca. 0.<sup>s</sup>1 di per., seguite da altre meno rapide (ca. 1<sup>s</sup>). Risultarono accelerazioni fino a ca. 90 gal per la

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) G. CICONETTI, *Il trepidometro portatile «Agamennone»*. (« Boll. Soc. Sism. It. », XXXIV, 1936, p. 11).



comp. orizzontale e 130 per la verticale, valori corrispondenti a sismi distruttivi e ritenuti eccessivi dall'Alessandri, e ciò per le esperienze dell'ing. Perri sulle vibrazioni rapide del suolo, eseguite con lo stesso trepidometro adoperato come sismografo e accelerometro <sup>(1)</sup>. Veramente era stato installato anche un accelerometro « Agamennone » <sup>(2)</sup>, ma al momento opportuno non poté funzionare per le difficili condizioni in cui si operava.

A maggior distanza, lo scotimento fu appena registrato dal solo osservatorio di S. Domenico in Prato a 82 km. dalla mina. L'inizio (*eP*) del sismogramma fu a  $10^h 3^m 54^s,6$  e il rinforzo (*S*) a  $10^h 4^m 3^s,8$ ; la differenza *S-P* corrisponde bene alla distanza. Dal confronto di queste ore con quella ( $10^h 3^m 36^s,8$ ) della seconda esplosione risulta la velocità di ca. 4600 m./sec. per le onde longitudinali *P* e 3000 per le trasversali *S*. Questi sono i risultati esposti in una Relazione dell'Alessandri, pubblicata a p. 3 del volume XXXV (1937) del « Boll. d. Soc. Sism. Italiana ».

\*  
\* \*

Ma il sismogramma di Carrara si presta ad altre considerazioni di particolare importanza, perchè conferma, una volta di più, la simmetria con la quale la registrazione — anche per questo genere di pseudosismi — si compie attorno alla posizione di riposo degli stili scriventi. Contraddice a questa regola soltanto la *singularissima anomalia* su cui il prof. Oddone richiamò l'attenzione, per le sue esperienze di Genova nel 1930 <sup>(3)</sup> con un sismografo da lui ideato e costruito per la circostanza, in cui la prima delle due leve amplificatrici era attratta da una calamita fissata al pendolo. In sette esperienze, dove la carica delle mine variò da 80 a 1300 kg. di esplosivo e la distanza da 113 a 400 m., egli restò impressionato che *tutti* i sismogrammi cominciavano con due notevoli *semionde eccentriche* che si sviluppavano, cioè, da un solo lato sulla linea di riposo, come mostra la fig. 1, riproduzione al naturale del sismogramma del 16 febbraio 1930, uno di quelli da lui riportati.

Orbene questo fenomeno così strano che non si è punto verificato nè a Carrara, nè in tante altre località per esplosioni grandi o piccole e anche a diverse distanze, fa giustamente pensare a una imperfezione del sismografo, e precisamente all'eventualità ammessa dallo stesso O. scrivendo:

(1) E. PERRI, *Alcune ricerche sperimentali sull'accelerazione verticale del suolo*. (Ivi, p. 179).

(2) G. AGAMENNONE, *Sopra alcuni tipi di accelerometri sismici*. « La Met. Pratica », IV, p. 31, Subiaco, 1923). (« Ciel et Terre », XXXIX, Juin 1923, p. 137, Bruxelles).

(3) E. ODDONE, *Per la determinazione delle conseguenze degli spari di mine ecc.* (« Boll. Soc. Sism. It. », XXX, 1931-32, p. 9); *Sur quelques particularités dans l'enregistrement d'un pendule horizontal atteint par les ondes explosives*. (« Publ. Bureau Centr. Sèism. Intern. », Sér. A, fasc. n. 7, p. 57. Toulouse, 1932).

Poteva ben darsi che per i moti bruschi provocati dalle esplosioni, la leva si staccasse temporaneamente dalla catamita, e così la penna non segnasse correttamente. Io stesso ebbi a riconoscere questa possibilità in un mio sismografo, costruito nel 1906 con l'impiego d'un magnete collegato al braccio corto della leva amplificatrice; sicchè dopo molti anni d'esperienza dovetti ricorrere a diverso sistema di collegamento. La spiegazione del distacco fu però

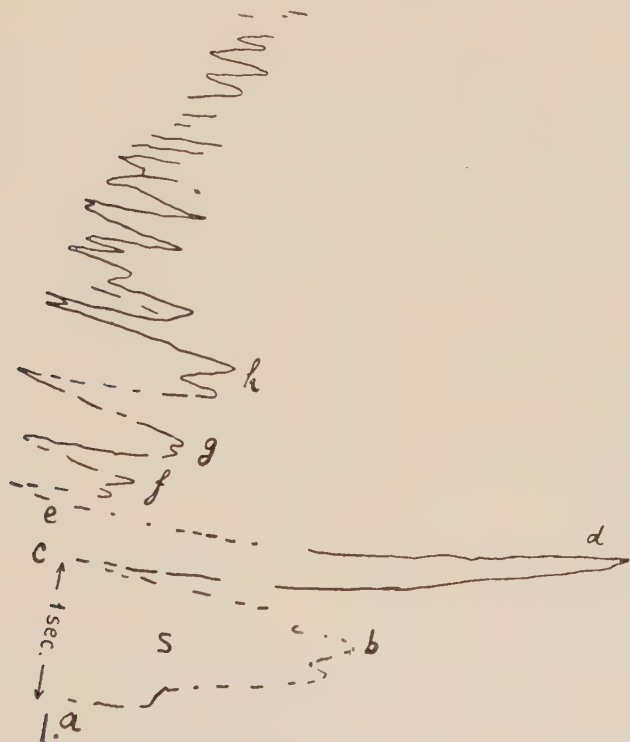


Fig. 1.

esclusa dall'O. per la rassomiglianza di tutti i suoi sismogrammi, impossibile ad aversi, secondo lui, per cause accidentali. Ma quello che vieppiù lo indusse a dare gran peso all'anomalia in questione, fu la concordanza tra la forma del sismogramma sperimentale e quella del sismogramma che la teoria lascia prevedere, quando alla superficie d'un solido elastico omogeneo si dà un energico impulso. Questa teoria, svolta dal Lamb<sup>(1)</sup>, conduceva all'esistenza d'un'onda solitaria in senso verticale che l'O. credette di riconoscere nelle due semionde eccentriche riscontrate nelle esperienze di Genova; e per dimostrare che un'oscillazione verticale del suolo effettivamente si può tradurre

(1) H. LAMB, *On the propagation of tremors over the surface of an elastic solid.* («Phyl. Trans.», vol. 203, Londra, 1904).

nella comp. orizzontale d'un sismografo in due semionde volte dalla stessa parte, e perciò asimmetriche alla linea di riposo, egli sperimentò su di un apparato appositamente costruito. *Se ad un nastro elastico, egli scrive, stirato orizzontalmente si imprime un moto oscillatorio verticale, sia che il nastro prenda la concavità verso l'alto, o verso il basso, ogni punto di esso si sposta orizzontalmente verso il centro del nastro. Un'oscillazione completa verticale dà luogo a 2 SEMIONDE VOLTE DALLA STESSA PARTE.*

\*  
\* \*

La questione è interessante, poichè implica la conferma sperimentale d'una concezione teorica, e quindi ritengo giunto il momento per discutere le esperienze di Genova, ora che l'anomalia in questione è venuta a mancare anche a Carrara. Sorge quindi spontaneo il dubbio che nelle esperienze dell'O. sia proprio intervenuto il distacco della principale leva dalla calamita. Qui non può trattarsi di cause accidentali, ammesse da lui, bensì sempre della stessa causa, da cui sono derivati identici effetti. Il modo più naturale per spiegare le due semionde iniziali — così eccentriche e vistose della fig. 1 — è che al primo impulso si è staccata la leva e, lanciata via, ha originato la semionda *abc*; poi, dopo ristabilita una momentanea attrazione, è sopraggiunto altro forte impulso provocando nuovo distacco e la semionda *cde*, seguita dalle altre minori *f, g, h* ecc. fino a che l'attacco magnetico non è più mancato, e solo allora sono apparse le onde rapide. Tale spiegazione è corroborata dalla mina del 5 aprile 1930 (soli 80 kg. di carica), per la quale la pretesa *onda solitaria* fu sostituita da onde rapide e di lieve ampiezza, e questo perchè la leva non si sarebbe mai distaccata per la minore vibrazione del suolo.

Una conferma indiretta a questa spiegazione viene dall'eccessiva ampiezza all'inizio dei sismogrammi di Genova in contrapposto a quella assai minore riscontrata a Carrara, sebbene l'ingrandimento e il periodo strumentale dei due sismografi fossero quasi gli stessi, e non troppo diversa la distanza dalle mine e la natura della roccia. È vero che il sismografo di Genova era sul faro alto 78 m., ma — si noti bene — installato a soli 25 m. dal suolo e in un punto dove i muri avevano lo spessore di ben 2 m.; quindi è da credere che, grazie a queste circostanze, l'ubicazione dello strumento non abbia potuto influire tanto da renderne così ampi i tracciati. Nell'esperienza del 16 febbraio 1930 (fig. 1), con 1300 kg. di esplosivo ed una distanza di 400 m., si ebbe sul sismogramma un'onda di 70 mm. corrispondente a ben 2 mm. per l'effettivo moto. Il confronto di questa ampiezza con quella di ca. 0.3 mm. ottenuta a Carrara — ad una distanza assai minore (240 m.) e con una carica assai più potente (20.000 kg.) — dovrebbe far ritenere che non tutta la differenza tra le dette ampiezze può ragionevolmente attribuirsi alla diversa ubicazione dei sismografi.

Un'altra ragione è che l'anomalia mancò nei tracciati del *vibrografo*, altro strumento che registrava il moto orizzontale sullo stesso tamburo del

sismografo di Genova. Orbene i sismogrammi del vibrografo risultarono sempre simmetrici per rispetto alla linea di riposo; eppure, malgrado il rapido periodo strumentale, un indizio dell'onda solitaria si sarebbe pur dovuto manifestare.

Tornando poi all'esperienza dell'O. col nastro teso fra due punti, per dimostrare la formazione delle onde eccentriche — da lui ritenute strettamente legate all'onda solitaria del Lamb — non può reggere il paragone tra questo esperimento da laboratorio<sup>(1)</sup> e ciò che avviene nel suolo. Ad ogni modo, i punti fissi non esistono affatto nel suolo, o bisogna supporli ad una distanza tra loro per lo meno di centinaia di metri, mentre il moto verticale potrà tutt'al più essere stato di qualche millimetro; e in tali condizioni è ovvio che per porre in evidenza l'infinitesima proiezione orizzontale della traiettoria di un punto del suolo, occorrerebbe un ingrandimento strumentale immensamente superiore a quello (35) adottato dall'O. Il moto verticale per la grandiosa mina di Carrara risultò non più di un mezzo millimetro, dunque, in gran disaccordo con le grandi ampiezze dei tracciati di Genova le quali, interpretate dall'O. quali spostamenti orizzontali provocati da sussulto del suolo, lascerebbero supporre per la comp. verticale un ben più notevole valore. Si potrebbe obiettare che il sismografo di Carrara era entro una galleria e quello di Genova sul faro e quindi soggetto ad un maggior rimbalzo — come avviene nell'ultima di una serie di palle urtate — ma effettivamente il faro dovè ben poco essere scosso, se con la mina di kg. 80 d'esplosivo del 3 febbraio 1930 gli apparati restarono indisturbati, e con quella di kg. 1300 (fig. 1) *gli effetti fisiologici e meccanici*, scrive l'O., *furono minori di quanto si attendeva..... La sola relicella, tipo Auer, del faro cadde!* Si aggiunga che l'accelerometro « Galitzin » (10 m. più in alto del sismografo) e quello « Agamennone » (sulla cima del faro) indicarono rispettivamente meno di 25 e 50 gal. Ora tutto ciò contrasta con la grande ampiezza delle prime due semionde (fig. 1); poichè se s'interpretassero, con l'O., quali comp. orizzontali della traiettoria d'un punto del suolo per effetto del sussulto, questo avrebbe dovuto essere enorme. A conferma del lievissimo moto sussultorio sta la mina del 7 marzo 1930 con 105 kg. di carica a 130 m., per la quale il vibrografo — adoperato questa sola volta, per registrare la comp. verticale — diè una microscopica perturbazione.

A favore dell'ipotesi del distacco della leva, v'è pure da notare che nelle esperienze dell'O. sono apparse prima le onde lente, poi le rapide, e tutte con l'ampiezza maggiore all'inizio, proprio all'opposto che a Carrara e in contrasto con i sismogrammi del vibrografo di Genova che cominciano con onde minime. Infine, nella fig. 1, non si saprebbe spiegare il periodo della prima semionda più che doppio della successiva, se non con l'irregolare funzionamento della leva, resa folle per il distacco dalla calamita.

(1) In verità superfluo, poichè il risultato ne era intuitivo.



\*  
\* \*

A sostegno della sua tesi, l'O. si è anche basato sulla registrazione di un sismografo sulla torre del Collegio Romano, dovuta all'esplosione d'una polveriera <sup>(1)</sup>; ma egli riportò il solo tracciato N-S, in cui credè di ravvisare l'onda solitaria. Affinchè si possa meglio giudicare in proposito, riproduco il sismogramma intero <sup>(2)</sup>. Sulla comp. *N* (fig. 2) l'anomalia è posta

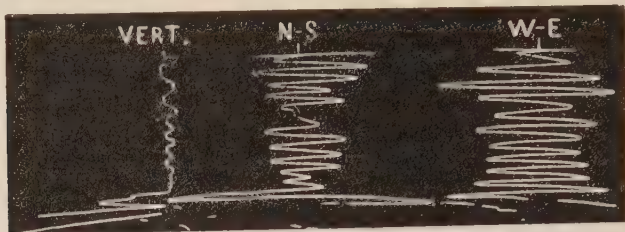


Fig. 1.

dall'O. — a causa della distanza di 4 km. dalla polveriera — tra l'inizio del tracciato e il brusco rinforzo, dovuto all'arrivo dell'ondata atmosferica; ma se si esamina attentamente la pretesa onda solitaria, si è portati, invece, a ritenerla quale un'interferenza tra i moti dissincroni del suolo e della torre <sup>(3)</sup>. Questa interpretazione è avvalorata dalla regolarità delle onde nella comp. *E* che sebbene alquanto divergente dalla direzione  $S28^{\circ}W-N28^{\circ}E$  (sismografo-polveriera), fu anzi la più attiva, e, insieme alla comp. verticale, avrebbe pur dovuto mostrare qualche indizio di anormalità.

Un forte dubbio sorge ancora sul calcolo dell'O. per il giusto posto assegnato all'onda solitaria sul tracciato N-S, e ciò per la circostanza a lui sfuggita, che quando la lastra — su cui scrivevano gli stili — si pose in moto per effetto d'un sismoscopio, altre oscillazioni precedenti avranno potuto sovrapporsi all'inizio del sismogramma, come il Tacchini pose in evidenza; e poichè è ignoto l'intervallo di tempo tra il primo moto della torre e l'inizio della corsa della lastra, che valore può avere la posizione assegnata alla supposta onda solitaria in mezzo alle dieci onde che precedono il note-

(1) P. TACCHINI, *Sulle indicazioni dei barografi e dei sismografi in occasione dello scoppio della polveriera presso Roma.* («Rend. R. Acc. Lincei», VII, seduta del 10 maggio 1891, p. 365).

(2) Il sismogramma è riportato nella seguente Memoria: G. AGAMENNONE, *Il terremoto a Roma del 22 gennaio 1892 ecc.* («Annali Ufficio Centr. di Met. e Geod.», Part. 1<sup>a</sup>, XII, 1890. Roma, 1893).

(3) Nè si può escludere che il rallentamento del periodo in qualche onda sia soltanto apparente dovuto, cioè, a irregolarità nella corsa della lastra, su cui scrivono gli stili, comandata da un roteggio privo di regolatore.



vole rinforzo? Il sismogramma di Roma non può dunque presentare alcun valore probativo per la tesi dell'O.; e ciò aggiunto a tutte le considerazioni sopra esposte, deve far concludere che la *singolarissima anomalia*, sulla quale egli richiamò l'attenzione dei sismologi fu dovuta verosimilmente all'imperfezione dello strumento da lui adoperato.

**Geodesia.** — *Sulle relazioni tra le deviazioni della verticale e le anomalie gravimetriche.* Nota di G. BOAGA, presentata dal Socio E. SOLER.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Fisica.** — *Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt.* Nota II di S. FRANCHETTI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TIERI.

Nella Nota precedente ho dato una formula per il calcolo della perdita  $\Delta R^*$  di penetrazione che gli elettroni subiscono per effetto delle piccole deviazioni (statistiche) nel loro passaggio attraverso uno schermo. È questa la

$$(8) \quad \Delta R^* = \frac{I}{2f} \int_1^{W_0} (\overline{\alpha_{W,N}^2} + \overline{\alpha_{W,E}^2}) dW$$

col significato dei simboli indicato e dove  $\overline{\alpha_{W,N}^2}, \alpha_{W,E}^2$  (rispettivamente i quadrati degli scarti angolari medi dovuti alle deviazioni nucleari ed elettroniche) sono da calcolare per mezzo della (7). L'uso di questa formula implica di conoscere le distribuzioni  $G_N(\theta), G_E(\theta)$  delle deviazioni singole  $\theta$ , o almeno le medie  $\overline{\theta_N^2}, \overline{\theta_E^2}$ , per i due tipi di deviazioni, nel tratto di percorso in cui l'energia cade da  $W_0$  a  $W$ .

Consideriamo le deviazioni nucleari. Una formula molto attendibile sulla diffusione degli elettroni di grande energia in un campo coulombiano è quella che Mott <sup>(2)</sup> ha ricavato adoperando l'equazione di Dirac.

Per piccoli angoli questa formula dà per la sezione d'urto differenziale  $\sigma_\theta d\theta$  per una deviazione fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$  in un azimut qualunque:

$$(9) \quad \sigma_\theta d\theta = \pi Z^2 \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{1}{W^2} \left( \frac{W+1}{W+2} \right)^2 \frac{\cos \theta/2}{\sin^3 \theta/2} d\theta$$

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) MOTT, *Atomic collisions*, Oxford, 1933, p. 58.

dove è stata fatta la posizione  $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 = W$ , ossia è stata indicata con  $W$  l'energia cinetica dell'elettrone misurata in unità  $mc^2$ .

Il numero di deviazioni  $N(W, \theta) dW d\theta$  comprese fra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , nell'intervallo di energia  $W$ ,  $W + dW$  è con le solite notazioni

$$(10) \quad N(W, \theta) dW d\theta = N dx \sigma_\theta d\theta$$

dove  $dx$ , elemento di percorso è legato a  $dW$  dalla relazione  $\left| \frac{dW}{dx} \right| = f(u) = f(W + 1)$  dove  $f(u)$  è la funzione data da Bethe e Williams per il frenamento degli elettroni (formula (1') della Nota precedente). Siccome nel tratto considerato  $f(u)$  varia poco, si può sostituirla con un valore medio costante  $\bar{f}$ . Tenendo conto di questo e del fatto che gli angoli che importano sono piccoli, si ha da (9) e (10)

$$(11) \quad N(W, \theta) dW d\theta = \frac{8N}{\bar{f}} \sigma_E Z^2 \frac{1}{W^2} \left( \frac{W+1}{W+2} \right)^2 \frac{d\theta}{\theta^3} dW$$

dove è stato posto:  $\sigma_E = \pi \left( \frac{e^2}{mc^2} \right)^2$ .

Questa formula vale per un campo coulombiano e potrebbe valere per il campo dell'atomo soltanto se l'azione di schermo fosse trascurabile. In realtà questa azione è essenziale per le piccole deviazioni, data la loro grande sezione d'urto; rigorosamente bisognerebbe perciò riprendere il problema della diffusione dalle sue basi, ma siccome le deviazioni nucleari sono quelle che danno il contributo minore nell'effetto che c'interessa, ci si può limitare a un calcolo approssimativo facendo una media dei valori di  $Z_{\text{eff}}^2$  per tutte le distanze dal nucleo:

$$(12) \quad \bar{Z}^2 = \frac{1}{\sigma_A} \int_0^\infty Z_{\text{eff}}^2 2\pi r dr$$

con  $\sigma_A$  sezione dell'atomo.

Per passare dalla (11) a  $G_N$  dovremo perciò sostituire  $Z^2$  con  $\bar{Z}^2$  e integrare in  $dW$  fra  $W$  e  $W_0$ . Viene

$$(13) \quad G_N d\theta = \frac{8N}{\bar{f}} \sigma_E \bar{Z}^2 \int_W^{W_0} \frac{1}{W^2} \left( \frac{W+1}{W+2} \right)^2 dW \cdot \frac{d\theta}{\theta^3}.$$

Per la (7) della Nota precedente si ha  $\bar{\alpha}_W = \frac{8}{\pi^2} \int_{W_0, W}^\infty G \theta^2 d\theta$ . Viene perciò

$$(14) \quad \bar{\alpha}_{W, N}^2 = \frac{64N}{\pi^2 \bar{f}} \sigma_E \bar{Z}^2 \int_W^{W_0} \frac{1}{W^2} \left( \frac{W+1}{W+2} \right)^2 dW \cdot \log \frac{\pi}{\theta_{\min.}}$$

Resta da determinare la deviazione minima  $\theta_{\min.}$ , la quale è funzione di  $W$ . La miglior cosa da fare, data la schematizzazione ammessa di una carica  $Z_{\text{eff.}}$  indipendente dal raggio e di quadrato eguale a  $\bar{Z}^2$  è quella di calcolare per integrazione della (9) la sezione d'urto integrale  $S_\theta$  per deviazioni  $\geq \theta$  e - sostituito  $Z^2$  con  $\bar{Z}^2$  - porre:  $S_{\theta_{\min.}} = \sigma_A$ . Si ha così la relazione

$$(15) \quad \theta_{\min.}^2 = 4 \frac{\sigma_E}{\sigma_A} \bar{Z}^2 F(W) \quad , \quad F(W) = \frac{1}{W^2} \left( \frac{W+1}{W+2} \right)^2$$

$F(W)$  - che appare anche in (10) - si può sostituire senza alterare notevolmente le cose - con l'espressione limite  $\frac{1}{W^2}$ . Con questa sostituzione - portando (15) in (14) e integrando si ottiene:

$$(16) \quad \bar{\alpha}_{W,N}^2 = \frac{64 N}{\pi^2 f} \sigma_E \bar{Z}^2 [L(W_0) - L(W)],$$

$$L(W) = \frac{1}{W} \left( \log \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_E}{\sigma_A} \bar{Z}^2} \frac{1}{W} - 1 \right).$$

In questa formula tutti i parametri sono noti fuori che  $\bar{Z}^2$ .

La valutazione di questa media può farsi dalla (12) utilizzando la funzione  $\varphi$  di Fermi (1). Si trova: Si trova:  $\int_0^\infty \varphi^2(x) x dx \approx 0,6$  e quindi viene per  $Z = 13$ , tenendo conto di dati noti, quali il raggio dell'atomo di Al ecc:

$$(16') \quad \bar{Z}^2 = 3.7.$$

Con questo  $\alpha_{W,N}^2$  è completamente determinata.

Per determinare  $\bar{\alpha}_{W,E}^2$  non è necessario studiare in dettaglio la distribuzione delle deviazioni per urti contro gli elettroni. Consideriamo difatti la perdita media di energia in ogni urto, energia che verrà prevalentemente ceduta a un solo elettrone. Allora la semplice condizione della conservazione della quantità di moto, dà per il valore medio della deviazione

$$\bar{\theta}_W = \sqrt{\frac{2 \omega}{W(W+2)}}$$

dove  $\omega$  è la perdita di energia espressa in unità  $mc^2$ .

(1) FERMI, « Rend. Linc. », VI, 602 (1927); « ZS. f. Phys. », 48, 73 (1928); « Molecole e Cristalli », p. 291.

Possiamo ritenere che  $\bar{\theta}_W^2$  sia dato approssimativamente da

$$\bar{\theta}_W^2 = \frac{2\omega}{W(W+2)}$$

e la sua media nell'intervallo di energia  $W_0, W$  verrà

$$\bar{\theta}_{W_0, W}^2 = \frac{\omega}{W_0 - W} \left( \log \frac{W+2}{W} + \log \frac{W_0}{W_0+2} \right).$$

Allora la (7) della Nota precedente dà per  $\bar{\alpha}_{W, E}^2$ :

$$(17) \quad \bar{\alpha}_{W, E}^2 = \frac{8}{\pi^2} \left( \log \frac{W+2}{W} + \log \frac{W_0}{W_0+2} \right).$$

Non resta che portare le espressioni (16) e (17) in (8) per avere  $\Delta R^*$ . Possiamo calcolare separatamente le due contrazioni  $\Delta_E R^*$ ,  $\Delta_N R^*$  dovute alle deviazioni elettroniche e nucleari. Si trova

$$\Delta_E R^* = \frac{1}{2\bar{f}} \int_1^{W_0} \bar{\alpha}_{W, E}^2 dW = \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{1}{\bar{f}} \left[ \log \frac{(W_0+2)^3}{W_0} - 3 \log 3 \right]$$

e tenendo conto che si ha

$$(18) \quad \bar{f} R_B^* = W_0 - 1$$

si ottiene

$$(19) \quad \frac{\Delta_E R^*}{R_B^*} = \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{W_0 - 1} \left[ \log \frac{(W_0+2)^3}{W_0} - 3 \log 3 \right].$$

E per  $\Delta_N R^*$  si trova analogamente:

$$(20) \quad \frac{\Delta_N R^*}{R_B^*} = \frac{32}{\pi^2} \sigma_E N \bar{Z}^2 R^* \frac{1}{(W_0 - 1)^2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{W_0} - \log W_0 \right) \log c + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{W_0} + \frac{1}{2} \log W_0 \right) \log W_0 + \frac{1}{W_0} - 1 \right]$$

con

$$c = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_E}{\sigma_A} \bar{Z}^2}$$

$\bar{Z}^2$  è da ottenere dalla (12), e nel caso di Al è già calcolato in (16'). Le altre grandezze sono note.

Le curve della fig. 1 mostrano i risultati che si ottengono dalle (19) e (20).

Resta da valutare l'ultima parte del percorso, cioè quella in cui l'energia è  $< mc^2$ .

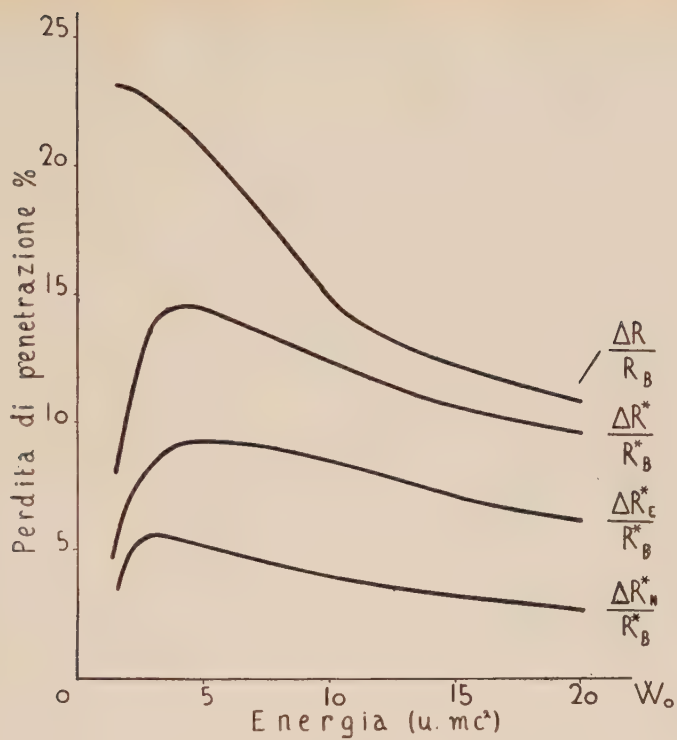


Fig. 1.

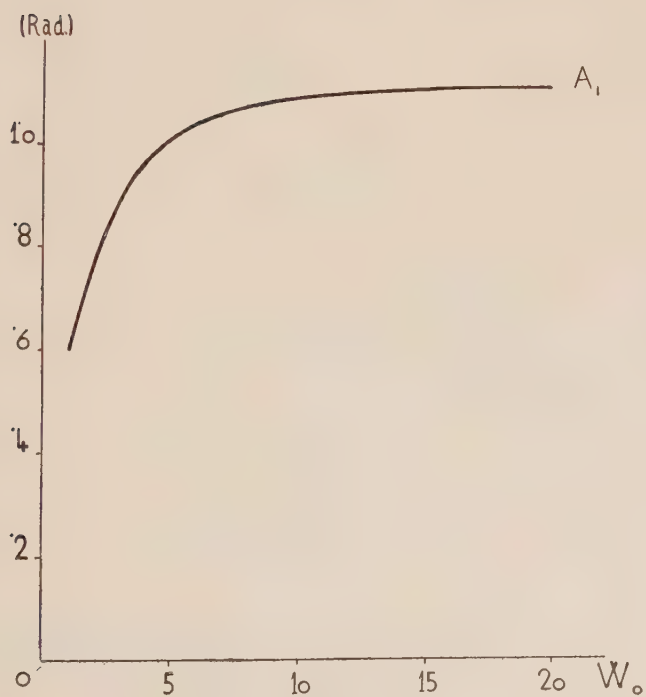


Fig. 2.



Indicando con  $r_s$  il valore sperimentale ( $\sim 0.07$  cm. Al) della penetrazione per un fascio parallelo di elettroni di energia  $mc^2$ , si può ammettere che la penetrazione residua di un fascio di elettroni che ha raggiunto l'energia  $mc^2$  per frenamento in uno schermo, sia dell'ordine di  $r_s \cos A_1$ , chiamando  $A_1$  il valore che prende lo scarto angolare medio  $A_W$  (equazione (7') della Nota precedente) quando  $W = 1$ .  $A_1$  si deduce da (7'), (16) e (17). Esso è rappresentato (espresso in radianti) dalla curva fig. 2.

Tenendo conto di questo si ottiene per la penetrazione totale  $R_s$ , ( $R_s = R_B^* - \Delta R + r_s \cos A_1$ ), la tabella seguente che è riportata in grafico nella fig. 3 e 4, insieme ai valori sperimentali (1).

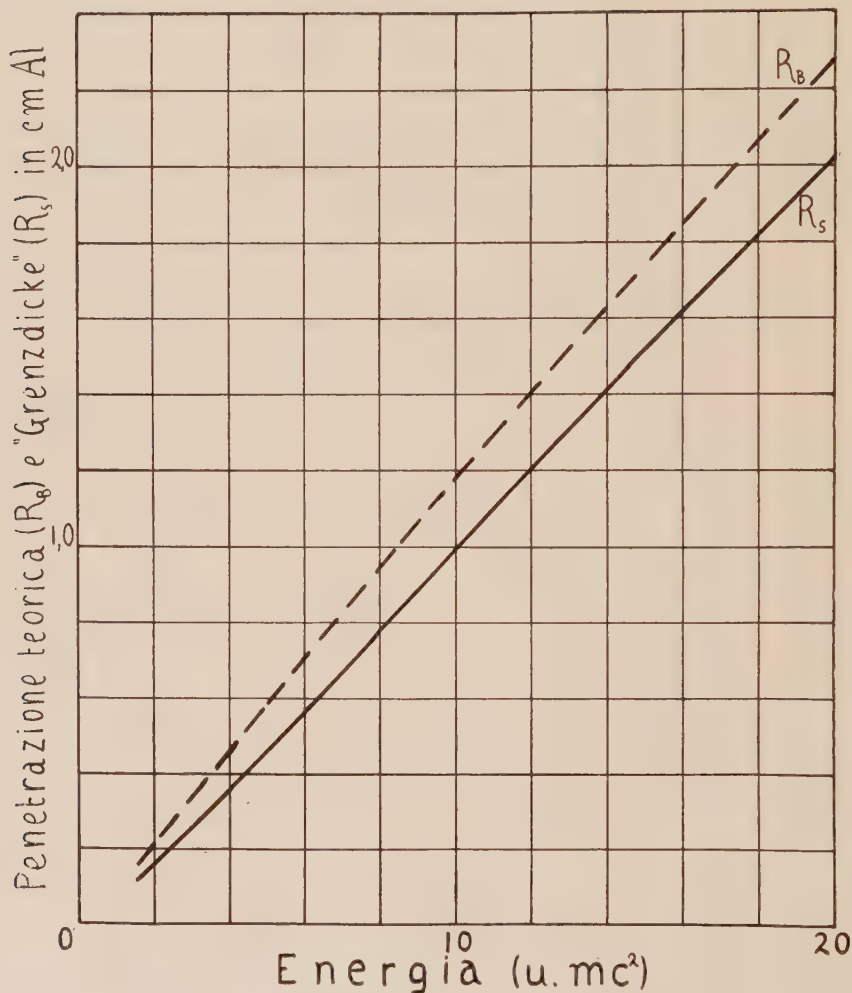


Fig. 3.

(1) Dati presi dal RUTHERFORD, *Radiations* etc., ediz. 1930, p. 422. I due valori alti a 3.73 e 4.5  $mc^2$  appartengono alla serie di misure di Madgwick le quali sono note per essere presumibilmente un po' alte (ved. loc. cit.).

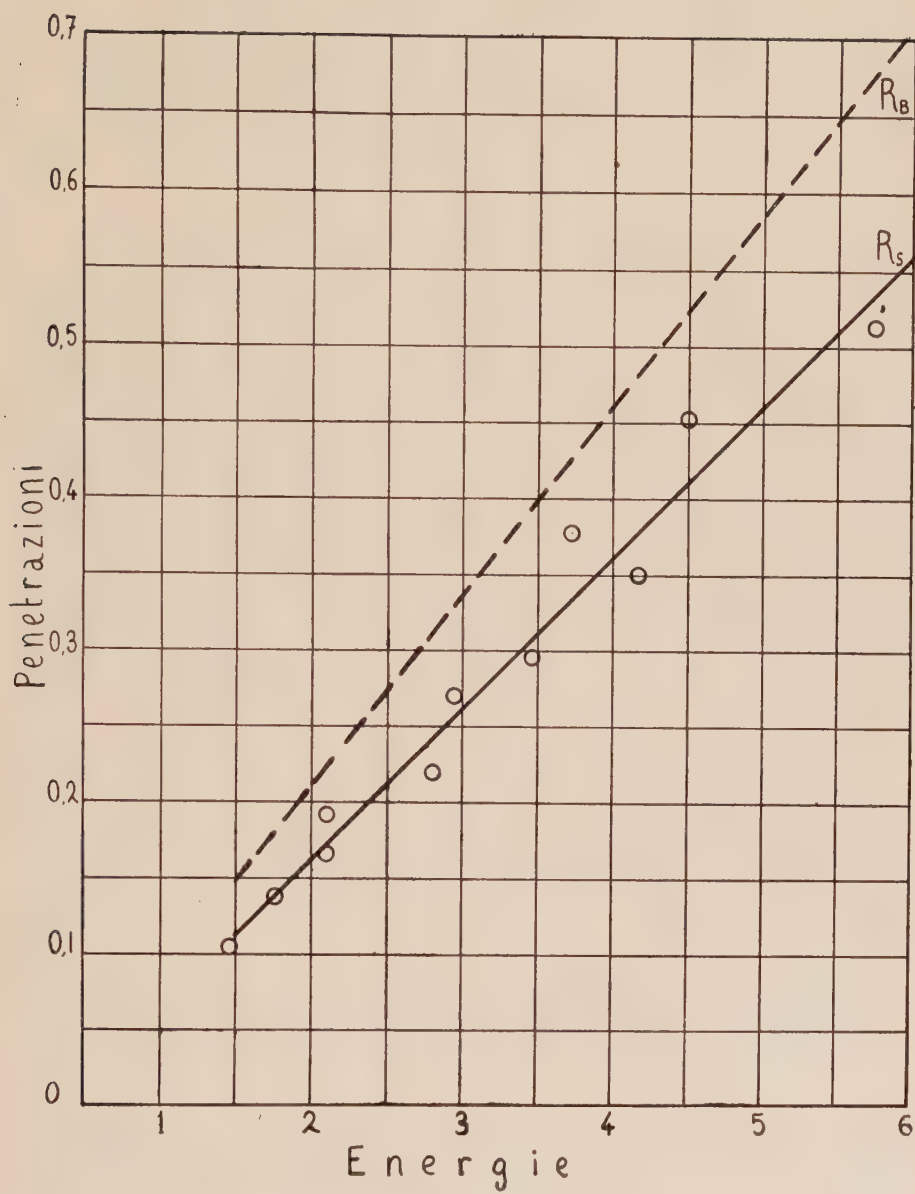


Fig. 4.

TABELLA II.

Energia $W_0$ (un. $mc^2$ )	Penetrazione $R_s$ (un. Al)	Energia $W_0$	Penetrazione $R_s$
1.5	0.11	7	0.67
2.0	0.16	10	1.00
3.0	0.26	15	1.52
4.0	0.36	20	2.02

La contrazione percentuale totale  $\frac{\Delta R}{R_B}$  è riportata pure nella fig. 1.

È interessante notare che questo accordo veramente soddisfacente con l'esperienza, induce a credere che la formula fondamentale, cioè quella di Williams-Bethe ((1) della I Nota) per il frenamento degli elettroni nella materia, possa essere più esatta di quello che Williams stesso non ritenesse.

Difatti la presente verifica di questa formula non può considerarsi molto meno diretta di quella fatta da Williams <sup>(1)</sup> basandosi sulle misure di frenamento degli elettroni eseguite da Withe e Millington <sup>(2)</sup> perchè, come è noto, i dati sperimentali di queste esperienze per essere confrontati con la teoria devono essere elaborati in modo abbastanza complesso e non scevro di qualche incertezza.

Williams aveva trovato per questa via che per elettroni di  $1.2 \cdot 10^6$  e. V. la formula (1) dava per  $\frac{dW}{dx}$  un valore superiore del 20% al dato sperimentale.

Questa differenza non si ritrova nel presente calcolo. Essa dovrebbe portare a una penetrazione calcolata più piccola di quella sperimentale, mentre si osserva il contrario.

(1) WILLIAMS, loc. cit. (1932).

(2) WHITE e MILLINGTON, «Proc. Roy. Soc. Lond.», 120, 701 (1928).

**Fisica** (Fisica-matematica). — *Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie*. Nota II di G. RACA, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. L. TIERI.

1. Il metodo della classificazione delle componenti di un tensore secondo il loro comportamento per una rotazione del sistema di riferimento attorno all'asse  $z$ , metodo che è stato illustrato nella Nota precedente <sup>(2)</sup>, sarà qui applicato allo studio dei tensori che presentano particolari simmetrie; tale metodo sembra prestarsi in modo speciale a questo problema, perchè, mentre col metodo dei caratteri la presenza di condizioni di simmetria portava notevoli complicazioni, qui le condizioni di simmetria semplificano spesso i calcoli.

Se ad esempio vogliamo studiare la riduzione del tensore simmetrico di rango  $n$ , basta tener conto che non si debbono più considerare distinte due soluzioni dell'equazione (14) <sup>(3)</sup> che differiscono solo per una permutazione degli indici, e perciò il numero  $\bar{N}(m, n)$  di componenti indipendenti è uguale in questo caso al numero di soluzioni intere della (14) con l'ulteriore limitazione

$$(21) \quad m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n.$$

In vista di successive applicazioni sostituiamo alla (15) la limitazione meno ristretta

$$(22) \quad |m_i| \leq l,$$

ed indichiamo con  $\bar{N}_l(m, n)$  il numero di soluzioni intere dell'equazione

$$(14) \quad m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$$

con le limitazioni (21) e (22).

Per trovare una formula ricorrente per il calcolo di  $\bar{N}_l(m, n)$  distribuiamo le soluzioni della (14) in quattro gruppi A, B, C, D, ponendo:

(1) Nella seduta dell'8 maggio 1937.

(2) G. RACA, questi « Rendiconti », XXV, 1937.

(3) La numerazione delle formule prosegue dalla Nota precedente, e i ricami fino al (20) si riferiscono a tale Nota.

nel gruppo A le soluzioni per cui  $m_1 = l$  ,  $m_n = -l$   
 » » B » » »  $m_1 = l$  ,  $m_n \geq -(l-1)$   
 » » C » » »  $m_1 \leq l-1$  ,  $m_n = -l$   
 » » D » » »  $m_1 \leq l-1$  ,  $m_n \geq -(l-1)$ .

Sarà evidentemente :

$$\begin{aligned}\bar{N}_l^{(A)}(m, n) &= \bar{N}_l(m, n-2) \\ \bar{N}_l^{(A)}(m, n) + \bar{N}_l^{(B)}(m, n) &= \bar{N}_l(m-l, n-1) \\ \bar{N}_l^{(A)}(m, n) + \bar{N}_l^{(C)}(m, n) &= \bar{N}_l(m+l, n-1) \\ \bar{N}_l^{(D)}(m, n) &= \bar{N}_{l-1}(m, n),\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}\bar{N}_l(m, n) &= \bar{N}_l^{(A)}(m, n) + \bar{N}_l^{(B)}(m, n) + \bar{N}_l^{(C)}(m, n) + \bar{N}_l^{(D)}(m, n) = \\ &= \bar{N}_l(m-l, n-1) - \bar{N}_l(m, n-2) + \bar{N}_l(m+l, n-1) + \bar{N}_{l-1}(m, n).\end{aligned}$$

Se poi poniamo, analogamente alla (11),

$$(24) \quad S_l(L, n) = \bar{N}_l(L, n) - \bar{N}_l(L+1, n),$$

le  $S_l(L, n)$  soddisferanno alle medesime relazioni ricorrenti che le  $\bar{N}$ , cioè sarà :

$$(25) \quad \begin{aligned}S_l(L, n) &= S_l(L-l, n-1) - S_l(L, n-2) + \\ &+ S_l(L+l, n-1) + S_{l-1}(L, n).\end{aligned}$$

$S_l(L, n)$  è il numero di volte che la rappresentazione  $\mathbf{D}^{(L)}(R)$  è contenuta nella parte simmetrica del prodotto esterno di  $n$  rappresentazioni  $\mathbf{D}^{(l)}(R)$  <sup>(1)</sup>; ma per poter utilizzare senza restrizioni la (25) occorre assumere senza restrizioni la definizione (24), cioè considerarla valida anche per  $L < 0$ , caso in cui  $S_l(L, n)$  non ha più il significato suddetto; dalle (19) e (24) si deduce però immediatamente che

$$(26) \quad S_l(L, n) = -S_l(-(L+1), n).$$

La (25) permette di calcolare successivamente qualsiasi valore di  $S_l(L, n)$  quando se ne conoscano i valori per  $l=0, n=0, n=1$ , valori

(1)  $S_l(L, n)$  rappresenta in spettroscopia il numero di livelli con momento totale  $L$  cui darebbero luogo  $n$  elettroni equivalenti aventi ciascuno momento orbitale  $l$  e soddisfacenti alla statistica di Bose.



tutti che si possono calcolare direttamente con grande facilità: infatti è evidentemente

$$\begin{cases} \bar{N}_0(m, n) = \delta_{m0} \\ \bar{N}_l(m, 0) = \delta_{m0} \\ \bar{N}_l(m, 1) = \begin{cases} 1 & \text{per } |m| \leq l \\ 0 & \text{» } |m| > l \end{cases} \end{cases}$$

da cui, per  $L \geq 0$ ,

$$(27) \quad \begin{cases} S_0(L, n) = \delta_{L0} \\ S_l(L, 0) = \delta_{L0} \\ S_l(L, 1) = \delta_{Ll}. \end{cases}$$

2. Se poniamo

$$(28) \quad \gamma_i = \frac{1 + (-1)^i}{2}$$

cioè indichiamo con  $\gamma_i$  una quantità che vale 1 oppure 0 secondo che  $i$  è pari o dispari, dimostriamo che

$$(29) \quad \begin{cases} S_l(L, n) = \gamma_{L+n} & \text{per } n \geq L \geq 0 \\ S_l(L, n) = 0 & \text{» } L > n. \end{cases}$$

Poichè dalle (27) risulta che le (29) valgono per  $n = 0$  e  $n = 1$ , basterà fare di tali relazioni una dimostrazione ricorrente, e dimostrare che se esse valgono per  $n < n_0$  valgono anche per  $n = n_0$ .

E infatti per  $L \geq 1$

$$S_l(L, n_0) = S_l(L-1, n_0-1) - S_l(L, n_0-2) + S_l(L+1, n_0-1),$$

da cui, applicando le (29) per  $n = n_0 - 1$  e  $n = n_0 - 2$ , abbiamo che

$$\text{per } 1 \leq L \leq n_0 - 2 \quad S_l(L, n_0) = \gamma_{L+n_0-2} - \gamma_{L+n_0-2} + \gamma_{L+n_0} = \gamma_{L+n_0}$$

$$\text{» } L = n_0 - 1 \quad S_l(n_0 - 1, n_0) = 0$$

$$\text{» } L = n_0 \quad S_l(n_0, n_0) = 1$$

$$\text{» } L > n_0 \quad S_l(L, n_0) = 0;$$

inoltre per  $L = 0$ , applicando successivamente le (25), (27) e (26), e la (29) per  $n < n_0$ , abbiamo

$$\begin{aligned} S_1(0, n_0) &= S_1(-1, n_0 - 1) - S_1(0, n_0 - 2) + S_1(1, n_0 - 1) + 1 = \\ &= -S_1(0, n_0 - 1) - S_1(0, n_0 - 2) + S_1(1, n_0 - 1) + 1 = \\ &= -\gamma_{n_0-1} - \gamma_{n_0-2} + \gamma_{n_0} + 1; \end{aligned}$$

e poichè dei due numeri  $n_0 - 1$  e  $n_0 - 2$  uno è pari e l'altro è dispari, sarà

$$S_1(0, n_0) = \gamma_{n_0};$$

restano così completamente dimostrate le (29) per  $n = n_0$ .

3. Il calcolo esplicito degli  $S_2(L, n)$  presenta una maggiore complicazione, e va fatto per gradi successivi, con una serie di proprietà a dimostrazione ricorrente.

*Proprietà I.* — Per  $L > n$  è

$$(30) \quad S_2(L, n) = S_2(L - 2, n - 1).$$

Poichè per le (27) tale proprietà vale per  $n = 1$ , basta dimostrare che se vale per  $n < n_0$  vale anche per  $n = n_0$ . E infatti per la (25) e la seconda delle (29)

$$S_2(L, n_0) = S_2(L - 2, n_0 - 1) - S_2(L, n_0 - 2) + S_2(L + 2, n_0 - 1),$$

e se la (30) vale per  $n = n_0 - 1$  gli ultimi due termini si elidono.

*Proprietà II.* — Per  $i \leq n$  la differenza

$$(31) \quad S_2(n - i, n) - S_2(n - i - 2, n - 1) = \sigma_i$$

dipende da  $i$  ma non da  $n$ .

Poichè per la (30) tale proprietà vale per  $i < 0$ , ed è anzi

$$(32) \quad \sigma_i = 0 \quad \text{per } i < 0,$$

basta dimostrare per  $i_0 \geq 0$  che se essa vale per  $i < i_0$  vale anche per  $i = i_0$ . Infatti, applicando la (25) e successivamente la prima delle (29) e la (31) per  $i = i_0 - 3$  abbiamo

$$\begin{aligned} &S_2(n - i_0, n) - S_2(n - i_0 - 2, n - 1) = \\ &= -S_2(n - i_0, n - 2) + S_2(n - i_0 + 2, n - 1) + S_1(n - i_0, n) = \\ &= \sigma_{i_0-3} + \gamma_{i_0}, \end{aligned}$$

per cui non solo è dimostrata la (31) per  $i = i_0$ , ma si ottiene anche la formula ricorrente

$$(33) \quad \sigma_i = \sigma_{i-3} + \gamma_i \quad \text{per } i \geq 0.$$

*Proprietà III.* - Vale la relazione

$$(34) \quad S_2(0, n) = \sigma_n.$$

Per la (27) tale proprietà vale per  $n = 0$  e per  $n = 1$ ; applicando alternativamente la (31) e la (26) abbiamo

$$\begin{aligned} S_2(0, n) - \sigma_n &= S_2(-2, n-1) = \\ &= -S_2(1, n-1) = \\ &= -S_2(-1, n-2) - \sigma_{n-2} = \\ &= S_2(0, n-2) - \sigma_{n-2}, \end{aligned}$$

e perciò la (34) vale anche per i successivi valori di  $n$ .

Dalle (31) e (34) si ottiene immediatamente che

$$(35) \quad S_2(2, n) = \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2},$$

e in maniera analoga si ottiene facilmente che

$$(36) \quad \begin{cases} S_2(2p, n) = \sigma_{n-p} + \sigma_{n-p-1} + \sigma_{n-p-2} + \dots + \sigma_{n-2p}, \\ S_2(1, n) = 0, \\ S_2(2p+1, n) = S_2(2p-2, n-3). \end{cases}$$

Per il seguito interessa conoscere esplicitamente

$$(37) \quad \tau_n = S_2(0, n) + S_2(2, n):$$

dalle (34), (35) e (33) abbiamo

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sigma_n + \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} = \\ &= \sigma_{n-1} + \sigma_{n-2} + \sigma_{n-3} + \gamma_n = \\ &= \tau_{n-1} + \gamma_n \end{aligned}$$

da cui, essendo  $\tau_0 = \sigma_0 = 1$ , otteniamo

$$(38) \quad \tau_{2m} = \tau_{2m+1} = m + 1.$$

4. Consideriamo ora la rappresentazione  $\mathbf{D}(\mathbf{R})$  indotta dalle componenti di un tensore  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$  simmetrico rispetto allo scambio di un

qualsiasi indice  $i_h$  col corrispondente  $j_h$  e rispetto allo scambio di una qualsiasi coppia  $i_h j_h$  con un'altra qualsiasi coppia  $i_k j_k$ . Le  $\binom{5+n}{n}$  componenti distinte di questo tensore si trasformano come le combinazioni lineari simmetriche dei prodotti delle componenti indipendenti di  $n$  tensori doppi simmetrici<sup>(1)</sup>. Delle 6 componenti di un tensore doppio simmetrico possiamo considerarne una come invariante e le altre 5 come costituenti la base di una rappresentazione  $\mathbf{D}^{(2)}(R)$  (cfr. il § 2 della Nota I), e possiamo perciò distribuire i suddetti prodotti in  $n+1$  classi, secondo il numero  $k$  dei fattori facenti parte delle basi  $\mathbf{D}^{(2)}(R)$  e il numero  $n-k$  dei fattori invarianti. Poichè i fattori invarianti non influiscono sulla legge di trasformazione, il numero di rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{D}^{(L)}(R)$  contenute nella rappresentazione indotta dagli elementi di una di queste classi è dato dagli  $S_2(L, k)$  studiati nel paragrafo precedente; il numero totale di rappresentazioni  $\mathbf{D}^{(L)}(R)$  contenute nella rappresentazione indotta dalle componenti di  $A_{i_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$  sarà perciò dato da

$$(39) \quad T(L, n) = \sum_0^n S_2(L, k).$$

5. Il numero  $X(n)$  di scalari da cui dipende l'ennesimo tensore elastico  $\Upsilon_{pq i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}^{(n)}$  è uguale al numero di invarianti lineari che possiede il prodotto esterno (o di ordine zero) di un tensore simmetrico  $a_{pq}$  per un tensore  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$  che gode della simmetria di cui sopra;  $X(n)$  sarà perciò uguale al numero di volte che la rappresentazione  $\mathbf{D}^{(0)}(R)$  compare nella riduzione della rappresentazione avente per base i  $6 \binom{5+n}{n}$  prodotti di una componente del tensore  $a_{pq}$  per un componente del tensore  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$ .

In base alla (13) nella riduzione del prodotto esterno di due rappresentazioni irriducibili  $\mathbf{D}^{(i)}(R)$  e  $\mathbf{D}^{(j)}(R)$  si ha una rappresentazione  $\mathbf{D}^{(0)}(R)$  soltanto se  $j=l$ ; poichè la rappresentazione indotta dal tensore  $a_{pq}$  è la somma di una  $\mathbf{D}^{(0)}(R)$  e di una  $\mathbf{D}^{(2)}(R)$ , nel prodotto esterno di  $a_{pq}$  per  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$ , si avranno  $T(0, n)$  invarianti dati dai prodotti dell'invariante di  $a_{pq}$  per i  $T(0, n)$  invarianti di  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$ , e  $T(2, n)$  invarianti dati dai prodotti della base di  $\mathbf{D}^{(2)}(R)$  contenuta in  $a_{pq}$  per le  $T(2, n)$  basi di  $\mathbf{D}^{(2)}(R)$  contenute in  $A_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_n j_n}$ . Sarà dunque

$$(40) \quad X(n) = T(0, n) + T(2, n),$$

da cui per le (39) e (37)

(1) Equivalente spettroscopico: configurazione di  $n$  elettroni soddisfacenti alla statistica di Bose e distribuiti in modo qualsiasi tra un livello  $s$  e un livello  $d$ .

$$X(n) = \sum_k^n \tau_k;$$

tenendo conto dell'espressione (38) di  $\tau_k$ , si vede immediatamente che

$$(41) \quad \begin{cases} X(2m) = (m+1)^2 \\ X(2m+1) = (m+1)(m+2). \end{cases}$$

Le due espressioni possono anche esser riunite in una sola

$$(42) \quad X(n) = \left[ \left( \frac{n}{2} + 1 \right)^2 \right],$$

intendendo con questa che il numero  $X(n)$  di scalari da cui dipende l' $n$ -esimo tensore elastico di un mezzo isotropo è uguale al massimo intero contenuto in  $\left( \frac{n}{2} + 1 \right)^2$ .

**Chimica.** — *Solfuri, seleniuri e tellururi di tallio.* — I. *Seleniuri di tallio.* — Nota I <sup>(1)</sup> di A. BARONI, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

Lo studio completo del sistema tallio-selenio è stato effettuato per il primo da Pelabon <sup>(3)</sup>. Egli, mediante ricerche termiche, ha trovato che oltre ai composti  $Tl_2Se$  e  $Tl_2Se_3$  corrispondenti a quelli che il tallio forma con lo zolfo, nel sistema  $Tl-Se$  si ha anche un composto  $TlSe$  o meglio  $TlSe \cdot Tl_2Se_3$ . Il diagramma di solidificazione presenta un tratto rettilineo che si rifierisce alle miscele liquide separate in due fasi; di esse quella più pesante è costituita dal tallio puro in eccesso e quella più leggera è formata dal composto  $Tl_2Se$  che contiene 16.22 % di selenio. Quando il tenore in selenio aumenta per raggiungere il 23 %, la temperatura di solidificazione si abbassa rapidamente fino a 315° e si ha un eutectico la cui composizione corrisponde a  $Tl_4Se_3$ ; la temperatura poi risale e passa per un massimo a 338° che corrisponde al composto  $Tl_2Se \cdot Tl_2Se_3$ . L'andamento della curva è poi molto regolare e non si osserva in essa nessuna alterazione nel punto corrispondente al composto  $Tl_2Se_3$ ; essa si avvicina all'asse delle ascisse fino al punto di fusione del composto  $Tl_2Se_3$  che è 195°. Le miscele che contengono più di 50 % di selenio solidificano a temperature che non possono

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) « Compt. Rend. », 145, p. 118 (1907).



essere esattamente determinate, ma che sono sempre comprese fra 178° e 195°. In tutte le miscele si osserva il fenomeno della soprafusione che cessa difficilmente anche aggiungendo alcuni pezzettini di sostanza solida, ciò che vuol dire che il selenio libero che contiene la massa è allo stato pastoso. È per questo, afferma Pelabon, che quando cessa la soprafusione, la temperatura della sostanza soprafusa sale con grande lentezza

Successivamente Murakami, pure con metodi termici, trovò <sup>(1)</sup> tre composti e cioè  $Tl_2Se$ ,  $TlSe$  e  $Tl_2Se_3$ . Nel diagramma di questo Autore esistono due lacune di miscibilità allo stato liquido che si estendono dal 4 al 14.5 % di selenio e da 55 a 97.5 % di selenio.

Rolla <sup>(2)</sup> applicando allo studio del sistema  $Tl-Se$  la misura della variazione della tensione di soluzione col variare della composizione delle leghe, ha discusso i risultati di Pelabon e Murakami ed ha dimostrato che il metodo termico può trarre in errore quando per la natura stessa dei corpi che vengono fusi si possono verificare dei fenomeni termici di lieve entità che non consentono una valutazione precisa.

Io ho voluto riprendere questo studio dal punto di vista termico completandolo con ricerche roentgenografiche diagnostiche sulle varie leghe. Per la preparazione di queste ho usato tallio e selenio purissimi della ditta Kahlbaum ed ho effettuato la fusione delle miscele in crogioli di porcellana di Berlino non verniciati contenuti in un tubo chiuso da un tappo a quattro fori. Per due di questi ho fatto passare un tubo di ingresso ed uno di uscita dell'idrogeno in modo da formare le leghe fuori dal contatto dell'aria, attraverso il terzo la pinza termoelettrica ed attraverso il quarto un agitatore per mantenere rimescolata la massa durante la fusione in modo da permettere un intimo contatto delle sostanze reagenti. Per una omogeneizzazione più perfetta possibile delle miscele, queste sono state mantenute per due ore allo stato fuso agitandole continuamente, raffreddate, polverizzate e rifuse. Solo così mi è stato possibile ottenere delle miscele che all'aspetto, al comportamento meccanico (fragilità praticamente uguale in tutti i punti) ed all'esame roentgenografico eseguito su campioni prelevati nella parte superiore ed in quella inferiore delle miscele stesse, presentavano la certezza di una analoga composizione in tutti i punti. Questa precauzione si è rivelata necessaria a causa della notevole differenza di peso specifico fra il tallio (p. sp. 11.85) ed il selenio (p. sp. 4.80) che porta facilmente ad una stratificazione come ho potuto osservare ed in grado molto maggiore che nel sistema tallio-selenio, nel sistema tallio-tellurio sul quale riferirò in una prossima Nota.

Le curve di raffreddamento delle miscele preparate con le precauzioni sopra indicate sono state da me realizzate con registratore automatico Leeds e Northrup. A causa della piccola forza elettromotrice della coppia termoelet-

(1) « Mem. Coll. Sc. Kyoto », 1, p. 153 (1915).

(2) « Rend. Lincei », vol. XXVIII, ser. 5<sup>a</sup>, p. 355 (1919).

trica platino/platino-rodio a temperature inferiori a  $400^{\circ}$ , per realizzare una maggiore sensibilità nella misura dell'effetto termico, ho usato una coppia termoelettrica cromel-alumel che mi ha permesso di avere delle curve ad arresti perfettamente netti usando quantità delle varie miscele di circa 30 gr.

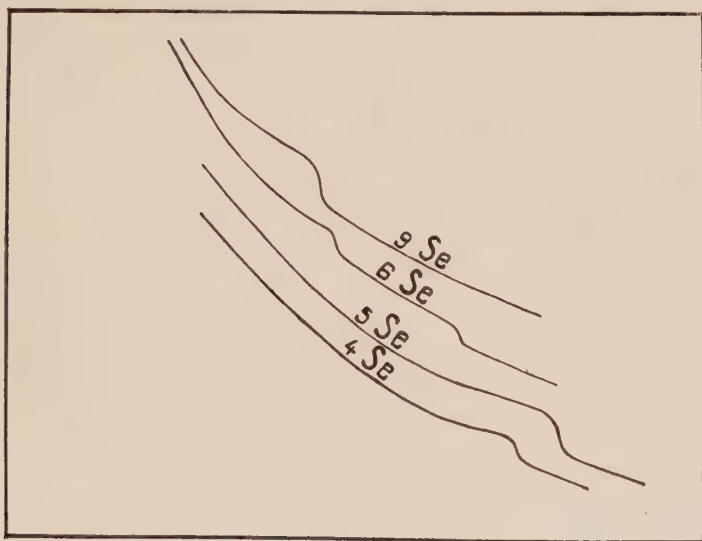


Fig. 1.

Nella fig. 1 sono riportate alcune delle curve da me ottenute. In nessuna delle miscele da me esaminate ho potuto osservare il fenomeno della sopra-fusione che Pelebon avrebbe riscontrato in tutte le miscele e gli arresti sono stati tutti realizzati spontaneamente senza dover innescare la solidificazione delle miscele. Il diagramma di solidificazione da me ottenuto e riportato nella fig. 2, presenta due massimi corrispondenti alle miscele contenenti 60 e 34 % atomico di selenio e perciò ai composti  $Tl_2Se_3$  e  $Tl_2Se$ . Le curve di raffreddamento delle miscele contenenti dal 17.5 al 40 % atomico di tallio oltre all'arresto corrispondente alla solidificazione presentano un secondo arresto a  $192^{\circ}$ ; tutte le altre presentano solo quello di solidificazione. Le miscele contenenti fino al 75 % atomico di tallio risultano perfettamente omogenee; quelle a percentuali maggiori mostrano una stratificazione che non mi è stato possibile evitare nemmeno rifondendole per ben quattro volte dopo averle rimescolate ad ogni fusione. Ciò è dovuto probabilmente ad una solubilità limitata del tallio nel composto  $Tl_2Se$ .

Le varie miscele sono state tutte analizzate dosando il tallio come cromato seguendo il metodo di L. Moser <sup>(1)</sup> ed il selenio come selenio metallico. Ho dovuto ricorrere per la determinazione del tallio al metodo al cromato,

(1) « Monathsh. Chem. », 47, 709 (1927).

che indubbiamente è meno delicato della precipitazione come ioduro, per la impossibilità di usare questo in presenza di selenio sotto forma di acido selenioso risultante nell'attacco delle leghe con acido nitrico.

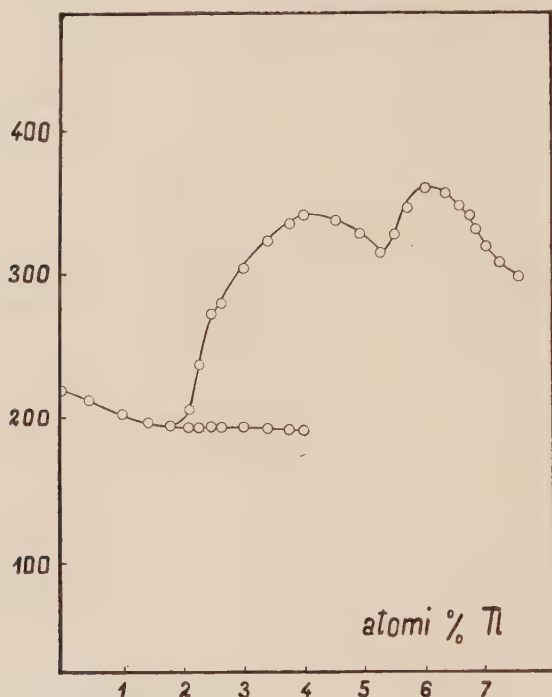


Fig. 2. - Diagramma di solidificazione del sistema Tl-Se.

L'esame roentgenografico delle varie leghe eseguito con un tubo ad anticatodo di rame e con tempi di esposizione di circa tre ore a 50 kW e 10 milliamp., rivelano la esistenza in questo sistema di due soli composti. Nella tabella 1 sono riportate le distanze reticolari dei fotogrammi corrispondenti a tali composti e di confronto quello del tallio. A questo proposito devo rilevare che mentre i fotogrammi delle miscele contenenti da 0 a 40 % atomico di tallio risultano molto intensi e netti, quelli delle miscele a maggior contenuto in tallio, risultano, a pari tempo di esposizione, molto più deboli.

I risultati dell'esame termico e di quello roentgenografico da me ottenuti per il sistema tallio-selenio permettono di affermare la esistenza dei soli composti  $Tl_2Se_3$  e  $Tl_2Se$  e la non esistenza dei composti  $TlSe$  e  $Tl_2Se_5$ , trovati da Murakami e Pelabon. La discordanza dei risultati da me ottenuti con quelli di questi Autori è probabilmente dovuta al fatto che essi non hanno sufficientemente curato la omogeneizzazione delle miscele necessaria per rilevare al massimo l'effetto termico nel metodo da loro usato e per non avere sistemi instabili in falso equilibrio.

TABELLA I.

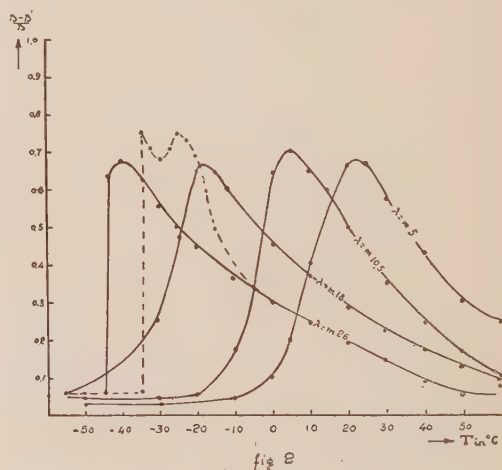
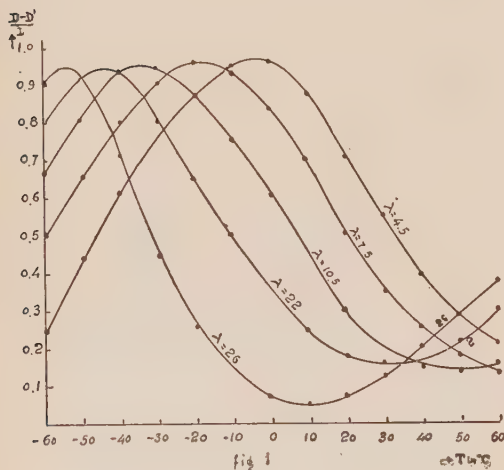
Tallio		Tl <sub>2</sub> Se <sub>3</sub>		Tl <sub>2</sub> Se	
l	d	l	d	l	d
		f	2.707	d	2.892
m	2.702			f	2.691
md	2.580	f	2.515	m	2.592
		m	2.121	d	2.195
m	2.021			m	2.009
		d	1.819	m	1.854
		f	1.747	m	1.808
m	1.730	f	1.693	m	1.723
		f	1.525	m	1.604
f	1.567			md	1.468
m	1.463	m	1.455	mf	1.462
		md	1.387	m	1.411
mf	1.382	md	1.311	d	1.314
		m	1.292	d	1.283
mf	1.256	f	1.172	md	1.165
		md	1.100	md	1.110
f	1.082	f	1.047		
f	1.037	mf	0.962		
md	0.967	mf	0.952		
d	0.942	mf	0.928		
m	0.925				
m	0.893	m	0.891		
m	0.883	m	0.863		
		m	0.852		
		m	0.843		
		m	0.826		

**Chimica.** — *Protosolfoselencloruro. Determinazione dell'indice di rifrazione e della tensione superficiale di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$ .*  
Nota di A. BARONI, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze. — III. Misure su alcool *n*-propilico e caprilico* <sup>(1)</sup>. Nota di L. CAVALLARO, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

Con l'apparato generatore di radioonde a frequenza  $10^7 \div 10^8$  Hertz, descritto in una precedente Nota <sup>(3)</sup>, si è determinato l'assorbimento dipolare degli alcoli *n*-propilico e caprilico (ottanolo-2). I risultati delle misure, effettuate secondo il metodo altrove <sup>(3)</sup> descritto, su gli alcoli accuratamente disidratati, sono raccolti nelle figg. 1 e 2 nelle quali sono riportati, per le varie lunghezze d'onda impiegate, i valori dell'assorbimento  $\epsilon''$  in termini



del rapporto  $\frac{D-D'}{D'}$  in funzione della temperatura. Si vede subito che, in accordo qualitativo con la teoria, anche per questi due alcoli si verifica lo

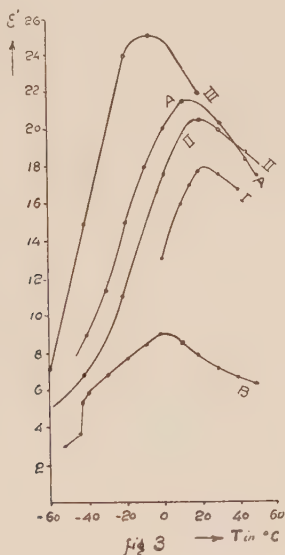
(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Cfr. questi « Rendiconti », 1937.



spostamento delle bande verso le basse temperature col crescere della lunghezza d'onda usata. Nella fig. 3 sono riportate le misure della costante dielettrica  $\epsilon'$  in funzione della temperatura con onda di m. 5 per l'alcool *n*-propilico (curva A) e di m. 26 per l'alcool caprilico (curva B). Dei due alcoli, solo per il *n*-propilico si avevano precedenti misure di  $\epsilon'$  a frequenze prossime a quelle impiegate nelle presenti ricerche; nella fig. 3 sono così riportati i valori ottenuti <sup>(1)</sup> da Mizushima con onde di m. 3.08 (curva III) e di m. 9.50 (curva II) e quelli di Szymanowski <sup>(2)</sup> con onda di m. 1.82 (curva I). Questi risultati sono in buon accordo fra loro: si vede il graduale spostarsi verso le basse temperature della zona di dispersione anomala (inizio della diminuzione di  $\epsilon'$ ) col crescere della lunghezza d'onda impiegata.



Un esame qualitativo e quantitativo dei risultati per i vari alcoli può esser fatto confrontando la lunghezza d'onda per la quale, ad una temperatura data, si ha per ognuno di essi, il massimo valore dell'assorbimento.

A tale scopo si riporta nella Tabella I tale lunghezza d'onda ( $\lambda_m$ ) ed il logaritmo della frequenza ad essa corrispondente ( $\log \nu_m$ ) determinati alla temperatura di 0°C per i quattro alcoli studiati in questa e nella precedente Nota <sup>(3)</sup>.

Si vede che col crescere del numero di atomi di carbonio il massimo assorbimento si sposta verso le onde più lunghe. Ciò è in accordo con la

(1) S. I. MISUSHIMA, « Journ. Chem. Soc. Japan. », 49, p. 153, 1928.

(2) W. T. SZYMANOWSKI, « Journ. Chem. Phys. », 1, p. 809, 1933.

TABELLA I.

	$\lambda_m$	$\log \nu_m$	$\eta$	$\log \frac{1}{\eta}$	$\epsilon_1$
Alcool <i>n</i> -propilico . .	4.35	7.838	0.0388	1.411	24.2
» <i>n</i> -butilico . . .	5.10	7.769	0.0519	1.285	20.0
» iso-amilico . .	6.40	7.671	0.0883	1.054	16.0
» caprilico . . .	12.00	7.397	0.223	0.652	11.0

teoria del Debye; questa prevede infatti che il massimo di  $\epsilon''$  si verifichi per un  $\nu_m$  tale che sia:

$$(1) \quad 2 \pi \nu_m \tau = \frac{\epsilon_1 + 2}{\epsilon_0 + 2}$$

dove  $\tau$  è il tempo di rilassazione definito dalla:

$$(2) \quad \tau = \frac{4 \pi \eta a^3}{kT}$$

in funzione della viscosità  $\eta$ , del raggio molecolare  $a$ , della temperatura  $T$  e della costante di Boltzmann  $k$ ; oltre che a  $\tau$ ,  $\nu_m$  risulta legata ad  $\epsilon_1$  costante dielettrica misurata, per la temperatura in questione, alle basse frequenze, e ad  $\epsilon_0$  uguale al quadrato dell'indice di rifrazione. Il valore di  $\epsilon_1$  ed il suo coefficiente termico dipendono poi, per la relazione fondamentale di Debye:

$$(3) \quad P = \frac{\epsilon_1 + 1}{\epsilon_1 + 2} \frac{M}{d} = \frac{4 \pi}{3} N \left( \alpha_0 + \frac{\mu^2}{3 kT} \right)$$

dal momento elettrico  $\mu$ . In conclusione, secondo la teoria, la giacitura della banda nello spettro hertziano è determinata, da  $T$ ,  $\eta$  ed  $a$ , attraverso  $\tau$ , e da  $\mu$  attraverso  $\epsilon_1$  e  $\frac{d\epsilon_1}{dT}$ . Introducendo nella (1) il valore di  $\tau$  si ha:

$$(4) \quad \nu_m = \frac{k}{8\pi^2} \frac{1}{a^3} \frac{\epsilon_0 + 2}{\epsilon_1 + 2} \frac{T}{\eta}$$

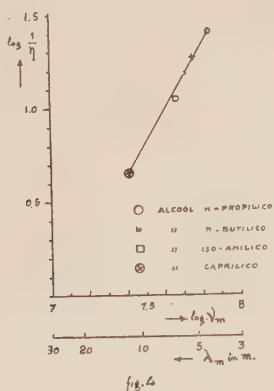
da cui si vede che, aumentando il numero di atomi di carbonio, aumenta  $a$  e si ha perciò uno spostamento delle bande verso le basse frequenze; esso è parzialmente compensato dalla diminuzione di  $\epsilon_1$  (vedi colonna 5, tabella I) (in prima approssimazione, per tutti gli alcoli  $\epsilon_0 \simeq 2$ ). Ma il fattore determinante sembra essere la variazione di  $\eta$  che aumenta rapidamente col diminuire della temperatura e col numero di atomi di carbonio.

Per quanto la teoria non sia applicabile che ai gas o a soluzioni diluite di sostanze polari in solventi apolari, i risultati delle misure attuali sono in discreto accordo con essa.

Se, a riprova di ciò, si effettua il calcolo di  $\nu_m$ , secondo la (4), per l'alcool butilico, introducendo  $a = 2.4 \text{ \AA}$  e per  $\varepsilon_r$  ed  $\eta$  i valori della tabella I (colonne 3-4-5), si trova  $\log \nu_m = 7.975$  corrispondente a  $\lambda_m = 3.2$ . Analogamente, per gli altri alcoli si trovano valori di  $\lambda_m$  alquanto più bassi di quelli misurati. La concordanza si avrebbe introducendo per tutti gli alcoli il valore  $a = 3 \text{ \AA}$ . Questo maggior valore potrebbe interpretarsi come conseguente all'associazione molecolare, che, in tal caso, risulterebbe, a parità di temperatura, maggiore per gli alcoli a minor numero di atomi di carbonio. Bisogna tuttavia aggiungere che, a questo proposito, conclusioni possono trarsi soltanto in seguito all'esame di molto materiale sperimentale, dato che la  $a$  di Debye è da considerarsi solo come un raggio « efficace », in modo del tutto analogo a quanto si osserva, per la teoria degli elettroliti forti del Debye stesso, dove, come hanno dimostrato le ricerche di Bonino <sup>(1)</sup> il raggio  $a$  non è che una funzione del raggio vero dell'ione e della sua deformabilità. Anche in quest'ultimo caso la conoscenza di un più ampio materiale sperimentale potrà portare a stabilire il significato effettivo di questa grandezza.

In ogni modo, al passaggio da un alcool all'altro, l'effetto prevalente sarebbe l'aumento di  $\eta$ .

A riprova di ciò si vede, che, portando sulle ordinate i valori di  $\log \frac{1}{\eta}$  e sulle ascisse quelli di  $\log \nu_m$ , i punti che così si determinano (fig. 4)



per ciascun alcool stanno su di una retta. Misure attualmente in corso, permetteranno quanto prima di stabilire se alcoli non saturi, o eterociclici,

(1) G. B. BONINO, «Memorie della R. Accademia d'Italia», 1933.

quali l'alcool allilico od il furilico, soddisfano a questa condizione. La difficoltà fondamentale nell'interpretazione dei risultati delle misure consiste nel discriminare la variazione di  $\eta$  da quella di  $a$ ; solo misure sistematiche di  $\eta$  possono permettere di portare un contributo non solo sulla natura di questa grandezza ma anche sulle sue relazioni con  $a$ .

Caratteristico sotto questo punto di vista è il comportamento di  $\epsilon''$  dell'alcool caprilico alle basse temperature. Raffreddato lentamente, questo alcool, a circa  $-43^\circ \text{C}$ , si rapprende bruscamente in una massa biancastra dall'aspetto vetroso; in corrispondenza di ciò la banda di assorbimento (cfr. fig. 2, curva  $\lambda = 26$ ) s'interrompe bruscamente, ed anche la costante dielettrica diminuisce da 5.4 a 3.6 (cfr. fig. 3, curva B). Questo fatto può essere interpretato nel senso che, al passaggio allo stato vetroso consegue un brusco aumento di  $\eta$  e, quindi, un'improvvisa diminuzione di  $\nu_m$  per il che la banda si sposta verso onde molto più lunghe. D'altronde non si sa quale influsso abbia su  $\nu_m$  oltre all'aumento di  $\eta$  quello subito da  $a$ , in conseguenza dell'incremento dell'associazione molecolare al passaggio allo stato vetroso.

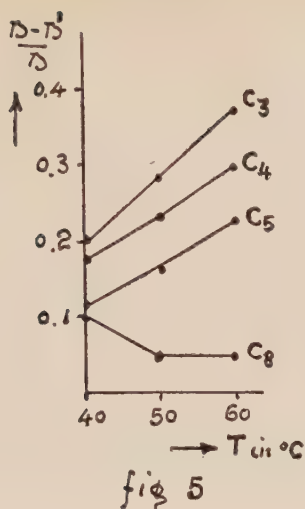
Innalzando lentamente la temperatura da  $-50^\circ \text{C}$  si riesce a mantenere l'alcool allo stato vetroso fino a  $-35^\circ \text{C}$ ; in tal caso, solo per tale temperatura, ha inizio bruscamente la banda di assorbimento (cfr. fig. 2, curva tratteggiata); essa però non si sovrappone a quella ottenuta per graduale abbassamento termico ma mostra due massimi per due temperature diverse, quasi fosse la risultante di due bande dovute a due differenti tempi di rilassazione, per brusca variazione dei valori di  $a$ , in seguito ad improvviso cambiamento dello stato di associazione molecolare. Siamo senza dubbio, per tali temperature, in quello stato « cibotattico » quale fu definito da Stewart<sup>(1)</sup> nelle sue ricerche sopra la diffrazione dei raggi X nei liquidi; mancano tuttora misure di viscosità sull'alcool caprilico a basse temperature; le misure di Bingham e Darral<sup>(2)</sup> dalle quali è tratto il valore di  $\eta$  che figura nella tabella I, si arrestano a  $0^\circ \text{C}$ . Questi risultati lasciano tuttavia prevedere la possibilità di portare con la misura di  $\epsilon''$  un contributo allo studio del passaggio allo stato vetroso.

Si osservi invece l'andamento dell'assorbimento alle basse frequenze e alle alte temperature; come già si era fatto osservare per l'alcool *n*-butilico e dell'iso-amilico, anche per il *n*-propilico si ha un lieve, ma netto, aumento dell'assorbimento. Se si considera la banda ottenuta per  $\lambda = 26$  (cfr. fig. 1) si vede che, dopo un massimo per  $T = -54^\circ \text{C}$ , essa tocca un minimo per  $T = 10^\circ \text{C}$ , per poi aumentare fino a 0.38 per  $T = 60^\circ \text{C}$ .

Misure sugli altri tre alcoli per la stessa frequenza permettono di confrontare (fig. 5) i valori di  $\epsilon''$  per i quattro alcoli; si vede così che esso diminuisce col crescere del numero di atomi di carbonio.

(1) G. W. STEWART, « Phys. Rev. », (2), 33, p. 1087, 1929.

(2) E. C. BINGHAM e L. B. DARRAL, « Journ. Rheology », 1, p. 174, 1930.



A parità di frequenza, il suo andamento è perciò opposto a quello dei massimi di assorbimento testè studiati in tabella I. Ciò lascia pensare, come già si è altrove accennato <sup>(3)</sup>, che debba trattarsi del termine legato alla conduttività degli alcoli; esso comincia ad essere sensibile a temperature elevate, e ciò tanto più quanto minore è il numero di atomi di carbonio dall'alcool studiato.

(3) Cfr. questi « Rendiconti », 1937.



**Chimica.** — *Sopra l'ossidazione degli  $\alpha$ -ossiacidi*<sup>(1)</sup>. Nota di W. CIUSA, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio G. BOERIS.

Come reazione caratteristica per l'acido lattico viene comunemente indicata la seguente<sup>(3)</sup>: « Scaldando una goccia di acido lattico con 10 cm<sup>3</sup> di soluzione di permanganato potassico (1 : 1000), si manifesta pungente l'odore della acetaldeide ».

Tale reazione non è però specifica, perchè l'acido malico trattato con permanganato, nelle stesse condizioni di esperienza dell'acido lattico, fornisce aldeide acetica e ciò anche in accordo con quanto è noto sul contegno dell'acido malico cogli ossidanti.

La reazione per questi due acidi è abbastanza sensibile ed, in determinate condizioni di esperienza, anche quantitativa<sup>(4)</sup>; la sua interpretazione non è però così chiara come potrebbe apparire a prima vista.

Si potrebbe ammettere:

A) che l'acido lattico perda acido formico per dare origine ad aldeide acetica ed acido formico; quest'ultimo poi, in un secondo tempo, verrebbe ossidato dal permanganato:



B) che si formi per ossidazione acido piruvico, il quale, in un secondo tempo, si dovrebbe scomporre in aldeide acetica e anidride carbonica:



Nessuno dei due schemi A e B corrisponde alla realtà.

Cominciamo dallo schema A:

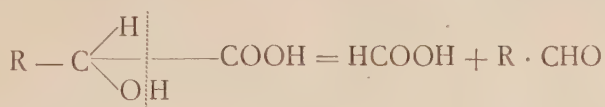
(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Merceologia della R. Università di Bologna.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Tale reazione è riportata nel BEILSTEIN, come presa dal LUNGE, *Berl. chemisch-technische Untersuchungsmethoden*, 6a ed., vol. 3.

(4) BEILSTEIN, IV. Aufl., 3°, pp. 276 e 424; I. KOGAN, « Ztschr. für an. Chem. », 80, 112 (1930). Seguendo le indicazioni di questo A. (vedere anche EMILIANI, « Ann. Chim. appl. », 1933, p. 189) si può determinare l'acido malico in presenza di acido citrico.

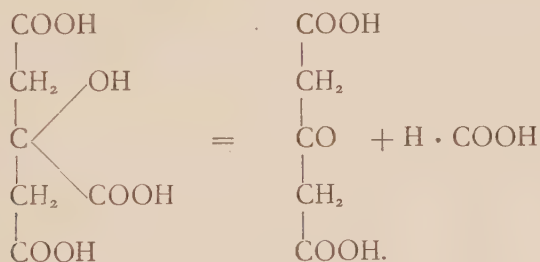
L'equazione (1) corrisponde alla nota eliminazione di acido formico dagli  $\alpha$ -ossi acidi:



(che è la reazione inversa di quella che si verifica per azione dell'acido cianidrico sull'aldeide) tale reazione avviene soltanto per azione di un acido minerale (acido solforico diluito o concentrato a caldo).

Nel caso dell'acido lattico la formazione di aldeide acetica avviene per riscaldamento con acido solforico diluito (1). Per molto tempo anzi tale metodo di preparazione dell'aldeide acetica è stato impiegato industrialmente.

Analogamente l'acido citrico, per riscaldamento con acido solforico concentrato, fornisce acido aceton-dicarbonico (2).



Così del pari l'acido mandelico, per riscaldamento in tubo chiuso a 130° con acido solforico diluito, si scompone in benzaldeide ed acido formico (3).

#### Schema B

L'acido lattico non dà che difficilmente acido piruvico per ossidazione e sempre con scarso rendimento (4).

Per ottenere l'acido piruvico ed in genere per ottenere gli  $\alpha$ -cheto-acidi per ossidazione, bisogna operare in condizioni speciali (5). C'è da aggiungere che l'acido piruvico è abbastanza stabile e non si scompone (in aldeide acetica ed anidride carbonica) almeno che non venga scaldato in un tubo chiuso a 150 gradi con acido solforico al 10% (6).

(1) ERLNMEYER, «Z.», 1868, p. 343.

(2) PECHMANN, «B.», 17, 2542; Matteo SPICA, «Gazzetta», 31, 11, 65. Questa reazione permette anzi di svelare gr. 0,001 di acido citrico.

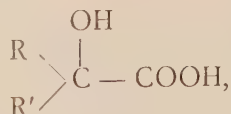
(3) RIEDERMANN, «B.», 19, 638.

(4) Non mi pare qui inutile ricordare che mentre l'acido lattico costa poche lire al kg., l'acido piruvico ne costa alcune centinaia: l'ossidazione dell'acido lattico ad acido piruvico è dunque ben lontana dall'essere una reazione netta (vedi più avanti).

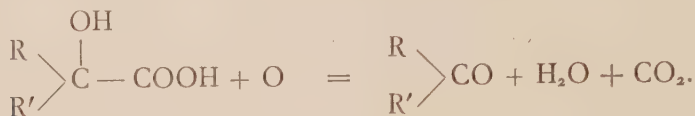
(5) FENTON JONES, «J. Chem. Soc.», 77, 71.

(6) BEILSTEN e WEGAND-B. 17, 841.

Ma che lo schema B sia da scartare lo dimostra il fatto che anche gli  $\alpha$ -ossi acidi terziari



per ossidazione forniscono il chetone  $\text{R} - \text{CO} - \text{R}'$  ed anidride carbonica:

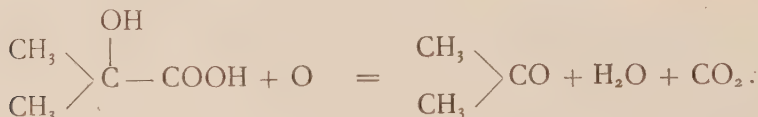


In questo processo, che non differisce essenzialmente da quello dell'ossidazione dell'acido lattico nelle condizioni indicate, non si può ammettere la formazione intermedia di un acido  $\alpha$ -chetonico.

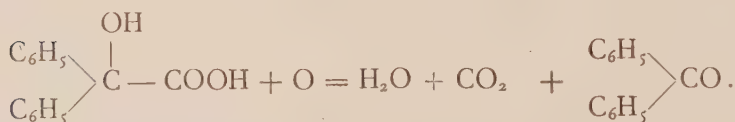
L'ossidazione degli  $\alpha$ -ossi acidi secondari e terziari, che avviene nelle stesse condizioni di esperienza dell'acido lattico, con formazione di un composto carbonilico (aldeide dai secondari, chetone dai terziari), è di indole generale:

a) L'acido lattico dà aldeide acetica ed anidride carbonica <sup>(1)</sup>:  
 $\text{CH}_3 \cdot \text{CHOH} \cdot \text{COOH} + \text{O} = \text{CH}_3 \cdot \text{CHO} + \text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2$

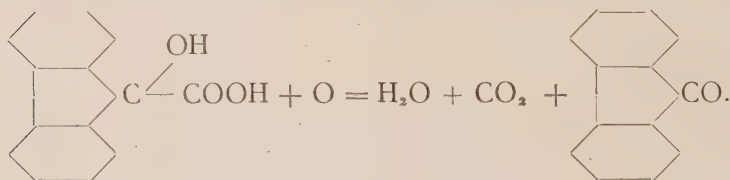
b) L'acido dimetil-ossi-acetico (acido  $\alpha$ -ossiisobutirrico) dà acetone ed anidride carbonica <sup>(2)</sup>:



c) L'acido benzilico dà benzofenone ed anidride carbonica <sup>(3)</sup>



d) L'acido difenilenglicolico, dà fluorenone ed anidride carbonica <sup>(4)</sup>



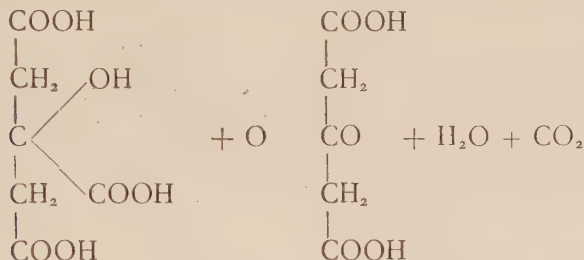
(1) Loc. cit.

(2) MEYER JACOBSON, I. II. 5, 71.

(3) MEYER JACOBSON, II. II. 92.

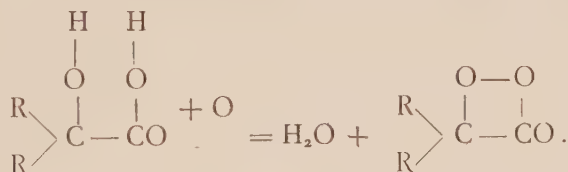
(4) DENIGES, « C. R. », 130. 32.

e) L'acido citrico dà l'acido acetondicarbonico ed anidride carbonica (1)

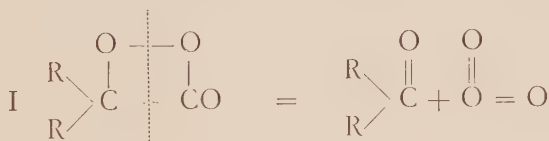


e gli esempi potrebbero ancora continuare.

In base alle considerazioni seguenti, il meccanismo della reazione, secondo me, deve essere ricercato nella formazione di un composto eterociclico tetratomico:

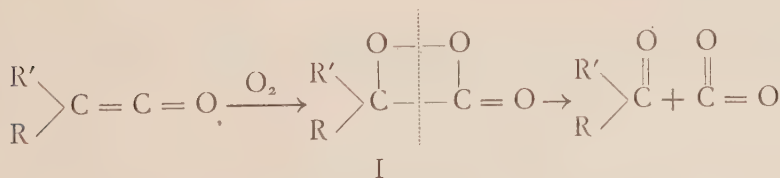


Tale composto come tutti quelli a nucleo tetratomico, si scinde immediatamente in chetone ed in anidride carbonica:



Soltanto in questa maniera si può comprendere bene come nell'ossidazione degli  $\alpha$ -ossi acidi, si possa staccare un atomo di carbonio da un'altro atomo di carbonio.

Questi perossidi non sono isolabili, ma si può ammettere con Staudinger che si formino in un primo tempo nell'autossidazione dei cheteni:



(1) MEYER JACOBSON, II. III. 42.

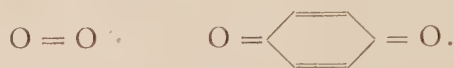
Staudinger <sup>(1)</sup> infatti:

a) per autossidazione del dimetilchetene, ottiene acetone ed anidride carbonica.

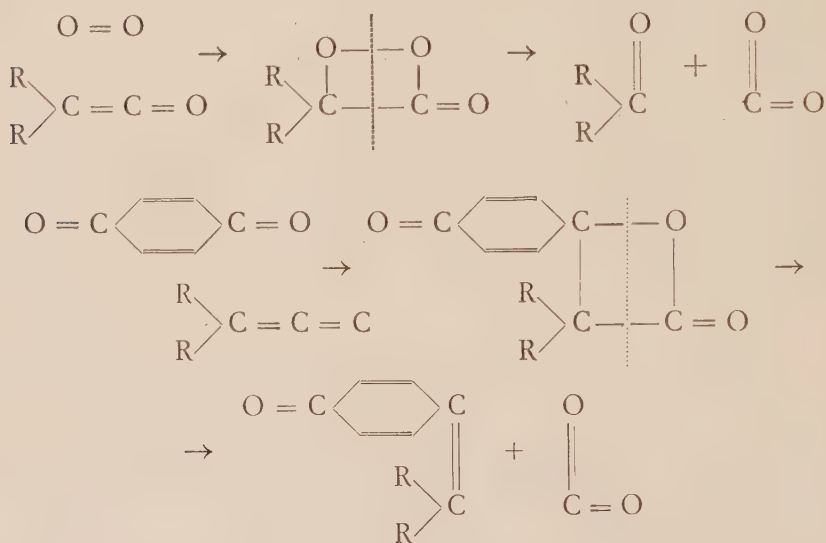
b) dal metilfenilchetene, ottiene acetofenone ed anidride carbonica.

c) dal difenilchetene, ottiene benzofenone ed anidride carbonica.

Se però il composto I non è isolabile, si può, nel processo di autossidazione dei cheteni, impiegando un sottile artificio suggerito dalla nota regola di Angeli, sostituire all'ossigeno il chinone

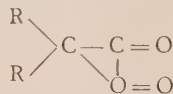


Il chinone si addiziona ai cheteni dando origine ai  $\beta$ -lattoni i quali, come sostanze ad anello tetratomico, si scompongono in un composto etilenico ed anidride carbonica. I due processi sono perfettamente comparabili <sup>(2)</sup>.



e la spiegazione del processo di ossidazione degli  $\alpha$ -ossi acidi diventa sempre più attendibile.

(1) « Berichte », 58 1079. Come primo prodotto l'A. ammette che si formi l'ossido

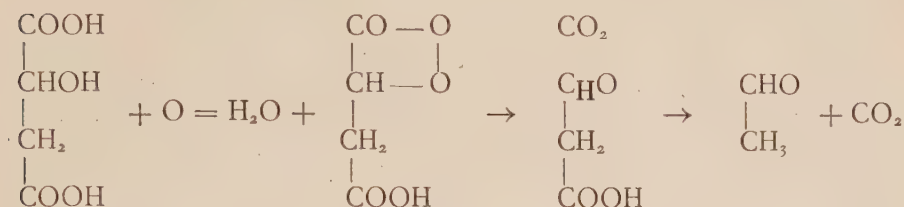


il quale, in un secondo tempo, si trasforma nel composto 1.

(2) STAUDINGER, « An. » 356, 62 (1907): « A. », 380, 244 (1911).



In accordo con questo meccanismo di ossidazione degli  $\alpha$ -ossi acidi, l'acido malico fornisce, come si disse, aldeide acetica:



Sempre in accordo con questo modo di interpretare l'ossidazione degli  $\alpha$ -ossi acidi, si poteva inoltre prevedere che per ossidazione, nelle stesse condizioni di esperienza dell'acido lattico, del suo estere etilico, quest'ultimo, che non può ossidarsi secondo lo schema ammesso per avere l'atomo di idrogeno del carbossile « bloccato », dia un rendimento in piruvato di etile, maggiore del rendimento in acido piruvico dell'acido lattico.

Furono ossidati con acqua di bromo alla luce (durata dell'insolazione ore 40, mese di settembre) soluzioni equimolecolari di acido lattico e di lattato di etile (ac. lattico gr. 20, acqua ccm. 1000, bromo ccm. 20; lattato di etile gr. 26,2, acqua ccm. 1000, bromo ccm. 20): il rendimento in acido piruvico è stato del 13,18 %, e quello del piruvato di etile è stato del 33,0 %<sup>(1)</sup>.

L'ossidazione con ipobromito (bromo ccm. 20, soluzione di KOH al 50 % ccm. 50) ottenuta per addizione a soluzioni equimolecolari, come sopra, di acido lattico e di lattato di etile, ha dato un rendimento in acido piruvico del 0,5 % e del 9 % in piruvato di etile.

(1) Tanto l'acido piruvico, che il piruvato di etile, furono dosati pesandoli sotto orma di fenilidrazoni.

**Chimica.** — *Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. — Composti del Neodimio* <sup>(1)</sup>.  
Nota IV di A. IANDELLI e E. BOTTI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp.  
L. ROLLA.

In alcune note precedenti <sup>(3)</sup> abbiamo esaminato la struttura cristallina dei composti fra Lantanio, Cerio e Praseodimio e l'Azoto, Fosforo, Arsenico e Antimonio della formula generale MeX, preparandoli per unione diretta degli elementi.

Dei composti corrispondenti del Neodimio è conosciuto solo l'azoturo, ottenuto sia per riduzione dell'ossido in corrente di Azoto <sup>(4)</sup>, sia direttamente dal metallo <sup>(5)</sup>. Noi abbiamo preparato anche il fosfuro, l'arseniuro e l'antimoniuro di Neodimio in modo analogo a quello seguito per gli stessi composti del Lantanio, Cerio e Praseodimio. Come negli altri casi la reazione fra il metallo raro e il metalloide è molto vivace, specialmente con l'Azoto e il Fosforo.

L'azoturo ha le stesse caratteristiche di quello descritto da Muthmann e Beck. Esso è nero, opaco, fragile; e si altera facilmente all'aria umida, svolgendo ammoniacca. Il fosfuro è pure facilmente decomponibile, mentre presentano una stabilità nettamente maggiore l'arseniuro e l'antimoniuro; che sono anche i meno fragili.

I quattro composti sono stati esaminati col metodo delle polveri. Per quelli con l'Azoto, Fosforo e Antimonio si è usata la radiazione K del Rame; per l'arseniuro si è usata invece la radiazione K del Ferro. Nelle tabelle I e II sono raccolti i risultati della misura dei fotogrammi relativi.

Le righe dei fotogrammi si ordinano tutte sul grafico di Hull per il reticolo cubico a facce centrate. Soltanto per il fosfuro, su un campione non perfettamente preparato, si sono avute alcune righe che potevano essere attribuite al metallo raro che non aveva reagito col vapore di Fosforo. Ripetendo la preparazione si è ottenuto un prodotto che non dava più tali righe estranee alla struttura trovata.

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Genova.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Questi «Rendiconti», XXIV, 459 (1936); XXV, 129 (1937).

(4) C. MATIGNON, «Compt. Rend.», 131, 837 (1900).

(5) W. MUTHMANN U. K. BECK, «Liebig's Ann.», 331, 58 (1904).

TABELLA I.

*Fotogrammi delle polveri di NdN, NdP e NdSb.*

*Anticatodo di Rame, radiazione K:  $\lambda_{\alpha} = 1.539 \text{ \AA}$  ;  $\lambda_{\beta} = 1.389 \text{ \AA}$ .*

NdN				NdP				NdSb				Indici
Intensità		Θ corr.	d/n	Intensità		Θ corr.	d/n	Intensità		Θ corr.	d/n	
osser.	calc.			osser.	calc.			osser.	calc.			
m.	1.95	15° —	2.973	md	1.56	13°12'	3.370	—	0.05	—	—	1 1 1
m	1.90	17°25'	2.571	f	2.63	15°21'	2.907	m	6.45	14° 9'	3.148	2 0 0
mf	2.61	25° 6'	1.811	f-ff	3.84	21°59'	2.055	f	9.81	20° 8'	2.236	2 2 0
f	3.15	29°44'	1.551	mf-f	2.68	25°54'	1.761	—	0.08	—	—	3 1 1
md	1.34	31°17'	1.480	m	2.00	27°13'	1.682	m	5.23	24°57'	1.824	2 2 2
d-dd	0.82	36° —	1.284	md	1.25	31°49'	1.460	md	3.29	29°11'	1.578	4 0 0
mf	2.32	40°43'	1.180	m	1.86	35°11'	1.335	—	0.06	—	—	3 3 1
f	3.02	42° 2'	1.149	ff	4.31	36°11'	1.303	ff	11.35	33° —	1.413	4 2 0
mf-f	2.71	47°10'	1.049	f	3.98	40°12'	1.192	f	10.08	36°44'	1.286	4 2 2
f	3.12	51° 6'	0.989	mf	2.15	43°17'	1.122	—	0.07	—	—	5 1 1
m	2.05	57°53'	0.909	mf	1.98	48°23'	1.029	d	4.56	43°35'	1.116	3 3 3
ff	8.02	62°13'	0.870	mf-f	3.54	51°35'	0.982	—	0.10	—	—	4 4 0
ff	6.90	63°41'	0.858	f-ff	5.44	52°36'	0.969	ff	11.49	47° 6'	1.050	5 3 1
fff	8.54	71° 2'	0.814	f	4.98	56°38'	0.921	f	9.56	50°35'	0.996	6 0 0
—	—	—	—	—	2.42	—	—	—	0.06	—	—	4 4 2
—	—	—	—	f	6.28	61°34'	0.875	f-ff	10.71	54° 7'	0.950	6 2 0
—	—	—	—	—	—	—	—	d	4.12	57°41'	0.910	5 3 3
—	—	—	—	—	—	—	—	f-ff	14.51	61°34'	0.875	6 2 2
—	—	—	—	—	—	—	—	fff	36.06	65°45'	0.844	4 4 4
$a_0 = 5.141 \text{ \AA}$				$a_0 = 5.826 \text{ \AA}$				$a_0 = 6.309 \text{ \AA}$				6 4 0
												6 4 2

Le intensità osservate sono perfettamente uguali a quelle dei composti corrispondenti precedentemente esaminati. Come per questi ultimi, si osserva per le righe a indici dispari una diminuzione progressiva dell'intensità nel passaggio dal composto con l'Azoto a quello con l'Antimonio. Anche qui

una struttura tipo cloruro di Sodio rende perfettamente conto di questo, e permette di calcolare per le intensità dei valori in buon accordo con quelli trovati.

Sulla tabella I sono riportati questi valori, calcolati per i composti del Praseodimio. Solo per l'arseniuro si è rifatto il calcolo usando il fattore atomico del Neodimio; ma, come si vede facilmente (tabella II), le differenze nell'intensità assoluta sono minime e l'andamento è identico.

TABELLA II.

*Fotogramma delle polveri di NdAs.*

*Anticatódo di Ferro, radiazione K:  $\lambda_{\alpha_1, \alpha_2} = 1.934 \text{ \AA}$ .*

Intensità		$\Theta$ corr.	$d/n$	Indici
osservata	calcolata			
—	0.56	—	—	1 1 1
mf-f	4.09	$18^{\circ}55'$	2.983	2 0 0
f	5.84	$27^{\circ}25'$	2.100	2 2 0
d	0.99	$32^{\circ}30'$	1.800	3 1 1
m	3.05	$34^{\circ}13'$	1.720	2 2 2
md	2.01	$40^{\circ}30'$	1.489	4 0 0
—	0.82	—	—	3 3 1
f-ff	7.98	$46^{\circ}33'$	1.332	4 2 0
ff	9.10	$52^{\circ}39'$	1.216	4 2 2
—	1.58	—	—	5 1 1
				3 3 3
ff	8.93	$66^{\circ}33'$	1.054	4 4 0

$$a_0 = 5.958 \text{ \AA}$$

La costante reticolare varia in modo regolare, crescendo gradualmente dal composto con l'Azoto a quello con l'Antimonio. Tale variazione è simile a quella dei composti analoghi del Lantanio, Cerio e Praseodimio.

**Chimica.** — *Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43.* Nota di C. PERRIER e E. SEGRÉ, presentata dal Socio N. PARRAVANO.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi* <sup>(1)</sup>. Nota I di G. TEDESCHI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. O. SCARPA.

La dissoluzione dei metalli negli acidi è stata oggetto di numerose ricerche, ma gli Autori (spesso discordi fra loro nell'interpretazione dei fatti) non sono sempre riusciti a chiarire sufficientemente i fenomeni.

Diversi sono i fattori che influiscono sulla velocità della reazione fra acidi e metalli: oltre alla concentrazione dell'acido e alla sua natura, agiscono le sostanze eventualmente in esso disciolte, le impurezze del metallo, lo stato chimico-fisico della superficie di questo, nonchè le velocità delle diffusioni; possono intervenire inoltre fenomeni di adsorbimento, formazioni di pile locali, fenomeni di catalisi eterogenea in genere ecc.

Name e Hill <sup>(3)</sup> hanno messo in evidenza che le relazioni eterogenee possono esser divise in tre grandi categorie:

I. La velocità della reazione chimica è molto maggiore della velocità di diffusione, quindi è quest'ultima a regolare il procedere del fenomeno.

II. La reazione chimica è molto lenta in confronto al processo di diffusione, e la velocità osservata è regolata dal processo chimico.

III. La costante della velocità di diffusione e quella della velocità della reazione chimica sono dello stesso ordine di grandezza ed entrambi i fenomeni partecipano alla determinazione della velocità osservata.

Questa suddivisione può essere applicata in particolare (tenendo tuttavia presente che altri fenomeni possono introdurre nuove complicazioni) alla dissoluzione dei metalli negli acidi. Infatti nel caso dei metalli fortemente elettronegativi <sup>(4)</sup> come il magnesio <sup>(5)</sup> e, in particolari condizioni, lo zinco <sup>(6)</sup> (quelli ancor più elettronegativi danno luogo a reazioni eccessivamente vio-

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Elettrochimica e Chimica fisica del R. Politecnico di Milano.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) NAME e HILL, «Am. J. Sci.», 42, 307 (1916).

(4) Seguo qui la convenzione elettrochimica per cui è considerato elettronegativo un metallo che, immerso in una soluzione normale di un suo sale, si carica elettronegativamente rispetto all'elettrodo normale a idrogeno.

(5) E. BRUNNER, «ZS. Phys. Chem.», 47, 56 (1904); M. CENTNERSZWER, «ZS. Phys. Chem.», A 137, 352 (1928); C. V. KING e W. H. CATHCART, «J. Am. Chem. Soc.», 59, 63 (1937).

(6) M. CENTNERSZWER, «ZS. Phys. Chem.», A 141, 297 (1929); C. V. KING e M. M. BRAVERMAN, «J. Am. Chem. Soc.», 54, 1744 (1932).



lente, in modo che non se ne può seguire l'andamento) la velocità della reazione chimica è assai elevata e il procedere della dissoluzione è regolato dalla velocità di diffusione, mentre per i metalli meno elettronegativi la velocità della reazione con gli acidi è in genere assai minore e può, in certi casi, arrivare ad essere inferiore alla velocità di diffusione.

Infatti secondo CENTNERSZWER nella dissoluzione nell'acido cloridrico, del cadmio <sup>(1)</sup>, dello stagno <sup>(2)</sup> e persino dell'alluminio <sup>(3)</sup>, è il fenomeno puramente chimico quello che predomina: la cinetica della reazione non è più rappresentata, come nel caso dello zinco, da una equazione del primo ordine rispetto alla concentrazione dell'acido, caratteristica per le reazioni dominate dalla diffusione <sup>(4)</sup>, ma da funzioni di ordine superiore. E così dicasi per il coefficiente di temperatura che è dell'ordine di grandezza che in genere presentano le reazioni chimiche pure.

Anche per il piombo, che è uno dei metalli meno elettronegativi (il potenziale normale è  $-0.12$  volt), la velocità di dissoluzione negli acidi risulta, come si vedrà più avanti, dominata dalla reazione chimica.

È noto che il piombo laminato non viene praticamente attaccato dall'acido solforico: o per meglio dire l'attacco procede con enorme lentezza, ostacolato dal piccolo strato di solfato di piombo che si forma sulla superficie del metallo al primo contatto coll'acido.

Il piombo spugnoso, ottenuto per via elettrolitica, si comporta invece in modo diverso <sup>(5)</sup>. Esso reagisce con l'acido solforico sviluppando idrogeno con una velocità apprezzabile ed il suo stato di grande suddivisione oltre a presentare una enorme superficie di contatto con l'acido, impedisce al solfato formatosi di costituire uno strato continuo che ostacoli il procedere della reazione. Infatti il prof. O. Scarpa <sup>(6)</sup> ha dimostrato che lo sviluppo di idrogeno dagli accumulatori a piombo (ove le impurità contenute siano trascurabili), durante il periodo di riposo, è dovuto essenzialmente alla reazione  $Pb + H_2SO_4 = PbSO_4 + H_2$  ed ha notato che tale sviluppo resta approssimativamente costante (se la temperatura resta costante) per intere settimane, prova evidente che la superficie effettiva del Pb non viene variata e che non si forma uno strato protettivo di  $PbSO_4$  che farebbe diminuire la velocità della reazione. Inoltre ho potuto constatare che in un intervallo di tempo sufficientemente limitato (dalle 10 alle 20 ore) è possibile eseguire esperienze perfettamente riproducibili.

In modo analogo il Pb si comporta rispetto all'acido cloridrico <sup>(7)</sup>.

(1) M. CENTNERSZWER, « ZS. Phys. Chem. », A 137, 352 (1928).

(2) ID., « ZS. Phys. Chem. », A 141, 167 (1929).

(3) M. CENTNERSZWER e W. ZABLOCKI, « ZS. Phys. Chem. », 122, 455 (1926).

(4) BRUNER e TOLLOCZKO, « ZS. Phys. Chem. », 35, 283 (1900).

(5) L. JUMAU, *Les accumulateurs électriques*, p. 330, Paris, 1904.

(6) O. SCARPA, *L'Energia Elettrica*, XIII, 339 (1936).

(7) Sono in corso esperienze sulla velocità di dissoluzione del Pb nell'HCl di cui verrà data relazione quanto prima.

Date queste favorevoli circostanze è stato possibile iniziare una serie di esperienze sistematiche sulla dissoluzione del piombo negli acidi, nell'intendimento di portare un contributo alla conoscenza del meccanismo di questa reazione.

#### DISSOLUZIONE DEL PIOMBO NELL'ACIDO SOLFORICO.

Il piombo spugnoso è stato preparato per via elettrolitica in due modi:

1° In fondo a un piccolo vaso poroso veniva messo a contatto con un elettrodo di Pt (catodo) dell'ossido di piombo,  $PbO$  (ottenuto per decomposizione termica dal nitrato), impastato con acido solforico. Il vaso riempito di acido solforico al 10 % veniva immerso in un bicchiere contenente una eguale soluzione di acido e in cui pescava l'elettrodo positivo pure di platino. Applicati 4 volt agli elettrodi si faceva procedere l'elettrolisi fino a completa riduzione dell'ossido di piombo.

2° Veniva ridotto direttamente in capsula di platino, che fungeva da catodo, del biossido di piombo (per analisi) immerso in una soluzione di acido solforico al 10 % circa.

La velocità di reazione era seguita manometricamente nel seguente modo. In un palloncino di volume noto venivano introdotti alcuni grammi di piombo spugnoso e una certa quantità di acido; il volume del piombo più l'acido veniva precedentemente misurato. Il palloncino immerso in un termostato riscaldato elettricamente e accuratamente termoregolato ( $\pm 0.01^\circ$ ) era munito di un manometro e di un rubinetto di sfogo che ne attraversavano il tappo.

Raggiunta la costanza della temperatura si chiudeva il rubinetto di sfogo e si iniziavano le letture delle variazioni di pressione causate dallo sviluppo di idrogeno.

Per avere una velocità di reazione apprezzabile si sono usate soluzioni di acido che variavano da un titolo di 2 equiv./litro a 8 equiv./litro. La concentrazione dell'acido non variava praticamente durante le misure date le piccolissime quantità che ne venivano consumate, e quindi la velocità di reazione, se la temperatura non variava, rimaneva pure costante.

Il manometro era costituito da un tubo capillare, cosicchè gli spostamenti del liquido manometrico non incidevano in modo apprezzabile sul volume totale del sistema. Per verificare se il tubo capillare era di diametro uniforme nei vari tratti e non dava luogo ad errori per diverso effetto capillare, si è operato nel seguente modo: sono stati introdotti nel tubo diverse quantità di liquido e per mezzo di un catetometro si è osservato, di volta in volta, se i menischi nei due rami raggiungevano la stessa altezza. L'errore è risultato inferiore a  $1/10$  di millimetro quindi praticamente trascurabile. Come liquido manometrico si è usata tetralina colorata ( $d_{15^\circ} = 0.973$ ).

Noto quindi il volume del recipiente e la temperatura del bagno, si poteva calcolare, dalle variazioni della pressione lette sul manometro, il

numero di grammimolecole di idrogeno sviluppate in un minuto. Tale numero veniva assunto come misura della velocità della reazione  $\text{Pb} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{PbSO}_4 + \text{H}_2$ .

La tabella I riassume i dati di una serie di misure effettuata per stabilire l'influenza della concentrazione dell'acido sulla velocità della reazione.

TABELLA I.

Volume palloncino = 138 cc.       $\text{Pb} \approx 20$  gr. (da  $\text{PbO}_2$ )  
 Volume  $\text{Pb} + \text{soluz.}$  = 50 cc.      Temperatura =  $30.2^\circ$   
 Volume rimanente = 88 cc.

C	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	$K = \frac{\Delta n}{\Delta \tau} \cdot \frac{1}{C^2}$
3.16	1.96	$6.76 \cdot 10^{-7}$	$6.8 \cdot 10^{-8}$
3.44	2.34	$8.08 \cdot 10^{-7}$	$6.73 \cdot 10^{-8}$
6.34	7.35	$25.4 \cdot 10^{-7}$	$6.32 \cdot 10^{-8}$
7.2	9.2	$31.8 \cdot 10^{-7}$	$6.15 \cdot 10^{-8}$

C = concentrazione dell'acido solforico in equiv/litro.

$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$  = aumento della pressione per un minuto in mm. di tetralina.

$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$  = grammimolecole di idrogeno sviluppate in un minuto.

La velocità di reazione risulta proporzionale al quadrato della concentrazione dell'acido. Infatti ponendo  $\frac{\Delta n}{\Delta \tau} = KC^2$  (1) il valore di K si mantiene sensibilmente costante al variare della concentrazione dell'acido.

Una seconda serie di misure è stata effettuata per determinare il coefficiente di temperatura della reazione qui studiata. La tabella II riporta i dati ottenuti usando piombo spugnoso preparato da  $\text{PbO}$  e la tabella III riporta quelli avuti usando piombo preparato da  $\text{PbO}_2$ .

(1) Questa equazione ha naturalmente solo un valore formale.

TABELLA II.

Volume palloncino = 138 cc.      Pb  $\approx$  20 gr. (da PbO)  
 Volume Pb + soluz. = 30 cc.      Acido solforico 7.6 N  
 Volume rimanente = 108 cc.

Temperatura	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	$K = \frac{\Delta n}{\Delta \tau} \cdot \frac{1}{C^2}$
25.2°	1.32	$5.6 \cdot 10^{-7}$	$0.97 \cdot 10^{-8}$
30	1.83	$7.75 \cdot 10^{-7}$	$1.34 \cdot 10^{-8}$
35	2.51	$10.46 \cdot 10^{-7}$	$1.81 \cdot 10^{-8}$
40	3.51	$14.39 \cdot 10^{-7}$	$2.49 \cdot 10^{-8}$

TABELLA III.

Volume palloncino = 138 cc.      Pb  $\approx$  20 gr. (da PbO<sub>2</sub>)  
 Volume Pb + soluz. = 100 cc.      Acido solforico 7.6 N.  
 Volume rimanente = 38 cc.

Temperatura	$\frac{\Delta P}{\Delta \tau}$	$\frac{\Delta n}{\Delta \tau}$	$K = \frac{\Delta n}{\Delta \tau} \cdot \frac{1}{C^2}$
25°	14.4	$21.85 \cdot 10^{-7}$	$3.78 \cdot 10^{-8}$
30.2	20.65	$30.8 \cdot 10^{-7}$	$5.33 \cdot 10^{-8}$
35	27.8	$40.75 \cdot 10^{-7}$	$7.05 \cdot 10^{-8}$
40	38	$54.9 \cdot 10^{-7}$	$9.5 \cdot 10^{-8}$

Come si vede dalle precedenti tabelle la velocità di reazione subisce un aumento di circa il doppio per un incremento di dieci gradi nella temperatura  $\left( \frac{K_{T+10}}{K_T} = \sim 1.85 \right)$  e questo sia con il piombo ottenuto da PbO che con quello preparato da PbO<sub>2</sub>. La variazione della costante K in funzione della temperatura segue in entrambi i casi un andamento che è assai bene rappresentato (vedi figura) dalla equazione di Arrhenius:

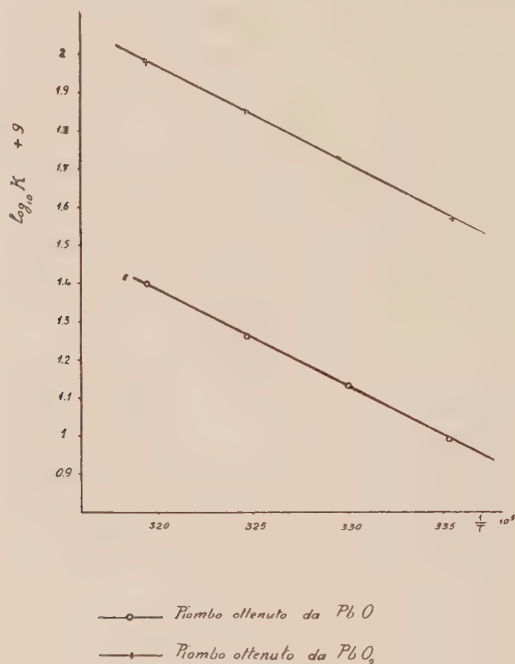
$$\ln K = - \frac{E}{RT} + B$$

dove E (energia di attivazione) ha un valore di 11600 calorie e B è una costante che, a parità di altre condizioni, dipende dalla superficie del piombo.

L'elevato coefficiente di temperatura fa senz'altro escludere che la velocità della reazione sia dominata dalla diffusione. Se ciò fosse, il coefficiente di

temperatura avrebbe un valore che al massimo potrebbe arrivare a 1.5 (in genere 1.2–1.3) <sup>(1)</sup>.

La dissoluzione del piombo negli acidi rientra quindi nella seconda categoria delle reazioni eterogenee cui è stato precedentemente accennato.



Inoltre il prof. O. Scarpa <sup>(2)</sup> ha considerato come assai poco probabile l'ipotesi che la dissoluzione del piombo sia essenzialmente dovuta all'azione di pile locali costituite dalle eventuali impurezze che possono essere ancora presenti nel piombo. Infatti ammettendo che per le suddette pile si possano applicare i coefficienti di temperatura delle pile usuali e della conducibilità dell'elettrolita, il coefficiente di temperatura della trasformazione complessiva che si potrebbe calcolare in base alle suddette ipotesi, risulterebbe di un ordine di grandezza nettamente inferiore a quello determinato sperimentalmente.

D'altra parte l'opinione dei vari Autori circa l'influenza delle impurezze sulla dissoluzione del piombo è assai discorde. Mentre alcuni sostengono che la reazione è dovuta alle pile locali costituite da impurezze di metalli più nobili <sup>(3)</sup>, altri invece affermano addirittura il contrario e trovano che la

(1) Cfr. C. V. KING e M. M. BRAVERMAN, *oc. cit.*

(2) O. SCARPA, *loc. cit.*

(3) A. QUARTAROLI, *Atti del V Congresso Nazionale di Chimica Pura e Applicata*, p. 503, Roma, 1936.



presenza in piccole quantità di rame <sup>(1)</sup> o di argento <sup>(2)</sup> nel piombo diminuisce l'attacco di quest'ultimo da parte degli acidi. Mi riprometto quindi di ritornare anche su questo importante aspetto del problema.

Riassumendo i fatti osservati nel corso delle suesposte esperienze, si può affermare che, nel limite delle concentrazioni dell'acido qui considerate e adoperando piombo di un alto grado di purezza:

1° il piombo spugnoso dà luogo con l'acido solforico a una reazione dotata di una velocità nettamente apprezzabile;

2° la velocità di reazione cresce proporzionalmente al quadrato della concentrazione dell'acido;

3° il coefficiente di temperatura della velocità di reazione è dell'ordine di grandezza di quello caratteristico delle reazioni chimiche dirette.

Mi è grato di ringraziare vivamente il chiar.mo prof. O. Scarpa per l'incoraggiamento e i benevoli consigli.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Sullo spettro di fiamma dell'europio e sopra la persistenza di tre righe di bassa eccitazione.* Nota di G. PICCARDI, presentata dal Corrisp. L. ROLLA.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

(1) P. PASCAL, *Traité de Chimie Minérale*, to. IX, p. 153, Paris, 1933.

(2) B. GARRE e H. J. MIKULLA, «ZS. Anorg. Chem.», 212, 326 (1933).

**Petrografia.** — *Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorùm)* <sup>(1)</sup>. Nota I di P. COMUCCI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. P. ALOISI.

Di alcune rocce raccolte dal prof. Ardito Desio durante la Spedizione geografica italiana al Karakorùm (1929), diretta da S. A. R. il Duca di Spoleto, ho già dato notizia, descrivendo alcuni scisti di Dasso (Baltistàn) <sup>(3)</sup>. Mentre sto preparando una illustrazione generale di tutta la collezione, credo che meriti esporre separatamente i risultati dello studio di tre singolari campioni di roccia, provenienti dalla regione del ghiacciaio Baltoro. Per comunicazioni verbali, gentilmente favoritemi dal prof. Desio stesso, mi risulta che essi sono contenuti in calcari cristallini, certamente in forma di filoni. È probabile un'azione di contatto; certo il sistema è stato sottoposto ad azioni deformanti, come si deduce dai fossili laminati.

Campione n. 230 (22 maggio 1929) raccolto presso il campo V nel ghiacciaio Baltoro a Concordia.

Roccia melanocratica grigia scura, a grana media minuta, compatta: visibili laminette numerose, di contorno talora regolare, di mica color bruno con riflessi dorati.

La struttura microscopica è nettamente allotriomorfa per il feldispato, che forma la massa principale della roccia. Questo è alterato più o meno profondamente per caolinizzazione; si presenta in elementi molte volte minuti, talora a dimensioni più grandi, e sembra essere quasi totalmente ortoclasico, a giudicare dalla rifrazione inferiore a quella della collolite. Non sono visibili geminazioni nè sfaldature.

Dalla massa feldispatica spiccano cristalli più o meno idiomorfi, a rifrazione più forte di mica, di pirosseno, di apatite. La mica è in belle lamine con pleocroismo:

$\alpha$  = quasi incolore

$\beta$  e  $\gamma$  = giallo assai chiaro,

cioè variazione di assorbimento inusitatamente leggiera. A luce convergente dà una croce, che solo in qualche caso sembra deformarsi leggermente du-

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXI, ser. 6<sup>a</sup>, p. 284, 1935.

rante la rotazione della lamina; segno della birifrazione negativo. Le lamine hanno contorno regolare cristallografico, e sono frequenti quelle esagonali parallele alla base. Risultano quasi sempre circondate da un orlo, molte volte riconoscibile per biotite ordinaria fortemente pleocroica. Qualche area è occupata da lamelle di mica con pleocroismo:

$\alpha$  = verde chiaro debole

$\beta$  e  $\gamma$  = verde erba

le quali sembrano sostituire un maggiore individuo dell'altra mica.

Si notano inoltre, assai meno frequenti, dei prismi di pirosseno incolore, spesso non regolarmente terminati, che sono riferibili al tipo diopsidico.

L'apatite è frequente per lo meno quanto il diopside, peraltro in individui generalmente minori. Sono prismetti sempre allungati, con evidenti segni di sfaldatura basale, qualche volta alquanto spessi, sempre con allungamento negativo.

Abbondante è la calcite, in forma di vene o di riempimento. Non è rara la titanite in sezioni alquanto idiomorfe, di colore giallo bruno, e son presenti granuli magnetici non molto abbondanti.

Campione n. 159 da una morena presso il campo VI, Baltoro.

Roccia compatta, prevalentemente costituita da una parte a superficie ruvida, grigio scura, in cui si vedono individui micacei simili a quelli della roccia precedente: si hanno poi delle parti leucocrate irregolari più piccole, di aspetto alquanto aplitico, abbastanza nettamente limitate rispetto alla prima.

La porzione melanocratica ha struttura porfirica, specialmente per gli individui micacei possedenti caratteri simili a quelli della mica osservata nella roccia precedente: però è da osservare che vi sono passaggi fra questi individui porfirici, e quelli minori della massa fondamentale. Talvolta nelle lamine di mica compaiono nuclei con caratteri biotitici quasi normali, e solo l'orlo più o meno stretto appartiene alla mica caratteristica della roccia. In certe aree questa mica è sostituita da quella verde, già accennata per l'altro campione, e a forte ingrandimento anche nella massa fondamentale si distinguono squamette molto simili.

La calcite è frequente nella massa degli elementi minori, distribuita con uniformità fra questi. Peraltro sembra talora sostituire altri minerali, forse la mica porfirica chiara. Non manca qualche rara laminetta di anfibolo con pleocroismo vivace nei toni verdi, e qualche granulo di quarzo a estinzione ondulata.

Riempie gli interstizi fra questi minerali del feldispato non idiomorfo, privo di caratteristiche cristallografiche, e di difficile determinazione esatta: solo raramente si trova in individui un po' maggiori. Non si può escludere

la presenza di ortoclasio, ma in prevalenza è plagioclasio con carattere acido, a giudicare dal confronto della sua rifrazione con quella della collolite.

L'apatite, meno frequente, compare anche in vistose sezioni porfiriche. Non rari granuli magnetitici.

Nella parte chiara, a grana piuttosto minuta, mancano minerali colorati, e ne sono costituenti il quarzo e il feldispato, tanto ortoclasico quanto plagioclasico. La struttura si avvicina a quella granitica ipidiomorfa, e il quarzo specialmente ha sempre contorno assai irregolare. Esso è in granuli piuttosto grandi, con numerose inclusioni, raramente con estinzioni ondulate, talvolta racchiudente lungo le spaccature del prodotto caolinico. Son da notare degli aghi verdi sottilissimi, a ciuffi, talvolta inclusi nel quarzo, indeterminabili.

I feldispati sono notevolmente caolinizzati, e l'ortose è forse prevalente sul plagioclasio. L'ortoclasio ha estinzioni regolari, contorno non idiomorfo, e usualmente è senza geminazioni. Il plagioclasio presenta in generale geminazioni albitiche polisintetiche, in lamelle sottilissime, e talvolta anche secondo l'albite-periclino; per l'avanzata caolinizzazione non è facile trovare sezioni adatte per una determinazione esatta. Nonostante sembra trattarsi di un oligoclasio acido, a giudicare dall'estinzioni simmetriche piccole nei geminati albitici, e dalla rifrazione nettamente minore nei confronti con il quarzo, e non molto distante da quella della collolite. È il componente meno lontano dall'idiomorfismo.

Compare anche della calcite, per quanto raramente.

Campione n. 104 (21 maggio 1929) dal piede ovest del Broad Pick.

Roccia compatta, grigio scura, a grana piccola, nella quale sono visibili delle laminette micacee brune a riflessi dorati.

La struttura è in complesso porfirica, anche se non nettamente specie per gli individui micacei, i quali appartengono in gran parte alla mica giallo chiara già descritta nei campioni precedenti. Talvolta essi sono zonati, e un largo nucleo è costituito da biotite ordinaria, di colore giallo-marrone.

La massa fondamentale è costituita da feldispato cementante tutti gli altri elementi, e non sempre in individui molto minuti, del tutto allotriomorfo. La sua determinazione è difficile, per le ragioni già dette sopra: peraltro, rispetto all'indice di rifrazione della collolite, un indice è superiore ed uno quasi uguale, onde può concludersi che si tratta di un termine non lontano dall'albite. Alla stessa conclusione si arriva dall'osservazione di una lamina normale a  $\gamma$ .

Piuttosto frequente compare l'orneblenda scura, in piccoli elementi mal terminati, con pleocroismo fra il bruno scuro e il verde marcio-scuro.

Si nota pure qualche rarissimo granulo di quarzo.

Molto abbondante l'apatite, tanto in prismetti sottili allungati, quanto in elementi più grossi.

Per la calcite è da ripetere quanto ho detto per gli altri campioni: si hanno anche qui inclusioni calcitiche in feldispato, che del resto appaiono freschi.

I risultati analitici per i campioni n. 230 e n. 104 sono i seguenti:

	N. 230	N. 104
SiO <sub>2</sub> . . . . .	46.92	49.32
TiO <sub>2</sub> . . . . .	3.26	1.52
Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	10.99	9.07
Fe <sub>2</sub> O <sub>3</sub> . . . . .	3.92	4.98
FeO . . . . .	2.34	1.98
MnO . . . . .	0.11	0.12
MgO . . . . .	4.72	9.24
CaO . . . . .	10.52	8.07
K <sub>2</sub> O . . . . .	9.31	8.01
Na <sub>2</sub> O . . . . .	1.08	1.10
CO <sub>2</sub> . . . . .	4.43	5.69
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> . . . . .	1.10	0.84
F . . . . .	0.13	0.12
H <sub>2</sub> O <sub>-</sub> . . . . .	0.20	—
H <sub>2</sub> O <sub>+</sub> . . . . .	1.15	0.49
	100.18	100.55
— O . . . . .	0.06	0.05
	100.12	100.50

Le due rocce analiticamente si corrispondono, pure avendo tratti individuali. La silice è presso a poco in quantità uguale, tenuto conto del diverso quantitativo di biossido di titanio. L'allumina è bassa in tutti e due; così pure si accordano da ambo le parti le quantità piuttosto notevoli di calcio e, specialmente predominante, di potassio. Gli ossidi di ferro e l'anidride carbonica sono ben paragonabili, come pure P<sub>2</sub>O<sub>5</sub>. Come variazioni individuali, si nota un diverso contenuto di TiO<sub>2</sub> e MgO, il che può indicare influenze locali, da aspettarsi maggiori, se le rocce limitanti hanno realmente preso parte alla formazione di quelle in questione.

È da avvertire una discrepanza fra il risultato dell'osservazione microscopica e le conclusioni analitiche, per quello che riguarda il contenuto relativamente piccolo dell'ossido di sodio nella roccia n. 104, nella quale invece ho ritenuto che l'albite costituisca tutto il feldispato presente. La determinazione si fonda più che altro sulla differenza di rifrazione del minerale rispetto alla collolite, la quale, come si sa, varia con il tempo il suo indice di rifrazione. Secondo i risultati analitici, in questo caso più attendibili, è da ridurre la quantità di albite in vantaggio del feldispato potassico.



**Petrografia.** — *Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorùm).*  
Nota II di P. COMUCCI, presentata dal Corrisp. P. ALOISI.

Sarà pubblicata in un prossimo fascicolo.

**Mineralogia.** — *Osservazioni sul giacimento piritoso-cuprifero di Champ de Praz in Valle d'Aosta.* Nota di P. PIEPOLI, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. A. STELLA.

Il giacimento piritoso-cuprifero di Champ de Praz presso l'Alpe Herin (1600 m.) è incassato nel fianco sud-orientale del M. Lyane sulla destra della Dora Baltea a monte di Verres.

Le fasi di sviluppo dei lavori di ricerca e coltivazione eseguiti in esso nell'ultimo cinquantennio non hanno presentato un ritmo costante. Essi sono stati diretti negli ultimi periodi alla ricerca e allo sfruttamento di zone essenzialmente piritose; in precedenti periodi invece hanno interessato zone più ricche in rame.

Recentemente sono stati ripresi per l'utilizzazione della pirite. Essi si estendono in sotterraneo per circa un mezzo chilometro in direzione sopra cinque livelli, a distanza verticale di una settantina di metri in totale. Oltre a questi lavori di coltivazione che costituiscono la *Miniera Herin* vi sono lavori di ricerca in un affioramento mineralizzato contiguo che costituisce la ricerca di *Molire*.

Riferendomi anzitutto al *giacimento principale* della *Miniera Herin*, rilevo che esso presenta giacitura stratiforme lenticolare, intercalato fra una zona di calcescisti al riposo e una massa di anfibolite a glaucofane al tetto, l'una e l'altra roccia abbastanza riccamente granatifere. Il calcescisto a contatto della zona mineralizzata s'impoverisce notevolmente di calcite, mentre si arricchisce di quarzo, mica e granati, sì da presentarsi come uno scisto quarzoso-micaceo granatifero. La potenza complessiva della mineralizzazione varia da alcuni decimetri a più metri, mostrando una marcata disposizione a rosario.

La mineralizzazione è nel suo complesso quella piritoso-cupriferà, intesa come associazione di pirite e calcopirite; v'è presenza di blenda e di pirrotite accessorie. Essa non è uniforme in tutto il giacimento, ma si passa in questo, sia in direzione che in pendio, da zone costituite principalmente da prasinite cloritica più o meno intensamente impregnata di calcopirite, a zone in cui prevale invece un minerale piritoso-quarzoso in lenti isolate o fasci di lenti e strati generalmente sottili e intramezzati da fascie di scisto prasinitico e di scisto quarzoso-micaceo granatifero.

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

Nel *giacimento di Molire*, molto vicino a quello Herin, tanto da sembrarne la prosecuzione verso ovest, si osserva invece che tanto il tetto che il riposo sono costituiti da anfiboliti granatiferi, mentre la mineralizzazione è data, almeno per quel che risulta dagli affioramenti e dai modesti scavi di ricerca ivi eseguiti, da una fascia di prasinite cloritica granatifera impregnata di calcopirite, con esili vene di minerale piritoso-quarzoso e lenticelle di scisto quarzoso-micaceo granatifero.

L'uno e l'altro giacimento sono dunque *compresi in scisti cristallini*, che, specie per la grande diffusione dei granati, sono da ritenersi come rocce metamorfiche della mesozona e provenienti l'uno, cioè il calcescisto, dal metamorfismo di una roccia sedimentaria di natura calcareo-marnosa; gli altri, cioè le anfiboliti, dal metamorfismo di rocce eruttive di tipo gabbro-diabasico.

L'uno e l'altro giacimento si mostrano concordanti con le rocce incassanti. Essi presentano poi caratteri morfologici, accidentalità tettoniche, macro e microstrutture zonato-lenticolari e cataclastiche tali da dimostrare chiaramente di aver partecipato in ugual misura delle potenti *azioni meccaniche* subite dalle rocce incassanti.

Ma non basta. Essi sono da considerarsi dei veri giacimenti metamorfici, nel senso che in essi sono avvenuti non solo fenomeni di deformazione e di cataclasi, ma anche complessi fenomeni fisico-chimici con effetti di *ricristallizzazione*. Ciò è messo in rilievo principalmente dalla costituzione mineralogica della ganga e delle microstrutture di implicazione che interessano tanto i minerali di ganga quanto i minerali metalliferi.

Per quel che riguarda la *costituzione mineralogica* della ganga dobbiamo distinguere il « minerale-piritoso quarzoso » da quello « calcopiritoso d'impregnazione ». Nel primo si riconosce essere presenti oltre al quarzo predominante, e ai carbonati, anche la muscovite, il granato e talvolta la clorite e l'albite. Ora questi minerali, che ritroviamo nelle rocce incassanti, non possono che ritenersi di origine metamorfica. Nella ganga che costituisce poi il secondo tipo di minerale, vediamo quali componenti principali la clorite, il quarzo, l'albite e il granato almandino, mentre la muscovite, la calcite, gli epidoti sono presenti come costituenti subordinati.

Ora è fuor di dubbio che di questi minerali, almeno i silicati sono di origine metamorfica: e anzi la loro associazione strutturale dà luogo a una roccia che presenta il carattere di una prasinite impregnata di solfuri. Lo studio poi della mineralizzazione in sezioni sottili e lucide mette in evidenza *microstrutture d'implicazione* che stanno a provarci anche fenomeni di dissoluzione e rideposito di tipo cristalloblastico avvenuti in questi giacimenti e interessanti non solo i costituenti della ganga, ma anche le associazioni fra minerali litoidi e minerali metalliferi (ved. Tavola).

Invero la pirrotite forma minute masserelle a contorni arrotondati, molto spesso avvolgenti fasci di laminette cloritiche o più complesse particelle di ganga; mentre a loro volta sono incluse nella calcopirite.

La pirite si trova tanto in grani rotondeggianti, quanto in cristallini cubiformi o pentagonododecaedrici talora completi, talaltra più o meno profondamente corrosi e compenetrati sia da minerali di ganga, sia, e più specialmente, dalla calcopirite e dalla blenda.

La blenda forma infine masserelle a contorno irregolare incluse nella calcopirite, oppure in nitidi cristallini corrosi e compenetrati dalla calcopirite includente.

Ora dato il carattere metamorfico del nostro giacimento nasce il quesito di determinare o almeno intravedere *la originaria natura*, cioè il processo di mineralizzazione precedente al fenomeno metamorfico.

Può essere qui opportuno riferirci ai due giacimenti già me studiati di Ollomont e di Petit Monde (« Boll. Soc. Geol. Ital. », 1933, 1934).

Il giacimento di Ollomont fu ritenuto di origine idrotermale, tenuto conto specialmente della natura essenzialmente quarzosa della ganga che è intimamente associata alla pirite e alla calcopirite, e inoltre della notevole quarzificazione non solo dei calcescisti, ma anche delle striscie a lenti prasinitiche mineralizzate intercluse nel giacimento.

Il giacimento di Petit Monde fu invece ritenuto originariamente di segregazione magmatica, e cioè in grazia della grande analogia di costituzione mineralogica, qualitativa e quantitativa fra la roccia prasinitica in cui si trovavano disseminate pirite a calcopirite e la massa prasinitica incassante di natura gabbrica.

Ora, nel caso presente di Camp de Praz sussistono analogie e differenze rispetto ai giacimenti già studiati.

E anzitutto l'analogia di giacitura e di strutture del nostro « minerale piritoso-quarzoso » col « minerale piritoso massiccio » di Ollomont, induce ad attribuire anche il nostro, con ogni verosimiglianza, a fenomeno idrotermale.

Quanto al tipo di « minerale calcopiritoso d'impregnazione » si può dire che esso riproduce con notevole analogia il minerale di Petit Monde; onde si è indotti a ritenere che anche nel caso presente la mineralizzazione solfurata della prasinite sia dovuta originariamente a segregazione dell'ultima fase di consolidamento della roccia eruttiva da cui è derivata la prasinite per metamorfismo.

Manca nel caso presente la identità fra la roccia prasinitica mineralizzata di quel giacimento e le rocce anfibolitiche del nostro. Si osservano però passaggi di anfibolite e prasinite specialmente col decrescere e scomparire dell'impregnazione solfurata. Del resto l'associazione di tipi anfibolitici con tipi prasinitici è generale nella massa delle pietre verdi valdostane e, anzi, alpine in generale. Nel caso presente si potrebbe ragionevolmente pensare che il passaggio dal tipo anfibolitico della massa rocciosa del tetto al tipo prasinitico della fascia mineralizzata sia in dipendenza con una variazione



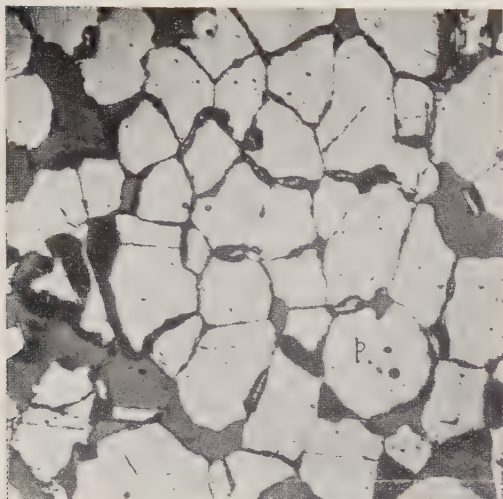


Fig. 1

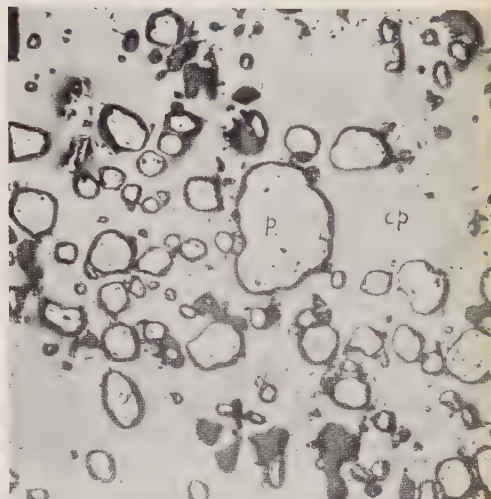


Fig. 2



Fig. 3



Fig. 4

Fig. 1 - Minerale quarzo-piritoso: pirite granulare, quarzo interstiziale (nero nella Sez. lucida)  $\times 26$

Fig. 2 - Pirite in grani tondeggianti inclusi nella calcopirite (massa più grigia nella Sez. lucida)  $\times 34$

Fig. 3 - Cristallo di pirite (nel centro) corroso dalla blenda (grigia); e calcopirite (massa grigia chiara) Sez. lucida  $\times 34$

Fig. 4 - Lamine di clorite (nera) avvolte da pirrotite (chiara cinerea), a sua volta compresa in calcopirite (chiara) Sez. luc.  $\times 110$ .





originaria della roccia eruttiva dal cui metamorfismo è derivata l'anfibolite che sovrasta il giacimento.

In tale ordine di idee la complessa mineralizzazione di questo giacimento di Champ de Praz si potrebbe intendere avvenuto in due tempi successivi e consecutivi. E cioè, in un primo tempo, nell'ultima fase di consolidamento del magma gabbrodiabasico, si sarebbe avuta una segregazione prevalentemente calcopiritosa e concentrazione di questi minerali solfurati nella fascia periferica di contatto coi calcescisti di riposo del giacimento; mentre in un secondo tempo si sarebbe avuta la fase idrotermale, la quale apportò l'impregnazione siliceo-piritosa con parziale quarzificazione sia delle rocce del riposo che della roccia eruttiva di tetto lungo la fascia di reciproco contatto.

Il tutto fu poi sottoposto alle azioni metamorfiche, più intense e profonde in confronto di quelle che hanno interessato le rocce di Ollomont e di Petit Monde, azioni che hanno impresso alle rocce incassanti e al giacimento metallifero l'attuale sua *facies* altamente metamorfica.

Voglio chiudere questa breve Nota aggiungendo una osservazione sulla *importanza pratica* dello studio accurato di questi giacimenti piritoso-cupriferi agli effetti del loro difficile sfruttamento minerario industriale. La distinzione che appare generale, dei due tipi di mineralizzazione in ciascun giacimento — cioè tipo « quarzo-piritoso » e tipo « prasinitico-cuprifero » può essere utile guida nella ricerca, nella coltivazione e nella preparazione meccanica del minerale, che è insieme minerale di rame e di pirite.

**Biologia.** — *Ancora sulla inesistenza di una rete nervosa periferica nei Tunicati.* Nota di M. FEDELE, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. U. PIERANTONI.

In tre Note pubblicate nei « Rendiconti » della R. Accad. dei Lincei (1923, p. 98 e p. 184; 1927 p. 532) delineai, nella sua entità complessiva, il sistema nervoso degli Ascidiacei, su cui solo possedevamo saggi frammentari, tentativi sfortunati e alcune pronunziazioni erronee. Le mie esplicite dichiarazioni e i fatti notevoli descritti stabilivano un punto fermo, dal quale non era lecito fare astrazione; ma alcune pubblicazioni di ricerche fisiologiche sul sistema nervoso degli Ascidiacei fatte dal 1928 in poi, e una trattazione di fisiologia comparata <sup>(2)</sup>, che ha visto recentemente la sua seconda edizione, e che tratta del sistema nervoso dei Tunicati con scarsa informazione, ed insiste sull'oramai vieto errore della presunta presenza di una rete nervosa periferica in rapporto con l'involucro muscolo-cutaneo negli Ascidiacei, mi consigliano alcuni richiami preliminari, in attesa della pubblicazione di una mia Memoria con tavole sull'argomento, che ribadirà a chiare note quel punto fermo, che io avevo già posto da anni.

Il Buddenbrock, che non ha fatto ricerche dirette, ma che, per il modo assiomatico col quale scrive, potrebbe trarre in errore sulla ampiezza della sua informazione, asserisce testualmente (p. 459) che le Ascidie posseggono un unico ganglio fra i due sifoni e « wahrscheinlich existiert aber ausserdem ein peripheres Nervennetz in der Leibeswand. Es wurde von Hunter 1898 beschrieben. Obgleich es, wie es scheint, seither nicht wieder beobachtet wurde und seine Existenz gelegentlich geleugnet worden ist (Fedele), ist aus physiologischen Gründen an seinem Vorhandensein kaum zu zweifeln ».

Non si comprende dove il Buddenbrock attinga tanta sicurezza; forse sulla stessa base su cui egli asserisce che Hunter abbia descritto nel 1898 una rete nervosa periferica nella parete del corpo delle Ascidie? Hunter non ha mai descritta una tale formazione, ed è innocente di questo peccato, che qualche fisiologo vuole per forza attribuirgli.

Più cauto, per quanto non meno inesatto, era stato, precedentemente alla pubblicazione dei miei risultati, il Jordan, che pure nelle sue teorizza-

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) W. v. BUDDENBROCK, *Grundriss der vergleichenden Physiologie*. 2. vollst. neubearbeitete Auflage. 1. Bd. *Physiologie der Sinnesorgane und des Nervensystems*. Gebr. Borntraeger, Berlin, 1937.

zioni sulle Ascidie aveva creduto necessario supporre la esistenza di una rete nervosa periferica nella *Ciona*, dicendo: <sup>(1)</sup> « Francamente io non ho trovato in nessun luogo una descrizione di una tale rete, e solo riscontro in un lavoro di Hunter (1898) nella fig. 3, a pag. 205, la rappresentazione di elementi nervosi del tubo muscolo-cutaneo nel sifone faringeo, che in nulla si distingue da una rete nervosa, la cui importanza anche Bethe ci ha appreso a riconoscere ». Ora è bene chiarire subito che la fig. 3 dell' Hunter rappresenta solo, secondo questo A., una terminazione nervosa nell'epitelio del nastro perifaringeo, con fibre presentanti le caratteristiche granulazioni a rosario dei preparati ottenuti con il blu di metilene e null'altro; e non si comprende, in ogni caso, in qual modo possa essere chiamata a provare la presenza di una rete nervosa periferica in rapporto con l'involucro muscolo-cutaneo.

Questo errore di attribuire all' Hunter la descrizione di una rete nervosa periferica nelle Ascidie è poi ripetuto da altri e dal Ten Cate <sup>(2)</sup>, il quale, però, più prudente, non fa recise asserzioni sulla presunta necessità di essa.

La constatazione anatomica di una rete nervosa periferica, che possa ritenersi in rapporto con la muscolatura del corpo delle Ascidie, è, da questo lato, una favola senza fondamento, e l' Hunter non l'ha mai descritta!

Ma io, che per necessità e scrupolo d'indagine, ho dovuto guardare direttamente tutto quanto è stato pubblicato da altri sull'argomento, voglio ricordare, come ho già fatto e confutato in miei precedenti lavori, che, se non l' Hunter, altri possono dare appiglio a parlare, o han parlato, di rete nervose periferiche nei Tunicati: e il Lahille e il Metcalf genericamente per le Salpe, e più esplicitamente l'Ussow, per questi animali e per le Ascidie.

E non voglio trascurare nemmeno la vecchia osservazione del Leuckart <sup>(3)</sup> in *Salpa*, parlante della esistenza, nel labbro e in altre parti del corpo, di cellule fusiformi o stellate, che egli, senza darne prove, ritiene cellule ganglionari terminali, per quanto, confessa, « niemals habe ich mich von einem zusammenhange derselbe mit dem Faden eines Hautnerven überzeugen können ».

Il Lahille <sup>(4)</sup> non è esplicito, ma si potrebbe interpretare come accenno a presenza di reticolo fibro cellulare quanto egli descrive in *Pegea confœderata*, dove parla di due paia di nervi anteriori, che, dirigendosi direttamente verso

(1) H. JORDAN, *Ueber reflexarme Tiere. Ein Beitrag zur vergleichenden Physiologie des zentralen Nervensystems, vornehmlich auf grund von Versuchen an Ciona int. und Oktopoden.* « Zeitschr. Allg. Phys. », Bd. 7, p. 86, 191.

(2) J. TEN KATE, *Contribution à la question de la fonction du système nerveux de Ciona intestinalis.* « Arch. Néerlandaise de Physiol. », to. 13, 1828, p. 391.

(3) R. LEUCKART, *Zoologisches Untersuchungen zur Anatomie und Entwicklungsgeschichte der Tunicaten.* Giessen, 1854.

(4) F. LAHILLE, *Recherches sur les Tuniciers des côtes de France.* Toulouse, 1890 (v. sp. p. 22).

il labbro superiore boccale, formano un vero plesso, a maglie tanto più strette quanto più si avvicinano al margine libero del labbro, e presentanti, ad ogni punto di anastomosi, una o più cellule nervose.

Qui, in ogni caso, non si parla di *rete* nervosa periferica, ma si tratta di quelle semplici ramificazioni nervose plessiformi del margine orale da me messe in evidenza e dimostrate per le Salpe, compresa *Pegea confoederata*, con ben maggiore ricchezza e precisione di particolari funzionali e strutturali e di rapporti che non sia riuscito al Lahille. E la descrizione dell'intero sensorio dei Salpidei, fatta nelle mie varie pubblicazioni, e la precisa integralità dei miei risultati, come il ripetuto controllo che ho fatto delle ricerche dei miei predecessori, mi procureranno facile credito quando affermo che queste disposizioni, puramente sensoriali, nulla hanno a che vedere con le desiderate reti nervose periferiche.

Ma Ussow <sup>(1)</sup> aveva precedentemente sostenuto che, nella maggior parte dei Tunicati da lui studiati, eccetto le appendicarie, sia nello stato embrionale che adulto, pur non esistendo masse ganglionari periferiche, egli non poteva negare ad essi un sistema nervoso rudimentale, contenente un numero abbastanza grande di cellule ganglionari, che riempirebbero l'assenza di ammassi ganglionari più differenziati. Così nelle Ascidie semplici, e specialmente nelle Salpe, dice di aver trovato quantità abbastanza notevoli di cellule nervose multipolari, sparse in gruppi nelle diverse parti del corpo, a preferenza nel mantello, e asserisce di vedere la prova della loro natura indubbiamente nervosa nel fatto che tutte si trovano fra di loro in un nesso abbastanza intimo, per mezzo dei loro prolungamenti e per mezzo dei nervi periferici, che le uniscono con ramoscelli.

I cilindrassi di questi ultimi non solo attraverserebbero tali cellule multipolari (e questo già indicherebbe, secondo Ussow, la loro natura nervosa) ma le appendici di queste cellule darebbero, qualche volta, immediatamente origine a nuove fibrille nervose, che entrerebbero in qualche tronco nervoso vicino o, in maggioranza, terminerebbero direttamente in cellule epiteliali, fibre muscolari, ecc.

La posizione di queste cellule nel mantello, sotto il suo strato epiteliale, fa concludere all'Ussow che ci troviamo in presenza di un neuroepitelio, e che la gran parte degli elementi che lo costituiscono apparterrebbero ad apparati nervosi di semplice costituzione, in parte di natura tattile, in parte motrice.

Come si vede dall'ampia citazione che ne ho fatta, Ussow ci parla di un neuroepitelio costituito di elementi di forma e natura varia. E aggiunge, visto che si tratta degli stessi elementi, almeno per *Salpa*, che Met-

(1) M. M. Ussow, *Contributo alla conoscenza della organizzazione dei Tunicati*. « Imper. Soc. Amatori Scienze Nat. », Mosca, vol. 18, pp. 1-61, tavv. 1-9 (in russo), a. 1876.



calf<sup>(1)</sup> dice che, alla superficie dorsale dell'imbuto ciliato di *Salpa* si addenserebbe uno sviluppatissimo plesso di cellule nervose e di fibre, attraverso cui passa direttamente un paio di nervi, che in uno o due casi (uno o due?) dava apparentemente finissimi rami ad esso.

Il METCALF tendeva a dimostrare la natura sensitiva dell'imbuto ciliato, ed ho già dimostrato<sup>(2)</sup> il suo errore sulla presunta modalità di innervazione di quest'organo.

La figura che dà Ussow per il presunto neuroepitelio è ricavata da *Cyclosalpa virgula*, ma egli, come abbiamo visto, si riferisce a questo proposito non solo ai *Thaliacea*, ma anche agli *Ascidacea*; la figura di METCALF si riferisce a *Cyclosalpa pinnata*, ma egli ci informa che anche in *Jasis zonaria* ha riscontrato un plesso simile, sebbene meno sviluppato, sulla parte posteriore del tubercolo dorsale, e che in altre specie di salpe tali formazioni sarebbero sviluppate in grado diverso.

Nelle mie ricerche ho condotto, naturalmente, un minuto controllo su quanto è stato sostenuto da altri, ed in esse ho trovato nelle Ascidie, specialmente *Ciona intestinalis* da me a fondo studiata, e in tutte le specie di Salpe, ed abbondantemente in *Cyclosalpa virgula*, *C. pinnata*, *Jasis zonaria*, *Pegea confoederata*, e *Salpa maxima*, gli elementi nominati dai suddetti AA. (ho una base infallibile di confronto, oltre che nelle descrizioni, nelle figure già citate). Essi sono più o meno diffusi in tutto il corpo, fra parete interna ed esterna dell'animale, ma si addensano specialmente in prossimità del ganglio, organo vibratile, muscoli e dei visceri.

In *Cyclosalpa pinnata*, come in *C. virgula* ed *Jasis zonaria* ho studiato anch'io la loro distribuzione nella zona del ganglio e presso e posteriormente all'organo ciliato. Ma l'addensamento di tali elementi intorno a quest'ultimo organo, come ebbi a dimostrare fin dal 1920, non è punto in rapporto con i nervi che passano presso l'organo vibratile, e tanto meno può essere preso a testimonianza di una ricca innervazione di questo e del suo significato di organo sensoriale. Simili addensamenti troviamo anche lontano da nervi, e in posti dove una ricca innervazione è ugualmente inesistente, e non avrebbe, d'altronde, nessun significato.

Nè solo il significato di questi elementi non è stato compreso dal METCALF; ma ai suoi metodi son sfuggiti, anche nelle specie da lui citate, i particolari della organizzazione sensoriale propria delle parti sulle quali egli ha rivolto la sua attenzione, come p. es. in *Jasis zonaria* dove troviamo, proprio dorsalmente all'organo vibratile e al ganglio, disposizioni sensoriali della parete del corpo, simili a quelle da me descritte per *Thalia democratica*.

(1) M. M. METCALF, *The eyes and subneural gland of Salpa*. (Suppl. parte 4<sup>a</sup> alla Memoria di Brooks: *The genus Salpa*). «Mem. Biol. Labor. Johns Hopkins Univ.», 2, 1894.

(2) M. FEDELE, *Nuovo organo di senso nei Salpidae*. «Moit. Zool. Ital.», vol. 31, 1920 p. 10, tav. 2.



Questo per dimostrare la precisione dei miei metodi di indagine, ai quali nulla di nervoso è sfuggito e come, riferendomi ai miei vari lavori sull'argomento, oramai ben noti in letteratura, l'innervazione muscolare, come il sensorio di questi animali siano stati da me messi in luce con precisione e completezza di linee e di rapporti.

I rapporti delle presunte cellule del neuropitelio sia con i nervi, che con i vari organi, nei miei preparati risultano molto chiari ed è facile spiegarli. I prolungamenti di esse si spingono in tutti i sensi, e frequentemente, quindi, se ne riscontrano che si adattano o si sovrappongono a tali organi, ma mai ho vista la continuazione di uno di questi prolungamenti cellulari con una fibra nervosa; nè i presunti rapporti di questi elementi sono chiari e convincenti nella parola e nelle figure dei succitati AA., e per sincerarsene basta dare uno sguardo alle figure che USSOW (tav. 6, fig. 41) e METCALF (tav. 49, fig. 9) danno di essi, per dimostrarne appunto la natura nervosa, e dalle quali chiaramente risulta che non esistono rapporti fra essi ed i nervi.

Gli elementi, quindi, descritti in rapporto con l'involucro muscolo-cutaneo, nulla hanno a che vedere con cellule nervose; essi formano spessissimo gruppi singiziali e si raccolgono, talvolta, in formazioni come a fascio, o formanti delle specie di reti cellulari (cosa che ha potuto trarre in inganno USSOW e METCALF), ma formano, anche più di frequente, gruppi di pochissime cellule, ed anche cellule isolate, i cui prolungamenti, spesso notevolmente lunghi, senza alcun dubbio non vanno nè a fornire fibre di nervi, nè a cellule di alcun organo o a muscoli o cellule epiteliali: insomma, se ne stanno lì, fra due tuniche, come comporta la loro natura di autentici elementi connettivali. E si riscontrano fra essi tutte le forme transizionali, da cellule senza prolungamenti a cellule con prolungamenti multipli e cellule fusiformi, con prolungamenti corti o lunghissimi, che formano il tipo più comune e caratteristico nelle Salpe.

Quanto ho innanzi espresso, quanto ho finora reso noto del sistema nervoso dei Tunicati, i risultati ottenuti, che dimostrano che nulla di essenziale del sistema nervoso periferico di questi animali è sfuggito al mio occhio, che ha seguito non frammentariamente, ma nella sua integrità il sistema nervoso dei *Thaliacea*, e delle Ascidie, minuziosamente, nervo per nervo, filetto per filetto nervoso, sino ai loro più minuti rapporti periferici e ha messo in luce il sensorio delle Salpe e quello delle Ascidie, questo ignorato prima delle mie ricerche, come il sistema nervoso viscerale di questi animali da me scoperto, rendono inutile che io mi soffermi ad affermare che non l'aver visto io una rete nervosa fibro-cellulare periferica, in rapporto con l'involucro muscolo cutaneo, non è un risultato negativo, ma positivo, in quanto che è la dimostrazione definitiva che questa rete non esiste.

Se fosse esistita io l'avrei vista, perchè ho visto nella innervazione e nel sensorio dei Tunicati cose ben più delicate e difficili a dimostrare di essa; e nulla mi è ignoto della più minuta istologia delle pareti somatiche

di questi animali. E le reti nervose viscerali, localizzate in parti di ben più difficile indagine che non il rivestimento muscolo-cutaneo, non son sfuggite alla mia paziente ed accurata ricerca, come risulta da quanto ho già pubblicato sul sistema nervoso viscerale dei Tunicati.

Nel meccanismo di una rete nervosa è da includere, si comprende, un legame diretto fra recettori ed effettori. Ora, le mie ricerche mostrano *ad abundantiam* che i recettori sono isolatamente collegati con i nervi e, attraverso questi, con il centro.

Allora, se questa fantasima di una rete esistesse, dovremmo pensare ancora ad un'altra fantasima: quella di recettori in rapporto con essa, che, invero, io, che ho contato cellula a cellula gli epiteli di numerose Ascidie, vedendone con chiarezza i recettori non fantastici da me messi in luce, e mai da nessun altro visti, non sarei in nessun modo, per doveroso amore di verità, disposto ad ammettere.

Dunque, è provato positivamente, sulla base di ricerche morfologiche approfondite e multilaterali, che una rete nervosa periferica, in rapporto con l'involucro muscolo-cutaneo, nelle Ascidie e nei Tunicati in generale, e nella *Ciona intestinalis* in particolare, non esiste.

Questo per la parte morfologica, che è poi la parte positiva e la base di fatto di ogni interpretazione funzionale; dei risultati fisiologici dirò in una seconda Nota.

**Biologia.** — *Osservazioni su gonadi di fagiane ibride sterili e mascolinizzate.* Nota di ANITA VECCHI, presentata<sup>(1)</sup> dal Socio A. GHIGI<sup>(2)</sup>.

In varie pubblicazioni, anche recenti, il GHIGI ha esposto sommariamente i risultati delle sue esperienze di ibridazione tra Fagiani appartenenti a specie e generi differenti. Egli ha tra l'altro messo in evidenza che anomalie varie e profonde si manifestano nel sesso femminile, sempre sterile, spesso mascolinizzato nel piumaggio, mentre il sesso maschile è fecondo.

L'abbondanza del materiale sperimentale ottenuto consente ora al GHIGI di sacrificarne gradualmente una parte, onde compiere lo studio anatomico ed istologico delle gonadi, per inquadrare questo comportamento degli ibridi, nel problema dei rapporti esistenti fra corpi genitali e caratteri sessuali secondari del piumaggio.

Il GHIGI ha affidato a me tali ricerche, le quali saranno indubbiamente lunghe.

Nella presente Nota preliminare mi limito a riferire sulle gonadi di femmine sterili più o meno mascolinizzate, ottenute da incrocio di Fagiano argentato (*Gemmaeus nycthemerus* L.) × Fagiano dorato (*Chrysolophus pictus* L.) e da reincrocio del maschio ibrido con femmina di argentato.

Sul comportamento di tali ibridi il GHIGI ha recentemente letto all'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, nell'adunanza dell'11 aprile

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Letteratura citata nella presente Nota:

FIRKET J., *Recherches sur l'organogénèse des glandes sexuelles chez les oiseaux.* « Anat. Anz. », vol. 46, 1913; Id., « Arch. de Biol. », vol. 29, pp. 201-351, 1914; Id., « Arch. de Biol. », vol. 30, pp. 393-516, 1920. — GHIGI A., *Ibridismo e specie nuove.* « Rendiconti XI Congresso Internazionale di Zoologia », Padova, 1930; Id., *Intersessualità da ibridazione.* « Boll. Soc. Biol. Sper. », vol. IX, fasc. 8, 1934; Id., *Affinità gametica ed affinità sistematica alla luce dell'esperienza.* « C. R. XII Congr. Intern. Zool. », Lisbona, 1935; Id., *Nuovi fatti di sterilità e di intersessualità da ibridazione.* Nota letta alla R. Acc. Sc. Ist. Bologna, sessione dell'11 aprile 1937. — KUMMERLÖWE H., *Vergleichende Untersuchungen über das Gonadensystem weiblicher Vögel. Mit besonderer Berücksichtigung des Persistierens von rechtsseitigen Keimgewebeelementen im normalen Weibchen.* « Ztschr. f. mikroskop. anat. Forschung. », parte I, vol. 21, p. 1, 1930; parte II, vol. 22, p. 259, 1931; parte III, vol. 25, p. 311, 1931. — KUMMERLÖWE H. e FROBÖSE H., *Ein linksseitige Oviduktrudiment (Müllerscher Gang) bei einem erwachsenen Starmännchen (Sturnus vulgaris).* « Ztschr. f. mikroskop. anat. Forschung. », vol. 22, 1930. — POLL H., *Mischlingsstudien VI. Eierstock und Ei bei fruchtbaren Mischlingen.* « Arch. f. mikr. Anat. », vol. 78, p. 63, 1911; Id., *Mischlingsstudien VIII. Pfaumischling.* « Arch. f. mikr. Anat. », Festschrift prof. Hertwig, 1920.

1937-XV; fra l'altro ha riferito che, come era da aspettarsi, le femmine  $F_1$  sono risultate sterili e più o meno mascolinizzate e che in seguito ad incroci dei maschi fecondi  $F_1$  rispettivamente colle due forme progenitrici: *Chrysolophus pictus* e *Gennaeus nycthemerus*, nel primo caso le femmine otte-



Fig. 1. — Femmina ibrida N. 8. — Fotografia di una intera sezione della regione delle gonadi. Oltre all'ovario si vedono i due parovari a destra e a sinistra della vena cava. (Ingr.  $\times 10$  circa).

nute risultarono normali, nel secondo invece parecchie erano sterili e mascolinizzate.

Nella presente Nota riferisco sulle gonadi di tre fagiane ibride  $F_1$  di tale incrocio e di due femmine ottenute dal reincrocio col fagiano argentato. Avverto che farò precedere alla descrizione sommaria delle gonadi di ciascun soggetto, qualche cenno relativo ai caratteri sessuali secondari del piumaggio; per maggiori particolari rimando alla sopracitata nota del GHIGI. Indicherò ciascun soggetto col numero di matricola che portava.

Non mi occupo nella presente dello studio istologico dei dotti genitali.

Le gonadi delle fagiane ibride sono state confrontate con quella di una fagiana normale uccisa durante l'inverno, cioè in periodo di quiescenza dell'ovario. Sono state fissate in Bouin e sezionate in serie con tagli trasversali; si è usata la colorazione ematossilina-eosina e Mallory.



*Femmina ibrida n. 8* - ( $F_1$  di fagiano argentato, *G. nycthemerus* L.  $\times$  Fagiano dorato, *C. pictus*) - Uccisa nel secondo anno di età (22-XII-1935); femmina interamente mascolinizzata nel mantello, diversa dal maschio per la minore lunghezza delle penne che formano nel fagiano dorato la mantellina nucale, per la minor lunghezza (circa  $1/3$ ) della coda, per una più evidente striatura trasversale nera delle penne rosso marrone del petto e

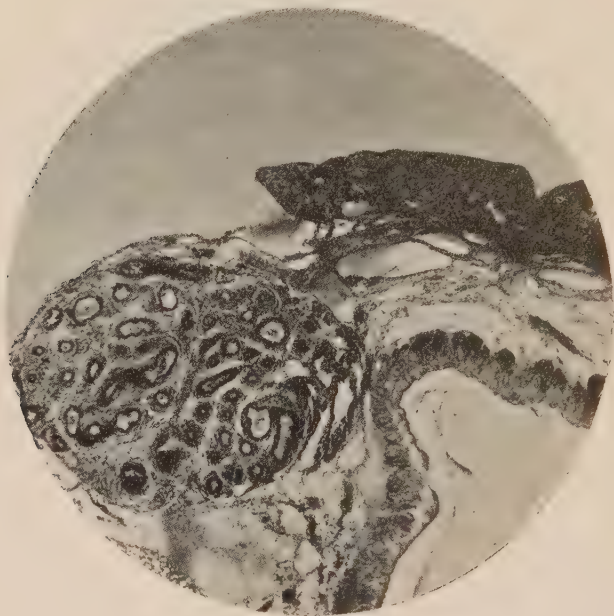


Fig. 2. — Femmina ibrida N. 8. — Parovario sinistro e parte dell'ovario. (Ingr.  $\times 44$ ).

per mancanza di bianco nella striatura delle remiganti. Bianco e striatura del fagiano argentato sul dorso sono invece più evidenti che nel maschio.

All'esame macroscopico della regione non si poteva rilevare la presenza di dotti genitali. L'ovario di questa fagiana, si presentava in forma quasi laminare. Dalle sezioni e mediante misure micrometriche è risultato dello spessore massimo di circa mm. 0,409.

L'ovario appare completamente atrofico e tale atrofia sembra risalire ad uno stadio molto precoce. Non è affatto distinguibile una zona corticale a follicoli ovarici; nell'esame di tutte le sezioni infatti non si rileva traccia di follicoli nè atrofici nè atresici; si notano però qua e là alcuni ammassi epiteliali poco profondi.

Particolarmente interessanti sono invece i parovari destro e sinistro. In tal modo, uniformandomi alla nomenclatura usata dal KUMMERLÖWE, in-



dico i resti del *mesonephros* o corpo di Wolf nelle femmine, e precisamente l'epiovario od *epöophoron* e il parovario o *paröophoron* propriamente detto, omologhi rispettivamente all'epididimo e al paradidimo dei maschi.

Tali organi, studiati dal FIRKET in *Gallus domesticus* e dal KUMMER-LÖWE in *Columba livia*, *Passer domesticus* e molti altri uccelli, risultano sempre rudimentali negli adulti, sia pure in grado più o meno notevole, e spesso quello del lato sinistro è più ridotto di quello destro.

Nella Fagiana ibrida n. 8 hanno invece dimensioni rilevanti e il parovario di sinistra ancor più del destro. Risultano costituiti da numerosi tubuli a lume vario ma taluni notevolmente ampi. Nel parovario sinistro se ne contano fino a 48, in quello destro fino a 41, ma con lume assai più ristretto. L'epitelio di alcuni tubuli si solleva verso il lume, formando caratteristiche festonature. In taluni tubuli si osserva un secreto e l'epitelio stesso manifesta segni di attività secretoria. Il parovario sinistro, di forma subcircolare, misura circa mm. 1,116; quello destro di forma subovoidale misura mm. 0,558  $\times$  1,116.

*Femmina ibrida n. 15* — F<sub>1</sub> di Fagiano argentato  $\times$  Fagiano dorato. Uccisa nel terzo anno di età (2-II-1936), femmina leggermente mascolinizzata per avere la coda più lunga (circa 1/3) di quella normale delle femmine argentate e rispettivamente dorate; per la striatura a fondo molto chiaro ed intermedio fra quello dei due sessi nella coda stessa; per una maggiore lunghezza delle penne della nuca, in confronto a quella delle femmine pure e per una leggera striatura biancastra nelle penne del collo, quale si osserva nei giovani maschi argentati. Come nella precedente, l'esame macroscopico della regione genitale non permetteva di riconoscere dotti genitali.

L'ovario ha, nelle sezioni, uno spessore massimo di circa mm. 0,465. Anche in questo ovario si notano invece molti ammassi epiteliali ad aspetti di larghi cordoni o di nidi, che in talune sezioni appaiono a contorno ben definito essendo circondati da una sottile lamina connettivale. Potrebbero corrispondere ai cordoni o nidi di cellule epiteliali descritte dal POLL per gli ibridi di anatre del secondo tipo.

Ambedue i parovari di questa fagiana ibrida sono assai più ridotti di quelli della ibrida n. 8. Anche in questo caso il parovario destro è più piccolo del sinistro come ampiezza e come numero di tubuli. Il parovario sinistro comprende circa 22 tubuli a lume ristretto; quello destro consta di circa 12-13 tubuli.

*Femmina ibrida n. 20* — F<sub>1</sub> di Fagiano argentato  $\times$  Fagiano dorato. Uccisa nel terzo anno di età (8-III-1936), simile alla precedente, ma ancor meno mascolinizzata per una quasi totale assenza di bianco nel collo e sulle timoniere mediane. Spiccano peraltro sul dorso penne isolate con alterne strie biancastre e nere. È sempre aberrante la lunghezza della coda e quella della mantellina.

Le due femmine n. 15 e n. 20 sono divenute aberranti nell'ultimo anno di vita da un aspetto interamente femminile presentato prima; questo fatto e la presenza di alcune penne striate sul dorso della femmina n. 20, fanno presumere che nella successiva muta la mascolinizzazione si sarebbe accentuata avviandosi verso l'aspetto somatico del n. 8.

L'esame macroscopico della regione genitale ha permesso di riconoscere la presenza di un ovidutto fortemente ridotto.

Anche l'ovario di questa fagiana non differisce sostanzialmente da quello del n. 15. È anch'esso notevolmente atrofico ed ha uno spessore, nelle sezioni, che non oltrepassa i mm. 0,744.

Oltre agli ammassi o nidi epiteliali precedentemente descritti, si notano nella zona superficiale dell'organo piccoli spazi di forma varia talvolta rotondeggianti. Non è possibile però considerarli follicoli ovarici atrofici, poichè non vi si riscontra alcuna traccia nè di epitelio follicolare nè di ovociti in degenerazione. Si riescono invece a identificare cordoni midollari tipici.

Il parovario sinistro è molto evidente, consta di una ventina di tubuli, ma a lume molto largo e contenenti un particolare secreto che talvolta prende intensamente il colore dell'eosina.

Nulla posso dire riguardo al parovario destro perchè dal pezzo prelevato è andata perduta la regione destra.

*Femmina ibrida n. 35* - (*G. nycthemerus*  $\times$  *C. pictus*)  $\times$  *G. nycthemerus*. Uccisa nel secondo anno di vita (12-XI-1936). Aspetto di maschio giovane argentato, con coda più lunga e più chiara di quanto suole essere in tali esemplari di razza pura. Sprone sviluppato normalmente come al termine del primo anno di vita. Questo esemplare fu considerato maschio fino all'età di 6-7 mesi e fu conservato per poterne osservare l'atteso abito di adulto; invece nella muta dell'estate 1936 non cambiò affatto di aspetto, salvo aver acquistato una maggiore lunghezza della coda.

Coll'esame macroscopico della regione delle gonadi, si è notato a sinistra un corpo ovale appiattito con aspetto di ovario, al quale faceva seguito un ovidutto ridotto di calibro. A destra si notava un corpicciattolo leggermente allungato, continuantesi con un sottile dotto che per il suo decorso è stato interpretato come un deferente, in quanto ne aveva l'aspetto.

Dall'esame istologico della regione, eseguito incominciando dall'estremo craniale, s'incontra dapprima a destra un grosso nodulo testicolare, avvolto da spessa albuginea e connesso ad un epididimo ben sviluppato. Esso ha perciò l'aspetto di un testicolo di dimensioni ridotte. Più caudalmente anche a sinistra compare un nodulo testicolare che in proseguo aumenta di dimensioni fino a raggiungere quasi quelle del suo simmetrico, ed è circondato di tessuto connettivo ed accompagnato da un epididimo con tubuli a lume piuttosto stretto. La struttura di questi noduli testicolari è simile a quella

di un testicolo prepubere od in istato di riposo. I tubuli sembrano però composti di cellule tutte eguali con piccoli nuclei presso a poco della stessa grandezza; in quello di sinistra si nota inoltre una vascolarizzazione intertubulare imponente ed anormale.

Il corpo testicolare di destra va poi gradatamente riducendosi fino a scomparire mentre permane l'epididimo. Quello di sinistra si conserva, nelle stesse dimensioni, ancora per un buon tratto.

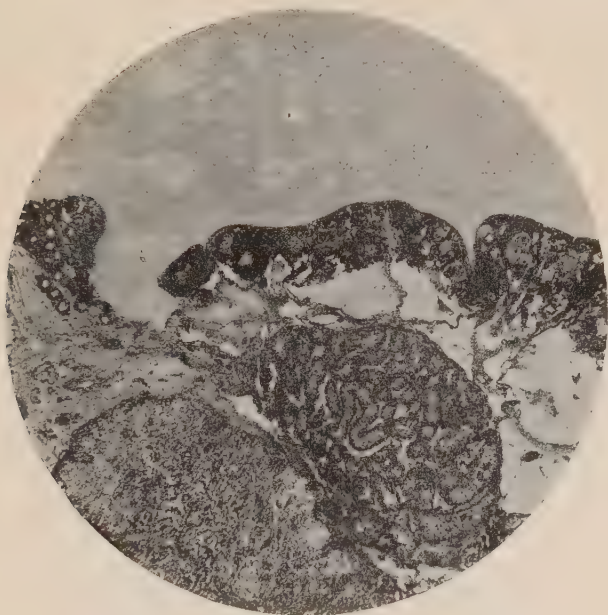


Fig. 3. — Femmina ibrida N. 42. — Particolare dell'ovotestis, Si vede anche il parovario sinistro. (Ingr.  $\times 44$ ).

Verso la metà della regione delle gonadi compare tessuto ovarico che avvolge da prima le più caudali tracce del nodulo testicolare precedentemente descritte. Qua e là, lungo tutto l'ovario, si notano numerosi altri piccoli noduli di tessuto testicolare, sprovvisto di cellule germinali e con aspetto simile a quello descritto dagli Autori per i rigenerati testicolari della gonade sinistra o destra. Persiste l'epididimo (in tal caso parovario) mantenendo presso a poco le stesse dimensioni.

Nell'ovario si distingue la zona corticale, ma fortemente ridotta e tutto l'ovario ha l'aspetto di un organo in degenerazione. Nella corticale si notano qua e là alcuni follicoli di grandezza varia ed atrofici; infatti la granulosa è ormai poco distinguibile e l'oocite risulta ridotto ad una massa di aspetto nebuloso, nella quale talvolta si intravedono i resti della vescicola germinativa. Nella zona midollare dell'ovario è abbondante la vascolarizzazione.

In breve nella Fagiana ibrida n. 35 esisteva a destra un testicolo ridotto, non funzionante, con relativo epididimo ed a sinistra un *ovotestis* nella metà caudale della regione e un grosso nodulo testicolare nella metà craniale di questo.

*Femmina ibrida n. 42* — (*G. nycthemerus*  $\times$  *C. pictus*)  $\times$  *G. nycthemerus*. Uccisa a 7 mesi di età (12-XII-1936). Differiva dalle femmine normali di corrispondente età, per la presenza di parecchie penne striate in bianco e nero sul collo e di alcune sparse sul dorso e nel groppone; per molto nero nella gola e nel collo; per le timoniere mediane decisamente striate di bianco.

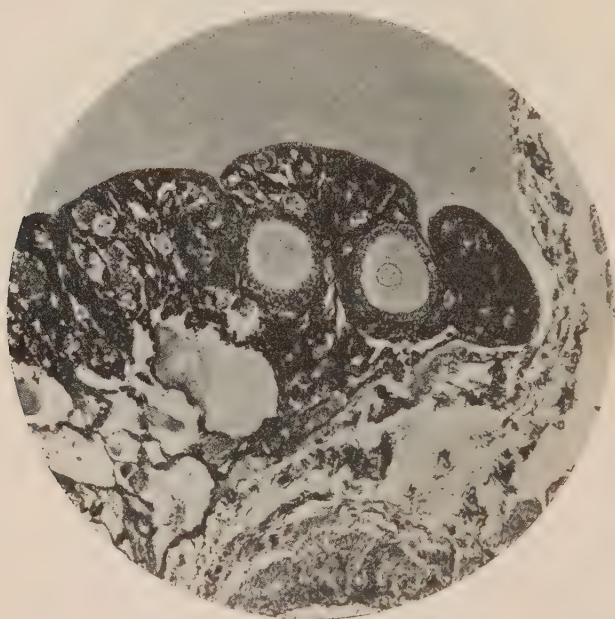


Fig. 4. — Femmina ibrida N. 42. — Particolare dell'ovario con follicoli ovarici. (Ingr.  $\times$  72).

L'aspetto di questo esemplare lascia prevedere che nella muta dell'estate 1937 avrebbe avuto luogo una completa mascolinizzazione dell'abito verso il Fagiano argentato.

Coll'esame macroscopico della regione delle gonadi, si sono notati due corpi di piccole dimensioni, quello di sinistra più grande e collocato più in alto dell'altro; a sinistra un ovidutto ridotto.

L'esame istologico consente di rilevare che anche nella Fagiana n. 42 esiste a destra un grosso nodulo testicolare accompagnato da epididimo, ma che esso anzichè apparire nella zona più craniale della regione trovasi spostato caudalmente. A sinistra esiste un *ovotestis* fino oltre la metà craniale della regione, cosicchè le sezioni corrispondenti a questa parte, rilevano a



destra i relitti del *mesonephros* assai ridotti per estensione e per ampiezza dei tubuli, a sinistra un ovario con un notevole nodulo testicolare posto nella zona midollare di quello a circa  $3/4$  dall'estremo sinistro e un parovario assai rudimentale (fig. 3).

Nello strato corticale dell'ovario si vedono vari ma sempre scarsi follicoli atrofici e in via di degenerazione, in alcuni punti qualche follicolo (uno o due) è ben conservato; vi si nota il nucleo dell'oocite ben delimitato dalla membrana nucleare; più spesso però sono come nella Fagiana n. 35 e qua e là hanno l'aspetto di follicoli atresici. Anche in questo ovario sono evidenti quegli ammassi di cellule epiteliali che ho descritto per le Fagiane ibride n. 8, 15 e 20.

Nella metà caudale della regione, il tessuto ovarico scompare e permane un nodulo testicolare che ha rapporti coi relitti del *mesonephros* e che è ben delimitato da tessuto connettivo.

Il tessuto testicolare delle due formazioni destra e sinistra, ha presso a poco la struttura presentata da quello della Fagiana n. 35. Entro alla maggior parte dei tubuli si notano notevoli ammassi di cellule in disfacimento; abbondantissima è la vascolarizzazione intertubulare.

Ad eccezione della disposizione, nella regione delle gonadi, dell'*ovotestis* e dei noduli testicolari e salvo l'apparente minore regressione del tessuto ovarico, la Fagiana n. 42 è comparabile a quella precedentemente descritta.

Le osservazioni istologiche sulle gonadi delle Fagiane ibride sterili e mascolinizzate prese in considerazione, permette di distinguerle in due categorie, conformi alla loro costituzione genetica.

Una prima categoria comprende le Fagiane n. 8, 15 e 20 ( $F_1$ ) con gonade sinistra atrofica, nella quale non risulta differenziata la zona corticale a follicoli cioè la zona caratteristica dell'ovario normale e inoltre permangono notevolmente sviluppati i parovari (epiovario e parovario) sinistro e destro, i quali hanno conservato un aspetto simile a quello presentato dall'epididimo, con tubuli spesso a lume molto largo e contenente un evidente secreto.

Nel 1931 il Giacomini eseguì il controllo istologico delle gonadi di due femmine ibride mascolinizzate nate dall'incrocio di Fagiano comune  $\times$  Fagiano dorato, dell'allevamento del Ghigi. Risultò che la parte corticale dell'ovario era notevolmente atrofica; però in essa si riconoscevano piccoli follicoli ovarici, sebbene estremamente atrofici ed atresici; si trattava dunque di una regressione della zona ovarica corticale. Di tali risultati è fatto cenno in alcune note del Ghigi.

Nelle ibride da me studiate non si rileva traccia di follicoli.

La mascolinizzazione del piumaggio presentato da tali Fagiane è evidentemente correlata alla mancata differenziazione della zona corticale a follicoli, dell'ovario; difficile è stabilire se sia intervenuta una azione ormonica della zona profonda o midollare. Non si può inoltre escludere, come ha fatto osser-



vare il Giacomini, a proposito della indagine sopra riferita, che il parovario colla sua attività secretiva abbia potuto contribuire alla comparsa dell'aspetto maschile del piumaggio.

Difficile è interpretare la ragione del diverso grado di mascolinizzazione presentato dalla suddetta Fagiana.

Le due Fagiane della seconda categoria (R F<sub>2</sub>) n. 35 e 42 sono inter-sessuate tipiche, simili a quelle femmine di gallinacei, invertite sperimentalmente, con ovariectomia incompleta, nelle quali la diminuita azione inibitrice della corteccia sui cordoni midollari, consente la formazione di un corpo genitale a destra a struttura di testicolo ed un rigenerato, sempre a struttura di testicolo, nello stesso tessuto ovarico.

Non v'è dubbio che nelle Fagiane in oggetto, per un certo periodo, si è espletata l'azione degli increti ovarici che hanno consentito la realizzazione di un ovidutto, sia pure poco sviluppato e che hanno consentito, per un periodo, l'estrinsecarsi di caratteri femminili. La presenza di una corticale a follicoli atrofici ne è una conferma. Col degenerare di tale zona corticale è cessata o molto diminuita la relativa funzione ormonica, cosa che ha consentito la differenziazione di tessuto testicolare e la comparsa di quei caratteri sessuali secondari (aspetto del piumaggio e sperone) inibiti dall'ormone ovarico.

È da presumere che il diverso aspetto relativo alla presenza più o meno completa dei suddetti caratteri sessuali secondari, rappresenti le varie tappe del conflitto sessuale in atto nelle gonadi.

Concludendo, sembra dunque che in tutte queste Fagiane ibride la corticale non abbia possibilità di evolversi normalmente. Tale insufficienza determina l'atrofia della gonade sinistra ad uno stadio precedente la differenziazione della zona a follicoli ovarici. Oppure se anche quest'ultima, benchè ridotta, si differenzia, essa è destinata a degenerare, lasciando così la possibilità di formazione di tessuto testicolare a destra e a sinistra.

**Fisiologia.** — *Influenza del clima tropicale sul consumo di ossigeno nel lavoro* <sup>(1)</sup>. Nota di A. DE NIEDERHÄUSERN, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. M. CAMIS.

Le presenti ricerche hanno per scopo di studiare l'effetto che il clima e l'ambiente tropicale manifestano sull'organismo rispetto al rapporto fra lavoro e consumo di  $O_2$  e furono fatte a Mogadiscio.

Sarebbe stato di certo desiderabile poter considerare la quantità di energia consumata durante l'attività lavorativa, ma poichè non ero in possesso dei mezzi tecnici, che mi potessero servire per la calorimetria durante il lavoro, ho considerato soltanto il consumo di  $O_2$  nella fase di ristoro misurandolo per mezzo dell'apparato di Benedict che abitualmente serve per determinare il metabolismo basale.

Dobbiamo a Hill, Long e Lupton <sup>(3)</sup> uno studio dell'andamento del consumo di  $O_2$  (e dell'eliminazione del  $CO_2$ ) dopo il lavoro, consumo che si mantiene per certo tempo più alto del livello corrispondente allo stato di riposo.

Il ricambio respiratorio a riposo è stato da me misurato facendo due determinazioni prolungate per sette minuti e distanziate l'una dall'altra di cinque minuti. Subito dopo che il soggetto aveva compiuto un determinato lavoro, determinavo nuovamente il consumo di  $O_2$ , prolungando la ricerca per otto minuti.

Dal consumo di  $O_2$  ho ricavato nel solito modo e seguendo le norme indicate sulle schede campione, le calorie prodotte per metro quadrato di superficie corporea e per ora.

Per il calcolo del consumo energetico, è necessario tener presente che Benedict, Emmes, Roth e Smith ammettono che, per un quoziente respiratorio medio di 0,82, ad un litro di ossigeno corrispondono 4,825 calorie.

I militari soggetti di studio giungevano al laboratorio nelle prime ore del mattino subito dopo la sveglia senza aver compiuto lavoro alcuno da 10 h., essendo a digiuno e trasportati da autocarro per una distanza non superiore ai km. 2. Nel laboratorio attendevano seduti che giungesse il turno per l'esperimento. Prima di determinare il consumo di ossigeno a riposo erano lasciati sdraiati per circa 15 minuti. In altre parole seguivo le mo-

(1) Lavoro eseguito nell'Ufficio per lo studio dell'alimentazione aggiunto alla Direzione di Sanità del Corpo di spedizione in Somalia.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) HILL, LONG e LUPTON, «Proc. Roy. Soc. Med.», 96, 438 (1924); 97, 438 (1925).

TABELLA.

N°	Data	Genera- lità	Età	Peso	Altez- za	Tempo	t°	Frequenza polso		Cal. per m <sup>2</sup> /ora a riposo	O <sub>2</sub> in cm <sup>3</sup> per minuto			Kgm. di lavoro compiuti	14/15	Debito ossigeno per kgm. in 8 m'
								prima	dopo		prima	dopo	differen.			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	11-9-36	F. V.	25	60	1.67	2'40"	29	60	80	34.6	199	217	18	1257	0.0143	0.1144
2	29-8	P. P.	23	55	1.71	2'21"	30	64	68	33.2	192	222	30	1152	0.0264	0.2112
3	15-9	M. A.	22	50	1.69	2'15"	38	70	75	36.4	212	228	16	1047	0.0152	0.1216
4	12-9	C. E.	24	85	1.74	2'41"	27	88	102	49.7	326	361	35	2136	0.6163	0.1304
5	11-9	M. N.	22	54	1.59	3'2"	29	76	72	33.0	175	198	23	1357	0.0169	0.1352
6	29-8	C. G.	22	58	1.60	2'24"	30	60	64	44.0	243	267	24	1458	0.0164	0.1312
7	29-8	P. D.	25	71	1.71	2'25"	30	68	76	49.4	312	345	33	1784	0.0184	0.1472
8	30-8	R. S.	25	57	1.56	3'16"	26	70	81	39.0	210	273	53	1671	0.6317	0.2536
9	15-9	R. T.	25	55	1.59	4'46"	27	72	80	34.2	171	267	96	2304	0.0416	0.3328
<b>Media</b>															<b>0.0219</b>	<b>0.1753</b>
10	2-6	M. H.	22	53	1.58	2'45"	30	68	82	42.5	222	244	22	1336	0.0164	0.1312
11	12-6	A. M.	17	49	1.76	2'10"	29	64	80	37.0	203	263	60	1231	0.0480	0.3940
12	10-9	A. A.	21	50	1.70	2'14"	29	62	70	36.5	196	223	27	1257	0.0214	0.1712
13	10-9	A. H.	19	52	1.55	2'13"	27	72	76	39.4	202	238	36	1331	0.0270	0.2160
14	12-9	H. M.	18	65	1.68	2'20"	27	63	65	41.5	247	279	32	1628	0.0106	0.1568
15	16-9	M. G.	19	55	1.66	2'17"	29	70	72	43.5	241	253	12	1382	0.0074	0.0592
<b>Media</b>															<b>0.0233</b>	<b>0.1864</b>
16	13-4-37	P. S.	37	62	1.66	3'11"	17	68	72	36.7	213	232	19	1938	0.0098	0.0784
17	14-4	L. R.	20	53	1.54	2'49"	17	54	60	47.3	245	288	43	1550	0.0277	0.2216
18	16-4	T. U.	27	63	1.75	2'53"	18	70	72	42.9	262	302	40	1843	0.0217	0.1736
19	16-4	L. R.	20	53	1.54	3'15"	17	66	67	45.5	235	260	25	1807	0.0138	0.1104
20	17-4	M. P.	38	69	1.71	3'5"	17	53	60	39.0	238	266	28	1930	0.0145	0.1160
21	20-4	L. R.	20	53	1.54	2'46"	16	64	64	42.3	215	249	36	1550	0.0232	0.1856
<b>Media</b>															<b>0.0184</b>	<b>0.1476</b>

Nota: 1-9 Italiani a Mogadiscio; 10-15 Indigeni a Mogadiscio; 16-21 Italiani a Bologna.

dalità stesse di esperimento che furono seguite per la determinazione del M. B. in Somalia dal Camis<sup>(1)</sup>. Perciò nel mio caso il valore del metabolismo a riposo coincide con quello del M. B. Dopo di ciò procedevo alla determinazione del metabolismo dopo lavoro muscolare.

Il lavoro è stato condotto facendo percorrere ai soggetti in esperimento un certo numero di volte una scala la quale dava accesso ai locali del predetto laboratorio in Mogadiscio. La lunghezza della scala era di m. 9,47, l'altezza di m. 3,72, ed era composta di 22 scalini separati in due rampe rettilinee da un pianerottolo intermedio di m. 2.

Negli esperimenti mi sono valso di undici soldati nazionali che facevano parte del corpo di spedizione. Ho confrontato poi i risultati ottenuti con quelli avuti nelle stesse condizioni da sei zaptiè indigeni per considerare ad un tempo la fatica nell'organismo atavicamente adatto all'ambiente quanto in quello in via di acclimatazione. Nel computo del lavoro che i singoli soggetti avevano compiuto nel salire la scala ho considerato il lavoro eseguito lungo la verticale dalla base alla sommità, ottenuto moltiplicando il peso del corpo compresi gli indumenti per l'altezza, più il lavoro compiuto per lo spostamento orizzontale che, secondo Brezina e Reichel<sup>(2)</sup> richiede per lo spostamento di un kg. lungo un metro l'energia corrispondente a 0,213 kgm. Ritenendo il rendimento della macchina umana pari al 33 % avremo dunque un lavoro effettivamente compiuto di 0,071 kgm. Poichè i soggetti percorrevano la scala tanto in salita quanto in discesa si doveva pure tenere conto anche di quest'ultimo lavoro che Katzestein<sup>(3)</sup> valuta del 10 % inferiore a quello orizzontale.

Nella tabella sono raccolti i risultati degli esperimenti. In essa oltre all'età, peso, altezza, frequenza del polso e temperatura ambiente è indicato il consumo di ossigeno in cm<sup>3</sup> per minuto, prima e dopo il lavoro (colonna 12 e 13), come pure la differenza tra questi due valori (colonna 14), ed i kgm. di lavoro compiuto (colonna 15). Nella colonna 16 trovasi indicato l'O<sub>2</sub> consumato in più per minuto per un kgm. di lavoro compiuto. S'intende che questo maggior consumo di O<sub>2</sub> è stato da me seguito solo per lo spazio di 8 minuti, sapendosi dalle ricerche precedenti che il consumo stesso dopo un lavoro moderato torna al livello di riposo entro otto minuti circa.

Nella tabella l'ultimo gruppo di esperimenti si riferisce ad analoghe ricerche che ho condotto in Italia (Istituto di Fisiologia della R. Università di Bologna) per poter fare un confronto fra il consumo di O<sub>2</sub> in Italia e quello che avveniva in Somalia<sup>(4)</sup>. Ripeto che sarebbe stato mio desiderio

(1) M. CAMIS, *Metabolismo Basale e alimentazione*. «R. Acc. It. (Centro Studi per l'A. O. I.)», 1936.

(2) BREZINA e REICHEL, «Biochem. Z.», 63, 170 (1914).

(3) KATZESTEIN, «Pflügers. Arch.», 49, 374 (1891).

(4) I soggetti esaminati a Bologna erano talvolta esaminati senza che si fossero alzati



seguire l'andamento del metabolismo durante il lavoro e non limitarmi alla osservazione del periodo di tempo immediatamente successivo; ma le poche esperienze fatte in Italia non avendo altro scopo che quello di istituire un paragone con quelle somale, è ovvio che ho dovuto mettermi nelle stesse condizioni a cui ero stato obbligato per necessità di cose a Mogadiscio. D'altra parte l'andamento della curva di ristoro, secondo quello che risulta da precedenti ricerche è in stretto rapporto con il consumo durante il lavoro.

Dall'esame dei risultati si ricava che la quantità di  $O_2$  consumata in più negli otto minuti immediatamente successivi al lavoro è di  $cm^3$  0,1752 per gli Italiani, 0,1864 per gli indigeni in Somalia e 0,1472 per gli Italiani in Italia. Dividendo tali valori per otto si ha il debito di ossigeno medio per minuto, come è riferito nella colonna 16. Però la differenza tra consumo a riposo e consumo dopo il lavoro non è nè costante nè uniformemente decrescente dal primo all'ottavo minuto, presentando valori irregolarmente discendenti. Infatti una minuta analisi dei risultati, fatta seguendo le norme adottate dal Simonson per calcolare la curva dei coefficienti di restituzione<sup>(1)</sup>, mi ha dimostrato che il consumo d'ossigeno nel periodo successivo al lavoro non è rappresentabile da una curva regolare come quella da lui ammessa. Senza voler entrare in una discussione generale del problema, che non è nello scopo di questa Nota e per la quale non avrei materiale sufficiente, metto in evidenza il fatto che ai valori riferiti nella colonna 16 (consumo  $O_2$  per  $m'$ ) non si può dare un significato preciso essendo il consumo rapidamente decrescente dal primo minuto in poi. Essi non hanno che il significato approssimativo di una media, secondo la quale il debito di  $O_2$  per  $kgm.$  di lavoro compiuto sarebbe per il bianco in Somalia di 0,0219, per l'indigeno di 0,0233 e per il bianco in Italia di 0,0184 per minuto. Mi sembra però preferibile tener conto, come ho già indicato, della quantità totale di  $O_2$  consumata negli otto minuti.

Pur tenendo conto del fatto che tale quantità presenta considerevoli differenze individuali e che perciò le medie che possiamo ricavare dai singoli gruppi di esperimenti vanno prese con qualche cautela, mi sembra di poter concludere che la stessa quantità di lavoro compiuta da un nazionale in Somalia richieda un consumo, e quindi un debito, di  $O_2$  superiore (0,175) o almeno non certamente inferiore a quello osservabile in Italia nelle stesse condizioni sperimentali (0,147); ancora superiore sarebbe il consumo da parte di un indigeno in Somalia (0,186). S'intende che ciò vale per un lavoro mantenuto nei limiti di quello da me sperimentato e cioè per un lavoro non molto intenso.

dal letto dove avevano dormito; talvolta dopo che erano venuti in laboratorio autotrasportati, come si era fatto a Mogadiscio. Non si nota una regolare differenza nei due casi.

(1) E. SIMONSON, « Pflüger's Arch. », 215°, 6 (1927).



## PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Socio PASCAL presenta in omaggio le sue lezioni di « Algebra complementare » e l'opuscolo « Introduzione al calcolo infinitesimale ».

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia il Socio PASCAL dell'omaggio.

Il Socio SACCO presenta il suo volume « Origine ed evoluzione della vita » e ne parla.

Il Presidente MILLOSEVICH ringrazia della presentazione.

L'Accademico Segretario PARRAVANO presenta le opere giunte in dono all'Accademia segnalando: Paul Lévy, « Théorie de l'addition des variables aléatoires »; Paul Appel, « Traité de mécanique rationnelle »; i due volumi editi in occasione del centenario di Ampère; il volume edito nel cinquantenario della fondazione della Società Breda.

## PRESENTAZIONE DI NOTE E MEMORIE

Presentano infine note per i Rendiconti i Soci: GIACOMINI, LEVI-CIVITA, ROLLA SCORZA, STELLA e SOLER.

## PRESENTAZIONE DI PLICHI SUGGELLATI

Il Socio BLANC presenta, perchè sia conservato nell'Archivio dell'Accademia, un suo plico suggellato.

## RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Socio ARMELLINI, anche a nome del Socio LEVI-CIVITA, legge la relazione con la quale propone la stampa della Memoria di Maria Viaro « Orbita definitiva della cometa 1910 IV (Metcalf) ».

L'Assemblea approva.

## COMUNICAZIONI VARIE

Il Presidente comunica ai Colleghi che è presente alla seduta il professor Carrel, premio Nobel, e all'illustre ospite rivolge il saluto dell'Accademia.

L'Assemblea si associa con vive acclamazioni,

## RELAZIONI SU TEMI DATI

Il Presidente, sen. MILLOSEVICH, dà inizio alla discussione sulla relazione preparata dai Soci FABIANI e SOLER dal titolo « Prospezione geologica e geofisica del petrolio in Italia ». In assenza del prof. Fabiani egli riassume la relazione geologica e il Socio SOLER espone successivamente la sua relazione sui metodi di studio geofisici a sussidio delle ricerche geologiche. Sulle due relazioni prendono la parola i Soci DAL PIAZ, GORTANI, STELLA e SACCO, nonchè il direttore del R. Ufficio geologico, Gr. Uff. ing. Crema, invitato alla seduta. La discussione mette in luce le enormi difficoltà che si collegano alle ricerche petrolifere in Italia data la grande complessità strutturale del nostro Paese e le eccezionali complicazioni che in esso si legano alle manifestazioni petrolifere di superficie. I convenuti si trovano però concordi nell'auspicare che mercè l'attivissima opera dell'A. G. I. P. ed i mezzi messi a disposizione con illuminata larghezza dal Governo Nazionale il proseguimento delle ricerche possa condurre a risultati pienamente soddisfacenti.

# OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 4 giugno 1937

- APPEL PAUL. — *Traité de Mécanique rationnelle*, tome IV, fasc. II. Paris, Éditeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-XIII, 1-292.
- BACHELIER LOUIS. — *Les lois des grands nombres du Calcul des probabilités*. Paris, Éditeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. 1-36.
- BAKER J. G. — Note on equivalent breadths of absorption lines. (Reprinted from the «*Astrophysical Journal*». Vol. 84, pp. 473-476). Cambridge, 1936. 8°.
- BERIO E. — Eteroceri africani apparentemente nuovi. (Estr. dagli «*Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova*». Vol. LIV, pp. 370-393). Genova, 1937. 8°.
- BERIO E. — Nuove specie di Eteroceri-*Noctuidae*-*Lymantridae*-*Limacodidae*-*Geometridae*. (Spedizione zoologica del Marchese S. Patrizi nel Basso Giuba e nell'Oltregiuba). (Estr. dagli «*Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova*». Volume LVIII, pp. 174-180). Genova, 1937. 8°.
- CAMPBELL LEON. — Variable Star Notes from the American Association of Variable Star Observers 1936. (Reprinted from «*Popular Astronomy*». Vol. XLIV). s. l. 1936. 8°, pp. 1-40.
- CAPRA F. — Un nuovo Grillomorfo d'Italia. (*Orthoptera-Gryllidae*). (Estr. dagli «*Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova*». Volume LIX, pp. 289-296). Genova, 1936. 8°.
- CESARI L. e CONFORTO F. — Sulla equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente, con flessiorigidezza variabile linearmente lungo ogni rampata. I-II. (Estr. dai «*Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei*. Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali»). Vol. XXIV, serie 6ª, pp. 354-357). Roma, 1937.
- CONFORTO F. — Vedi CESARI L.
- CREMA CAMILLO e NOVARESE VITTORIO. — Conoscenze attuali sull'Etiopia mineraria. (Estr. dagli «*Atti dell'Istituto Nazionale delle Assicurazioni*». Volume IX). Città di Castello, 1937. 8°, pp. 1-34.
- DELÙ F. — Studio teorico del movimento di traslazione degli atomi nei gas allo stato cinetico permanente: formule fondamentali: applicazioni. Torino, s. d. 8°, pp. 1-51.
- FRASCHERELLI UGO. — L'Istituto per le applicazioni del calcolo, del Consiglio Nazionale delle Ricerche. (Estr. dalla «*Rassegna delle Poste, dei Telegrafi, e dei Telefoni*». Fasc. I, 1937). Roma, 1937. 8°, pp. 1-7.
- GARNIER RENÉ. — *Leçons d'Algèbre et de Géométrie*. Tome III. Paris, Éditeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-VI, 1-280.
- GUIGLIA D. — Su due specie di *Chalinus* del Congo. (*Hymen Phytophaga*). (Estr. dagli «*Annali del Museo Civico di Storia Naturale di Genova*». Vol. LIX, pp. 363-369). Genova, 1936. 8°.
- Hommage à A. M. Ampère. Célébration à Lyon du centenaire de la mort d'ANDRÉ-MARIE AMPÈRE 1836-1936. Tome, Ier, IIe. Lyon, 1936. 4°, pp. 1-252, 253-523.
- JANNONE GIUSEPPE. — Contributi alla conoscenza dell'Ortottero fauna italiana. I. (Estr. dal «*Bollettino di Zoologia*» Anno VIII, pp. 51-76). Napoli, 1937. 8°.
- LÉVY PAUL. — *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris, Éditeur Gauthier-Villars, 1937. 8°, pp. I-XVIII, 1-328.

- MARCOLONGO R. — La misura del tempo (Estr. da « Scientia », anno 1937, pp. 16-92). Milano, 1937. 8°.
- MENZEL DONALD H. — The theoretical interpretation of equivalent breadths of absorption lines. (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 84 pp. 462-473). Cambridge, 1936. 8°.
- MENZEL DONALD H. and GOLDBERG LEO. — Note on relative  $f$ -values for lines of  $Fe\ I$ . Abstract (Reprinted from the « Astrophysical Journal ». Vol. 85, pp. 40-41). Cambridge, 1936. 8°.
- MIRANDA CARLO. — Complementi al criterio di stabilità di Hurwitz e al teorema di Sturm sulle equazioni algebriche a coefficienti reali. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma ». Serie IV. Vol. I). Tivoli, 1937. 8°, pp. 1-5.
- NOVARESE VITTORIO. — Vedi CREMA CAMILLO.
- PICONE MAURO. — Alcuni teoremi di convergenza nella sommazione per rettangoli delle serie multiple e applicazioni al problema di Dirichlet. (Estr. da « Scritti matematici » offerti a Luigi Berzolari, pp. 333-383). Tivoli, 1936. 8°.
- PASCAL ERNESTO. — Introduzione al calcolo infinitesimale. Napoli, 1933. 12°, pp. 1-116.
- PASCAL ERNESTO. — Lezioni di algebra complementare. Ediz. 5ª. Napoli, 1923. 12°, pp. I-XVI, 1-340.
- PICONE MAURO. — Formole risolutive, teoremi d'unicità e di esistenza nei problemi dinamici con assegnati spostamenti e atto di moto iniziali. (Estr. dai « Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma ». Serie IV. Vol. I). Tivoli, 1937. 8°, pp. 1-41.
- PICONE MAURO. — Nuovi contributi all'analisi quantitativa dei problemi di propagazione. (Estr. dai « Rendiconti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche della Società Reale di Napoli ». Serie IV. Vol. VI). Tivoli, 1936. 8°, pp. 1-19.
- La Società italiana « Ernesto Breda » per costruzioni meccaniche dalle sue origini ad oggi, 1886-1936. Verona, 1936. 8°, pp. I-XVII, 1-139.
- TROJANO ERNESTO. — Metodo di impinguamento e formazione artificiale delle falde sotterranee. (Estr. dalla Rivista « L'Acqua », 1937). s. 1. 1937. 4°, pp. 1-3.
- VIOLA TULLIO. — Sulla risoluzione numerica dei sistemi di due equazioni in due incognite. (Estr. da « La Ricerca Scientifica ». Serie II. Volume I). Roma, 1937. 8°, pp. 1-13.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA REALE ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

Fascicolo del 20 giugno 1937 — Anno XV

### MEMORIE E NOTE DI SOCI

**Matematica** (Geometria algebrica). — *I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali.* Nota II <sup>(1)</sup> del Socio F. SEVERI.

3. Occorre ora fissare talune proprietà delle più generali corrispondenze algebriche fra due spazi lineari. D'ora in poi dunque supporremo che  $M_r, N_s$  sieno due spazi lineari.

Sia  $T$  una corrispondenza irriducibile, che associ al punto  $x'$ , mobile in una varietà  $V'_i$  (necessariamente irriducibile) contenuta in  $N_s$  (o coincidente con  $N_s$ ), una varietà  $V_k(x')$ , funzione razionale di  $x'$ , mobile in  $M_r$ , Attesa l'irriducibilità di  $T$ , la  $V_k$  è pura (in particolare irriducibile), a componenti permutabili.

Consideriamo una rappresentazione monoidale graduale di  $V_k$ . Si dimostra agevolmente che questa rappresentazione può definirsi in modo che resti razionalmente determinata da  $V_k$ , cioè da  $x'$ . Non occorre qui d'indicare le circostanze dettagliate. Basta in sintesi questo:  $V_k$  risulta uguale alla somma algebrica di più varietà,  $\infty^k$ , ciascuna delle quali è, in  $M_r$ , completa intersezione di  $r - k$  forme algebriche, razionalmente determinate da  $x'$ .

In conseguenza,  $T$  risulta uguale alla somma algebrica di più corrispondenze <sup>(2)</sup>, ognuna delle quali associa ad  $x'$  mobile su  $V'_i$ , una varietà  $\infty^k$ , intersezione completa di  $r - k$  forme di  $M_r$ . Non è dunque restrittivo limi-

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Ciò non contraddice all'irriducibilità di  $T$ ; ma vuol dire soltanto che  $T$ , aumentata delle corrispondenze che compaiono col segno — nel secondo membro dell'uguaglianza, dà in  $M_r \times N_s$  una varietà uguale (coincidente) a quella costituita dalle varietà che figurano nel secondo membro col segno +.



tare lo studio ad una di queste corrispondenze addendi, che indicheremo con  $S$ , denotando inoltre con  $W_k$  la varietà degli  $x$ -omologhi in  $S$ , di un dato  $x'$  di  $V_l$ .

Un ulteriore passo, necessario, consiste nell'osservare che  $W_k$  può suporsi, senza restrizione, *priva di parti multiple*. Basta perciò sostituire alle  $r - k$  forme, che definiscono  $W_k$ ,  $r - k$  forme generiche degli stessi ordini rispettivi, razionalmente determinate da  $W_k^{(1)}$ . Con ciò si sostituisce a  $W_k$  (le cui eventuali componenti multiple si contino colle debite molteplicità) una varietà equivalente in  $M_r$  e a  $T$  una corrispondenza appartenente con  $T$  allo stesso sistema continuo, cioè una corrispondenza equivalente a  $T$  in  $M_r \times N_s$ , poichè sopra una varietà razionale, come  $M_r \times N_s$ , ogni sistema continuo di varietà appartiene totalmente ad un sistema di equivalenza.

Poichè, ai nostri fini, è lecita la sostituzione di una varietà con una equivalente, così supporremo che  $S$  faccia corrispondere al generico  $x'$  di  $V_l$  una  $W_k$  priva di parti multiple. Si verifica subito che  $S$  è una corrispondenza pura, anche se riducibile, e che la sua dimensione è  $l + k$ .

La  $S$  è perfettamente definita dalla condizione di associazione al generico  $x'$  di  $V_l$  la detta  $W_k$ . Non resta escluso che per qualche particolare posizione  $x'_0$  di  $x'$  in  $V_l$ , la  $W_k$  possa riescire indeterminata. In tal caso però saranno definite tutte le possibili posizioni limiti di  $W_k$  per  $x' \rightarrow x'_0$ , negli infiniti modi possibili. Con altre parole:  $S$  resta definita dalla sua natura algebrica, non appena sieno definiti gl'intorni di coppie generiche  $x, x'$  sopra ciascuna delle componenti irriducibili di  $S$ . La varietà  $S$  è la totalità delle coppie di quest'intorni e delle loro coppie di accumulazione. Un punto del tipo  $x'_0$  si dirà *fondamentale per la corrispondenza*; e la varietà luogo delle  $W_k$  limiti per  $x' \rightarrow x'_0$ , si dirà pure *fondamentale*.

Era necessario di esaminar l'eventualità di elementi fondamentali di  $S$ , almeno per convincersi ch'essa è irrilevante pel seguito.

Dette  $x_1, \dots, x_r; x'_1, \dots, x'_s$  le coordinate di punto in  $M_r, N_s$  (da sostituirsi con coordinate omogenee quando le intersezioni da studiarsi cadano all'infinito),  $W_k$  vien rappresentata in  $M_r$  da un sistema di equazioni del tipo:

$$(I) \quad \alpha_i(x_1, \dots, x_r; x'_1, \dots, x'_s) = 0 \quad (i = 1, \dots, r - k),$$

( $\alpha_i$  polinomii nelle  $x, x'$ ) da aggiungersi al sistema di equazioni nelle  $x'$ , che rappresentano compiutamente  $V_l$ . La  $W_k$  è rappresentata dalla (I) nel senso che per  $x'$  dato, ma generico in  $V_l$ , la  $W_k$  è completa intersezione delle (I).

Le (I), considerate a prescindere dal sistema rappresentativo di  $V_l$ , definiscono una corrispondenza, che si estende a tutto lo  $N_s$ , anche se  $V_l$  è una varietà a questo subordinata. La corrispondenza estesa associa al gene-

(1) Questa determinazione razionale s'ottiene, p. es., ponendo un'omografia entro il sistema lineare delle forme a cui appartiene una data forma, di quelle che s'intersecano in  $W_k$ , in modo che ad essa risponda una forma generica di quell'ordine.

rico  $x'$  di  $N_s$  una varietà  $\infty^k$ , intersezione completa, che continueremo a chiamare  $W_k$ , priva di parti multiple, perchè così è quando  $x'$  cade nel particolare luogo  $V'_i$ .

Immaginiamo fissato un  $x'$  generico, e sia  $\bar{x}'$ , di  $N_s$ ; e diciamo  $\xi_1, \xi_2, \dots$  punti generici delle singole componenti irriducibili di  $W_k(\bar{x}')$ .

*La corrispondenza  $\bar{S}$ , che è la  $S$  estesa allo spazio  $N_s$ , in quanto si pensi definita dalle coppie soddisfacenti alle (1) e situate negl'intorni delle coppie  $(\bar{x}', \xi_1), (\bar{x}', \xi_2), \dots$ , cioè come totalità di queste coppie e delle loro coppie di accumulazione, non coincide necessariamente colla totalità delle coppie soddisfacenti alle (1).*

Questo è un punto delicato ed essenziale delle nostre deduzioni. Il sistema (1) è certo soddisfatto da ogni coppia d'accumulazione di un insieme di soluzioni delle (1); ma può benissimo possedere anche soluzioni che non son limiti di soluzioni generiche (cioè di soluzioni degl'intorni predetti). Insomma la corrispondenza (1) è generalmente somma della  $\bar{S}$  (che non è degenerare in  $N_s$ ) e di una o più corrispondenze  $\bar{U}$ , degeneri in  $N_s$ . I punti  $x'$  delle coppie  $x, x'$  delle  $\bar{U}$ , riempiono un numero finito di varietà irriducibili contenute in  $N_s$ .

Applicando  $\bar{S}$  al generico  $x'$  di  $V'_i$  si ottiene  $S$ . Pertanto le (1), insieme alle equazioni di  $V'_i$ , rappresentano la somma della corrispondenza  $S$  e di eventuali corrispondenze degeneri  $U$ , i cui punti  $x'$  coprono un numero finito di varietà subordinate a  $V'_i$ .

4. Per la dimostrazione del teorema I occorre considerare in modo particolare la  $\bar{S}$  di cui sopra nei due casi seguenti:

a)  $\bar{S}$  non è degenerare neppure in  $M_r$  (epperò la sua dimensione  $\rho = s + k$  soddisfa alla  $\rho \geq r$ ).

b)  $\bar{S}$  soddisfa alla  $\rho \geq r$ , ma è degenerare in  $M_r$ .

Nel caso a) ad un  $x$  generico di  $M_r$  la  $\bar{S}$  (pel computo delle costanti) associa una  $V'_b(x)$  pura di dimensione  $b = s + k - r$ , che è definita in  $N_s$  come intersezione completa delle (1), fuori di eventuali varietà mobili su varietà subordinate ad  $N_s$  e riempite da punti  $x'$  corrispondenti ad  $x$  in quelle, fra le  $U$  suddette, che non sieno degeneri in  $M_r$ . Di più si dimostra che  $V'_b$  è priva di parti multiple, come  $W_k$ . Prese inoltre due varietà irriducibili  $\bar{M}_{r'}$ ,  $\bar{N}_{s'}$  in  $M_r, N_s$ , si prova che, se la  $W_k$  corrispondente al generico  $x'$  di  $\bar{N}_{s'}$  ha tutte intersezioni semplici con  $\bar{M}_{r'}$ , anche la  $V'_b$  corrispondente al generico  $x$  di  $\bar{M}_{r'}$ , ha tutte intersezioni semplici con  $\bar{N}_{s'}$ .

Il caso b) si verifica allora e soltanto allora che qualcuna delle equazioni (1) non contenga le  $x'$ . In questo caso  $\bar{S}$  associa al generico  $x$  di  $M_r$  una varietà virtuale, che è lo zero dell'equivalenza di specie  $b$  su  $N_s$ .

5. Preparato il terreno, si può passare alla dimostrazione del teorema I. Ci si riduce anzitutto facilmente all'ipotesi di un sistema di varietà effettive

pure  $V_k$ , le cui componenti sieno permutabili e descrivano quindi un sol sistema irriducibile  $\Sigma, \infty^s$ , unirazionale, come luogo delle  $V_k$ , ed esistente sopra una  $M_r$  irriducibile di  $S_d$ .

Per  $r = k + 1$  il teorema si riduce ad un'elementare proprietà dei sistemi lineari. Onde si può dimostrare per induzione, supponendolo già acquisito per le varietà di dimensione  $< r$ . Ciò permette di sbarazzar subito il terreno dal caso in cui  $\Sigma$  non riempie  $M_r$ .

Il caso essenziale è quello in cui  $\Sigma$  invade  $M_r$ . La rappresentazione delle  $V_k$  coi gruppi di un'involuzione  $I_\mu (\mu \geq 1)$  in uno spazio lineare  $N_s$ , stabilisce una corrispondenza  $T$  tra  $M_r, N_s$ . Una coppia  $x, x'$  appartiene a questa corrispondenza quando  $x'$  sta nel gruppo di  $I_\mu$ , che rappresenta una  $V_k$  passante per  $x$ . Alle  $V_k$  per  $x$  corrisponde in  $N_s$  una  $V'_b$  pura, di dimensione  $b = s + k - r$ , appartenente ad  $I_\mu$ .

Mediante una rappresentazione monoidale graduale di  $V'_b$  in  $N_s$ , razionalmente determinata da  $x$ , si sostituisce alla  $T$  una somma algebrica di corrispondenze pure, analoghe,  $S$ , più facili a studiarsi, perchè  $S$  associa al generico  $x$  di  $M_r$  una  $W'_b$  di  $N_s$ , intersezione completa di  $s - b$  forme. Questa corrispondenza si estende allo  $S_d$  di  $M_r$  (n. 3, ove però  $S_d, M_r, N_s$  fanno qui le veci della varietà  $N_s, V'_b, M_r$  considerate nel detto numero) e dà luogo ad una corrispondenza  $\bar{S}$ , la quale, a menò d'un'equivalenza (sul prodotto  $S_d \times N_s$ ), associa al generico  $x$  di  $M_r$  (e di  $S_d$ ) una  $W'_b$  completa intersezione di forme e priva di parti multiple.

L'applicazione delle precedenti proprietà conduce a questo punto a concludere che, qualora  $\bar{S}$  non sia degenerare in  $N_s$ , ad un generico  $x'$  di  $N_s$  la  $S$  associa in  $M_r$  una varietà  $W_k(x')$ , priva di parti multiple, segnata su  $M_r$  da una varietà  $Z_{d+k-r}$ , funzione razionale di  $x'$ , completa intersezione in  $S_d$  di  $r - k$  forme, fuori eventualmente di talune varietà  $\Omega$ , comuni a  $Z_{d+k-r}$  e ad  $M_r$ , e mobili sopra un numero finito di varietà subordinate ad  $M_r$ . Ciascun gruppo costituito da un numero finito di  $\Omega$ , che sieno permutabili fra loro, per le circolazioni di  $x'$ , e che descrivan perciò una medesima varietà irriducibile, forma una varietà, la quale, essendo funzione razionale di  $x'$ , muovesi in un sistema unirazionale e quindi (a cagion del teorema ammesso per varietà di dimensione  $< r$ ) in un sistema di equivalenza.

Pertanto  $W_k(x')$  descrive in  $M_r$  un sistema segabile con una famiglia di varietà  $Z_{d+k-r}$  dello spazio ambiente  $S_d$ , fuori di varietà fisse e semifisse; ed è dunque mobile in un sistema d'equivalenza.

Lo stesso si conclude quando  $\bar{S}$  è degenerare in  $N_s$ . Soltanto in tal caso la  $W_k(x')$  riducesi su  $M_r$  ad una varietà virtuale, che è lo zero dell'equivalenza di specie  $k$  su  $M_r$ .

Siccome inoltre  $V_k(x')$ , è equivalente ad una somma algebrica di varietà del tipo di  $W_k(x')$ , resta finalmente dimostrato il teorema I; donde si deduce, come facile conseguenza, il teorema II.

**Matematica** (Algebra). — *Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito*. Nota <sup>(1)</sup> del Corrisp. G. SCORZA.

Un'algebra  $A$  di ordine  $n$  si dice *legata* a un gruppo  $G$  dello stesso ordine, se è possibile trovare in  $A$   $n$  elementi indipendenti i quali, rispetto all'operazione di prodotto in  $A$ , costituiscano un gruppo oloedricamente isomorfo a  $G$ .

In base ad un classico teorema di esistenza si ha subito che:

*Dati comunque un gruppo d'ordine finito  $G$  ed un corpo numerico  $\Gamma$ , esistono in  $\Gamma$  algebre legate a  $G$ , tutte codeste algebre risultando equivalenti fra di loro* <sup>(2)</sup>;

ed è noto che:

*Se  $A$  è un'algebra in  $\Gamma$  legata al gruppo  $G$  di ordine  $n$ , perchè  $A$  risulti semi-semplce occorre e basta che in  $\Gamma$  non sia  $n = 0$*  <sup>(3)</sup>.

Di tale teorema vogliamo indicare qui una dimostrazione estremamente semplice che, per quanto ci consta, non è stata ancora rilevata.

1. Indichiamo con

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

una base di  $A$  i cui elementi costituiscano, rispetto all'operazione di prodotto in  $A$ , un gruppo  $\bar{G}$  oloedricamente isomorfo a  $G$  e supponiamo, come è lecito, che  $u_1$  sia l'elemento identico di  $\bar{G}$ , cioè il modulo di  $A$ .

Allora è noto, e si vede subito del resto, che se

$$x = \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n$$

è un qualsiasi elemento di  $A$  le tracce, sinistra e destra, di  $x$  in  $A$  sono date da  $n\xi_1$  <sup>(4)</sup>.

(1) Presentata nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Veggasi per quanto qui è detto il mio trattato *Corpi numerici e algebre*. (Messina, Principato, 1921), p. 437 e sgg. Ivi il teorema cui è dedicata questa Nota veniva dedotto applicando un classico criterio del Frobenius e quindi solo per quei corpi cui quel criterio è applicabile. Nè del resto a quel tempo il teorema era noto nella forma attuale.

(3) Cfr. B. L. VAN DER WAERDEN: a) *Moderne Algebra* (Berlin, Springer, 1931), Zweiter Teil, p. 193 e p. 196; b) *Gruppen von linearen Transformationen* (Berlin, Springer, 1935), p. 54.

Naturalmente, occorre appena avvertirlo, in  $\Gamma$  è  $n = 0$ , se il sottocorpo fondamentale di  $\Gamma$  è finito e contiene  $p$  elementi, con  $p$  (primo) divisore di  $n : 0$ , come anche si dice, se  $\Gamma$  è di caratteristica  $p > 0$ , con  $p$  divisore di  $n$ .

(4) Cfr. G. SCORZA, loc. già cit., p. 438.

Infatti la traccia, ad esempio, sinistra, di  $x$  in  $A$  è la somma dei coefficienti di  $u_1, \dots, u_n$ , rispettivamente, nelle espressioni di  $xu_1, \dots, xu_n$  come combinazioni lineari delle  $u_i$ .

Ora, poichè fra i prodotti

$$u_1 u_i, \dots, u_n u_i$$

l'unico che eguagli  $u_i$  è  $u_1 u_i$ , il coefficiente di  $u_i$  nell'espressione di  $xu_i$  come combinazione lineare delle  $u$  è  $\xi_i$ , dunque la traccia richiesta di  $x$  è, come volevasi,  $n\xi_1$ .

2. Ciò posto, dimostriamo in primo luogo che la condizione espressa dal teorema più sopra enunciato è necessaria.

E infatti si consideri in  $A$  l'elemento

$$v = u_1 + \dots + u_n.$$

Per l'ipotesi i prodotti

$$u_i u_1, \dots, u_i u_n,$$

al pari dei prodotti

$$u_1 u_i, \dots, u_n u_i,$$

a meno, eventualmente, dell'ordine, coincidono con

$$u_1, \dots, u_n,$$

dunque è

$$vu_i = u_i v = v,$$

indi

$$v^2 = v \sum_{i=1}^n u_i = nv$$

e

$$vA = (v),$$

$(v)$  indicando l'insieme dei multipli scalari di  $v$ .

Ma allora, se in  $\Gamma$  è  $n = 0$ , riesce

$$v^2 = 0 \quad \text{e} \quad (vA)^2 = (v)^2 = 0$$

con  $v \neq 0$ , ossia  $v$  è per  $A$  un elemento eccezionale; dunque se in  $\Gamma$  è  $n = 0$ , l'algebra  $A$ , come volevasi, non è certo semi-semplICE.

3. Per compiere la dimostrazione del teorema supponiamo che in  $\Gamma$  sia  $n \neq 0$  e sia

$$a = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$$

un qualsiasi elemento non nullo di  $A$ .



Detto

$$x = \xi_1 u_1 + \dots + \xi_n u_n$$

l'elemento corrente di A è

$$ax = \sum_{i,j}^{1 \dots n} \alpha_i \xi_j u_i u_j.$$

Disponiamo, com'è lecito, delle denominazioni delle  $u$ , così che gli elementi bilaterali di  $\bar{G}$  siano

$$u_1, \dots, u_t,$$

e le coppie di elementi inversi (supposto  $t < n$ ) siano

$$u_{t+1}, u_{t+2} \quad ; \quad u_{t+3}, u_{t+4} ; \dots ; u_{n-1}, u_n ;$$

allora nell'espressione di  $ax$ , come combinazione lineare delle  $u$ , il coefficiente di  $u_1$  sarà

$$\sigma = \alpha_t \xi_1 + \dots + \alpha_t \xi_t + \alpha_{t+1} \xi_{t+2} + \alpha_{t+2} \xi_{t+1} + \dots + \alpha_{n-1} \xi_n + \alpha_n \xi_{n-1},$$

e la traccia, sinistra e destra, di  $ax$  sarà

$$n\sigma.$$

Segue subito allora che, nell'ipotesi ora fatta su  $\Gamma$ ,  $a$  è necessariamente non eccezionale.

Ed invero, se così non fosse,  $ax$  dovrebbe risultare pseudonullo per ogni  $x$  di A; ma la traccia di un elemento pseudonullo è necessariamente eguale a zero, dunque, essendo in  $\Gamma$   $n \neq 0$ , se  $a$  fosse eccezionale dovrebbe riuscire  $\sigma = 0$  per ogni sistema di valori delle  $\xi$  nel corpo  $\Gamma$ . Ma ciò è assurdo una volta che è  $a \neq 0$ , indi le  $\alpha_i$  non tutte nulle, per conseguenza il teorema è pienamente dimostrato.

## MEMORIE E NOTE PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari.* Nota II di S. CHERUBINO, presentata <sup>(1)</sup> dal Corrisp. G. SCORZA.

5. Rileviamo che

$$(20) \quad \int_{x_0}^x f(X) dX = C_0 e^{A^*} = e^{A^*} \cdot C_0$$

(ove abbiám posto  $C_0 = e^{-A_0^*}$ ) è quella matrice integrale di (4)\* che per  $x = x_0$  assume la determinazione I, matrice identica.

Questa posizione (20) presuppone, però, che  $A_0^*$  sia permutabile con  $A^*$ . Convien quindi supporre addirittura che all'algebra commutativa di  $X, f(X)$  e derivata appartengano tanto  $A^*$  che  $A_0^*$  anzichè soltanto  $A^* - A_0^*$ . In tal modo gli eventuali calcoli da eseguire su  $Y$  riescon più agevoli, tutti i fattori riuscendo permutabili.

Ciò accade, ad es., nel caso  $A = \text{costante}$ , già segnalato, ed anche quando sia

$$(21) \quad A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \cdots a_{n-1} & a_n \\ 0 & a_1 \cdots a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots a_1 & a_2 \\ 0 & 0 \cdots 0 & a_1 \end{vmatrix}$$

poichè variando ad arbitrio  $a_1, a_2, \dots, a_n$  le matrici di questo tipo variano in un'algebra commutativa. Quest'algebra contiene ovviamente la matrice  $A^*$  che si ottien da  $A$  sostituendo  $a_i$  con  $\int a_i dx$ , quindi anche  $A_0^*$ , che si ha da  $A^*$  per  $x = x_0$ .

In particolare,  $A$  può esser di forma canonica <sup>(2)</sup>.

(1) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(2) Ad es. quella di IORDAN, oppure quella recentemente da me stabilita e che non differisce sostanzialmente dalla forma canonica del PREDELLA.

6. Vogliamo ora esaminare alcuni casi in cui la  $A$  che figura nella (4)\*, ossia nella

$$(3)^* \quad \frac{dY}{dX} = A \cdot Y$$

non soddisfa alle condizioni avanti indicate, ma tuttavia è possibile trasformarla in un'altra che vi soddisfi.

Moltiplichiamo questa (3)\*, a sinistra, per una matrice  $P$  non degenera, funzione di  $X$ . Si ha

$$P \frac{dY}{dX} = PAP^{-1} \cdot PY$$

dalla quale, ponendo

$$(22) \quad Z = PY$$

ed osservando che si ha

$$\frac{dZ}{dX} = \frac{dP}{dX} \cdot Y + P \frac{dY}{dX} = \frac{dP}{dX} \cdot P^{-1} Z + P \frac{dY}{dX}$$

si ricava

$$(3)^{**} \quad \frac{dZ}{dX} = B \cdot Z$$

ove si è posto

$$(23) \quad B = PAP^{-1} + \frac{dP}{dX} \cdot P^{-1}.$$

Se dunque si ha, come si ottiene da quest'ultima relazione,

$$(24) \quad A = P^{-1}BP - P^{-1} \frac{dP}{dX} = P^{-1} \left( B - \frac{dP}{dX} P^{-1} \right) P$$

e se  $B$  soddisfa alle ipotesi avanti specificate<sup>(1)</sup>, la matrice integrale di (4)\* assume la forma

$$(8)^* \quad Y = P^{-1} Z = P^{-1} \cdot Z_0 e^{\int B dX}$$

dove l'integrale va esteso fra  $x_0$  ed  $x$  e dove con  $Z_0$  si è indicata la determinazione iniziale di  $Z = PY$  per  $x = x_0$ .

Con la (24) si è ottenuta una classe di sistemi differenziali lineari che possono integrarsi con la (8), o meglio con la (8)\*.

(1) Cioè se  $\int_{x_0}^x B dX$  appartiene con  $B$ , la sua derivata,  $X$  ed  $I$ , alla stessa algebra commutativa (col variare di  $x$ ).

Data l'arbitrarietà di  $P$ , questa classe è vastissima, quindi val la pena di averla indicata.

7. Un caso particolare notevole è quello in cui  $P$  è costante, quindi la (23) si riduce a  $B = PAP^{-1}$ . In tale eventualità, può addirittura prendersi

$$(25) \quad Z = PYP^{-1}$$

perchè allora si ha

$$\frac{dZ}{dX} = P \frac{dY}{dX} P^{-1}$$

e la (3)\* può scriversi

$$(26) \quad P \frac{dY}{dX} P^{-1} = PAP^{-1} \cdot PYP^{-1},$$

che è ancora del tipo (3)\* e può integrarsi sotto la forma desiderata.

L'osservazione ora fatta ci suggerisce di domandarci quando è che si può porre la (25), con  $P$  non costante, in modo da ridurci alla (3)\*\* e all'integrale (8).

Per  $P$  non costante, la (25), causa la (26), ci dà

$$\frac{dZ}{dX} = PAP^{-1} \cdot Z + \frac{dP}{dX} P^{-1} \cdot Z + Z \cdot P \frac{dP^{-1}}{dX}.$$

Osservando ora che da  $P \cdot P^{-1} = I$ , si ha

$$\frac{dP}{dX} P^{-1} = -P \frac{dP^{-1}}{dX},$$

la relazione precedente si scrive, posto  $B = PAP^{-1}$ ,

$$(27) \quad \frac{dZ}{dX} = BZ + \frac{dP}{dX} P^{-1} \cdot Z - Z \cdot \frac{dP}{dX} P^{-1},$$

e questa si riduce alla (3)\* allora e solo che

$$(28) \quad \frac{dP}{dX} P^{-1} Z = Z \frac{dP}{dX} P^{-1}.$$

Tenendo presente la espressione di  $Z$  assegnata con la (25), in questa relazione comparirà  $Z_0 = P_0 Y_0 P_0^{-1}$ , cioè le condizioni iniziali della matrice incognita  $P$ . Convien perciò liberarsi da queste ponendo

$$(29) \quad Z = e^{\int B dX}.$$

Ciò significa che si considera quella matrice integrale di (3)\*\* che nelle condizioni iniziali  $x = x_0$  diventa l'identità. Poichè ogni altra soluzione di (3)\*\* è necessariamente del tipo ZC, con C matrice costante arbitraria, non degenerare, ne segue che, con la scelta fatta, la soluzione generale può assumere, nelle condizioni iniziali  $x = x_0$ , l'arbitraria determinazione C.

È allora ovvio che basta verificar la (28) sull'integrale (29). Cioè, data B, si tratta di determinare la matrice P in modo che

$$(30) \quad \frac{dP}{dX} P^{-1} \cdot e^{\int_{x_0}^X B dX} = e^{\int_{x_0}^X B dX} \cdot \frac{dP}{dX} P^{-1}.$$

Prendendo allora

$$(31) \quad A = P^{-1} B P,$$

ove B è una qualsiasi matrice tale che  $\int_{x_0}^X B dX$  appartiene all'algebra commutativa di B, la sua derivata, X ed I, e dove P è una qualsiasi matrice soddisfacente alla (30), si ha una classe di sistemi lineari ammettenti per matrice integrale

$$(32) \quad Y = P^{-1} \cdot e^{\int_{x_0}^X B dX} \cdot P,$$

che, nelle condizioni iniziali  $x = x_0$ , coincide con l'identità I.

Questa classe è meno ampia di quella assegnata con la (24). In entrambe figurano le stesse B, ma mentre nella (24) P è arbitraria, in questa seconda classe P deve soddisfare alle (30).

Confrontando la (24) con la (31) si ha che se

$$\frac{dP}{dX} P^{-1} = 0$$

(pel che abbisogna che sia  $P = e^C = \text{costante}$ ), si hanno tutti e soli gli elementi comuni alle due classi.

La ricerca delle matrici P, come si vede dalla (30), si riconduce a quella delle matrici permutabili con la (29). Questo problema è stato risolto sotto varie forme<sup>(1)</sup>: dicendo D la più generale matrice permutabile con la (29), per aver P bisogna integrar la

$$\frac{dP}{dX} P^{-1} = D,$$

cioè un'equazione dello stesso tipo di quella di cui ci occupiamo.

(1) Cfr. la mia Nota dal titolo: *Sulle matrici permutabili con una data*. [«Rend. Sem. Padova», anno VII (1936)].



La costruzione di questa seconda classe implica dunque l'applicazione del metodo generale di ricerca della matrice integrale di un sistema lineare <sup>(1)</sup>. Ma ciò non toglie valore a quanto ora abbiamo esposto.

Aggiungiamo che, poichè qualunque sia la (30), esistono sempre matrici  $D$  non nulle con essa permutabili,  $\frac{dP}{dX} P^{-1}$  non è mai *necessariamente* nulla, quindi le due classi trovate non coincidono mai.

8. Le osservazioni che precedono son valide tutte anche quando  $X$ , invece di essere la matrice scalare  $xI$ , è una matrice variabile di cui  $A$  è funzione e di cui  $Y$  si vuol funzione <sup>(2)</sup>.

Abbiam dunque indicato anche il modo di risolvere la più generale equazione differenziale lineare omogenea in matrici, con  $A$  funzione olomorfa di  $X$  e con  $Y$  anche essa funzione olomorfa. In particolare, abbiám visto in quali casi una tal equazione è risolubile con la (8).

Questa osservazione è suscettibile di estensione alla risoluzione dei sistemi differenziali lineari i cui coefficienti e le cui funzioni incognite siano, come la variabile, matrici <sup>(3)</sup>.

(1) Tanto perchè, *in generale* (vedi la formula (11) della Nota or citata)  $D$  non soddisfa alle condizioni che consentono di esprimer  $P$  nella forma cui desideriamo ridurre.

(2) Basta, nelle (5)–(6), pensar la variabile  $x - x_0$  come una matrice,  $X - X_0$ .

(3) Occorrerà premettere un calcolo di matrici ad elementi matrici. Per queste converrà limitarsi al caso in cui detti elementi appartengono ad una stessa algebra commutativa, il che si addice meglio all'indole del problema di cui sopra. È chiaro come un tale studio non mancherebbe di applicazioni nello stesso ambiente (ad es. della meccanica quantistica) in cui trova applicazione il caso più elementare studiato in questa Nota.

**Matematica.** — *Proprietà differenziale dei coni di Veronese.*  
Nota di M. VILLA, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio L. BERZOLARI.

1. Per le varietà a  $k$  dimensioni,  $V_k$ , sussiste il teorema:

*Escluse le  $V_k$  dell'  $S_{k+2}$ , l'unica  $V_k$  che possiede  $\infty^{3k-4}$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  è il cono dell'  $S_{k+3}$  che proietta da un  $S_{k-3}$  una superficie di Veronese (l'  $S_{k-3}$  e l'  $S_5$  della superficie di Veronese essendo sghembi) <sup>(2)</sup>.*

Per  $k = 2$ , è questo un noto teorema di BOMPIANI sulla superficie di Veronese <sup>(3)</sup>, sul quale anzi sarà basata la nostra dimostrazione per  $k > 2$ .

Per  $k > 2$ , il teorema dà invece una nuova proprietà che, escluse le  $V_k$  dell'  $S_{k+2}$ , è caratteristica per i coni di Veronese, cioè per le varietà che proiettano una superficie di Veronese da uno spazio lineare (sghembo con l'  $S_5$  della superficie), e porge quindi anche una nuova proprietà della stessa superficie di Veronese <sup>(4)</sup>.

Il risultato di cui sopra (escluse, al solito, le  $V_k$  dell'  $S_{k+2}$ ) costituisce un nuovo esempio di varietà caratterizzata dalla dimensione di un sistema di quasi-asintotiche tracciate sopra di essa e un nuovo esempio di varietà algebrica definita da proprietà che non lasciano per nulla sospettare la natura algebrica della soluzione.

Il teorema precedente porta inoltre un contributo alla ricerca delle  $V_k$  con sistemi di quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  di dimensione assegnata, in quanto le  $V_k$  con  $\infty^{3k-4} \gamma_{1,3}$  (e non più) sono appunto le  $V_k$  dell'  $S_{k+2}$  e il cono dell'  $S_{k+3}$  che proietta da un  $S_{k-3}$  una superficie di Veronese <sup>(5)</sup>.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1937.

(2) Una curva di  $V_k$  chiamasi, con BOMPIANI, quasi-asintotica  $\gamma_{1,3}$  quando l'  $S_k$  tangente a  $V_k$  in un punto della curva e l'  $S_3$  ivi osculatore alla curva hanno uno spazio congiungente di dimensione inferiore a quella che si avrebbe per una curva generica.

(3) BOMPIANI, *Proprietà differenziale caratteristica delle superficie che rappresentano la totalità delle curve piane algebriche di dato ordine*. « Rend. dell'Accademia dei Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. XXX, p. 249, 1921; BOMPIANI, *Proprietà differenziali caratteristiche di enti algebrici*. « Mem. dell'Accademia dei Lincei », ser. 5<sup>a</sup>, vol. XIII, p. 453, 1922. L'ipotesi che l'  $S(2)$  osculatore della superficie abbia dimensione regolare (cioè 5) equivale ad escludere, come nel testo, le  $V_2$  di  $S_4$ .

(4) Caratterizzazioni della superficie di VERONESE sono state trovate anche di recente. Si veda il lavoro di BOMPIANI e BORTOLOTTI, *Ricerche sulle superficie dello spazio a cinque dimensioni e nuove caratterizzazioni della superficie di Veronese*. « Mathematische Zeitschrift », vol. 42, p. 411, 1937.

(5) Per  $k = 4$ , il teorema del testo ci dà le  $V_4$  che posseggono  $\infty^8$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$ . Le  $V_4$  con  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  sono state determinate in un mio lavoro che verrà pubblicato prossimamente e del quale è apparso recentemente un sunto in questi « Rendiconti ».

2. Il teorema del n. 1 si dimostrerà per  $k > 2$ , avendosi, come s'è detto, per  $k = 2$  il teorema di Bompiani, che serve di base alla nostra dimostrazione.

L'  $S_k$  tangente in un punto  $x(\tau_1, \dots, \tau_k)$  a  $V_k$  è individuato dai punti  $x, x_1, \dots, x_k$  (avendo posto  $x_i = \frac{\partial x}{\partial \tau_i}$ ; porremo analogamente  $x_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial \tau_i \partial \tau_j}$ ,  $x_{ijl} = \frac{\partial^3 x}{\partial \tau_i \partial \tau_j \partial \tau_l}$ )<sup>(1)</sup>; l'  $S_3$  osculatore ad una curva di  $V_k$  in  $x$  è individuato dai punti

$$x, \quad dx = \sum x_i d\tau_i, \quad d^2 x = \sum x_{ij} d\tau_i d\tau_j + \sum x_i d^2 \tau_i, \\ d^3 x = \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l + 3 \sum x_{ij} d\tau_i d^2 \tau_j + \dots \quad (i, j, l = 1, 2, \dots, k)$$

Affinchè l'  $S_k$  e l'  $S_3$  precedenti abbiano un  $S_{k+1}$  congiungente dev'essere la matrice

$$(1) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{ij} d\tau_i d\tau_j \\ \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l + 3 \sum x_{ij} d\tau_i d^2 \tau_j \end{vmatrix} = 0,$$

dove  $S(1)$  sta ad indicare le orizzontali formate con le coordinate di  $x$  e di  $x_1, \dots, x_k$ .

Perchè le (1) siano compatibili considerate come equazioni lineari nei differenziali secondi  $d^2 \tau_j$ , dev'essere

$$(2) \quad \begin{vmatrix} S(1) \\ \sum x_{1i} d\tau_i \\ \sum x_{2i} d\tau_i \\ \vdots \\ \sum x_{ki} d\tau_i \\ \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l \end{vmatrix} = 0.$$

Affinchè  $V_k$  contenga  $\infty^{3k-4} \gamma_{1,3}$  (cioè  $\infty^{k-2}$ , fissandone ad arbitrio un punto e la direzione in esso) è necessario e sufficiente che siano nulle, identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ , le matrici che s'ottengono dalla (2) sopprimendo  $k-2$  delle ultime  $k+1$  orizzontali.

3. Segue, in particolare, che: L'  $S(2)$  osculatore a  $V_k$  (cioè lo spazio di  $x$  e di tutti i punti derivati d'ordine  $\leq 2$ ) è al più un  $S_{k+3}$ .

(1) Supponiamo naturalmente che  $V_k$  non soddisfi ad un'equazione alle derivate parziali del 1° ordine.

Infatti dalle condizioni del n. 2 segue, fra l'altro, che  $S(1) \equiv S_k$  tangente e tre qualunque dei punti

$$\sum x_{ri} d\tau_i,$$

per valori arbitrari dei  $d\tau_i$ , sono linearmente dipendenti.

Ciò esprime che la varietà degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$  ha dimensione  $\leq k+3$ . Quindi, com'è noto <sup>(1)</sup>,  $V_k$  verifica almeno  $\frac{(k-2)(k+3)}{2}$  equazioni di Laplace (cioè a derivate parziali del 2° ordine, lineari omogenee) linearmente indipendenti. L' $S(2)$  osculatore è perciò un  $S_{k+3}$  al più, essendo  $k+3$  la differenza fra il massimo  $\frac{k(k+3)}{2}$  possibile della dimensione di un  $S(2)$  osculatore a una  $V_k$  e il numero precedente  $\frac{(k-2)(k+3)}{2}$ .

4. Se  $S(2)$  ha dimensione  $\leq k+2$ , la (1) dà in ogni caso (n. 2)

$$\left| \begin{array}{c} S(2) \\ \sum x_{ijl} d\tau_i d\tau_j d\tau_l \end{array} \right| = 0$$

(dove  $S(2)$  sta ad indicare le orizzontali costruite con le coordinate dei punti che lo determinano), identicamente rispetto ai  $d\tau_i$ . Quindi tutt' i punti derivati terzi stanno in  $S(2)$  e perciò anche la  $V_k$  sta in uno spazio di dimensione  $\leq k+2$ . Ma  $V_k$  non può appartenere a  $S_{k+1}$  <sup>(2)</sup>; apparterrà quindi a  $S_{k+2}$ .

5. Se invece  $S(2) \equiv S_{k+3}$ , la  $V_k$  soddisfa esattamente  $\frac{(k-2)(k+3)}{2}$  equazioni di Laplace linearmente indipendenti, poichè quella è la differenza fra il massimo  $\frac{k(k+3)}{2}$  possibile della dimensione di un  $S(2)$  osculatore a una  $V_k$  e la dimensione effettiva  $k+3$ .

Per un teorema di Terracini <sup>(3)</sup> tale  $V_k$  è un cono proiettante da un  $S_{k-3}$  una superficie che non verifica nessuna equazione di Laplace.

Se la  $V_k$  sta in  $S_s$  proiettiamola da  $S_{k-3}$  sopra un  $S_{s-k+2}$  (sgheombo con l' $S_{k-3}$ ): si ha una superficie. Le  $\gamma_{1,3}$  di  $V_k$  si proiettano in  $\bar{\gamma}_{1,3}$  della

(1) TERRACINI, *Alcune questioni sugli spazi tangenti ed osculatori ad una varietà*. « Atti dell'Accademia di Torino », vol. 49, p. 223, 1914.

(2) Per una  $V_k$  dell' $S_{k+1}$ , tutte le sue curve sono  $\gamma_{1,3}$ .

(3) TERRACINI, op. cit., p. 223 e p. 234. La varietà degli  $S_k$  tangenti a  $V_k$  ha dimensione  $k+2$  esattamente, ossia  $2k-l$ , avendo posto  $l=k-2$  (n. 2). S'avverta che l'applicazione che si fa del risultato di TERRACINI è lecita essendo  $l < k-1$ .

superficie e di queste  $\bar{\gamma}_{1,3}$  ve n'è una per ogni punto e per ogni direzione (come su  $V_k$ ), quindi  $\infty^2$ : poichè la superficie non soddisfa ad equazioni di Laplace, cioè per essa  $S(2) \equiv S_5$ , essa è, per il teorema ricordato di Bompiani, la superficie di Veronese; e la  $V_k$  è quindi un cono di Veronese appartenente ad un  $S_{k+3}$  (poichè  $s - k + 2 = 5$ ).

6. Non rimangono ormai da dimostrare che le proposizioni reciproche, cioè che una  $V_k$  dell' $S_{k+2}$  e un cono di Veronese dell' $S_{k+3}$  posseggono sempre  $\infty^{3k-4} \gamma_{1,3}$  e non più, ma ciò non offre difficoltà (1).

**Meccanica.** — *Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche.* Nota IV di G. COLONNETTI, presentata (2) dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Ecco ora un altro esempio che rispecchia un problema di grande importanza tecnica: quello dell'equilibrio degli archi molto ribassati.

Prendiamo in considerazione un arco reticolare, simmetrico, a corrente superiore rettilineo e corrente inferiore disposto secondo una poligonale inscritta in un arco (sufficientemente teso) di parabola (fig. 1).

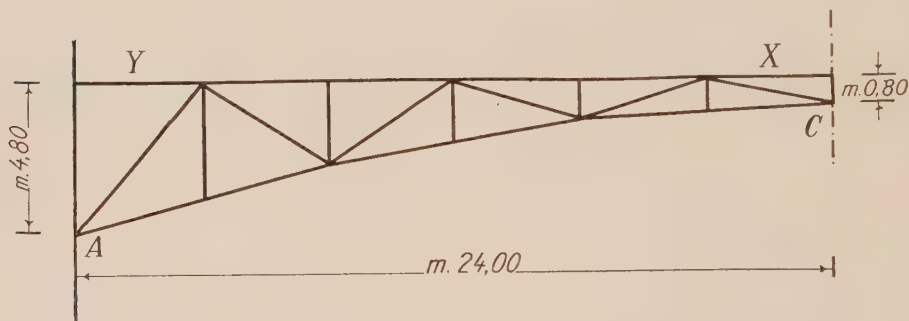


Fig. 1. - Schema e dimensioni generali del semiarco (sinistro).

Tanto per fissar le idee, converremo che il corrente superiore abbia sezione retta costante, e che nel corrente inferiore la sezione retta vari crescendo dalla mezzeria verso le imposte; e precisamente, che essa sia eguale a quella del corrente superiore nei primi due campi a partire dalla mezzeria, doppia nei due campi seguenti, tripla negli ultimi due, attigui all'imposta.

(1) Il dubbio che siffatte varietà posseggano più di  $\infty^{3k-4} \gamma_{1,3}$  si toglie osservando che se s'impone a una  $V_k$  di possedere  $\infty^{3k-3} \gamma_{1,3}$  essa sta necessariamente in un  $S_{k+1}$ . Ciò si verifica imponendo l'annullarsi (identico rispetto ai  $d\tau_i$ ) di tutte le matrici che si ottengono dalla (2) sopprimendo  $k-1$  delle ultime  $k+1$  orizzontali.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.



Non ci dilungheremo a precisar le dimensioni delle aste di parete la cui influenza su quel che verremo dicendo è, il più delle volte, trascurabile.

Supposto il carico simmetrico - e, più precisamente, uniformemente distribuito sui nodi del corrente superiore - il sistema presenta un doppio grado di iperstaticità; è nelle consuetudini l'assumere, in questo caso, come incognite iperstatiche la spinta orizzontale  $H$  ed il momento  $M$  nella sezione in chiave.

Si potranno allora scrivere due equazioni del tipo:

$$(1) \quad \begin{cases} \sum (s + \bar{s}) \frac{dS}{dH} = 0 \\ \sum (s + \bar{s}) \frac{dS}{dM} = 0 \end{cases}$$

dove al solito

$$s = \frac{Sl}{EA}.$$

Posto

$$(2) \quad S = S_p + S_h H + S_m M$$

quelle equazioni divengono:

$$(3) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_h l}{EA} + H \sum \frac{S_h^2 l}{EA} + M \sum \frac{S_h S_m l}{EA} + \sum \bar{s} S_h = 0 \\ \sum \frac{S_p S_m l}{EA} + H \sum \frac{S_h S_m l}{EA} + M \sum \frac{S_m^2 l}{EA} + \sum \bar{s} S_m = 0. \end{cases}$$

Ma  $S_p$ ,  $S_h$ ,  $S_m$  sono sforzi staticamente determinati, e si possono perciò immediatamente calcolare; in generale tutto si riduce al tracciamento di tre diagrammi Cremoniani.

Se pertanto si incomincia col supporre che le deformazioni impresse  $\bar{s}$  siano tutte nulle, le (3) si possono senz'altro risolvere rispetto alle incognite  $H$  ed  $M$ ; ed in funzione di queste si possono poi, mediante le (2), calcolare gli sforzi nelle diverse aste.

Ora supponiamo che da questo calcolo - perfettamente rientrante nell'ambito della teoria classica dell'elasticità - risulti che in una o in due aste della travatura il limite di elasticità del materiale verrebbe sorpassato.

In conformità alle nostre premesse, noi dovremo allora ritenere che, in quelle aste, gli sforzi non potranno mai raggiungere effettivamente i valori indicati dal calcolo, ma si dovranno arrestare ai valori corrispondenti al limite di elasticità del materiale; dovremo inoltre tener presente che nelle aste stesse si manifesteranno delle deformazioni plastiche.

In una, o in due, delle espressioni (2) il primo membro verrà così ad esser noto: si potrà perciò valersene per far scomparire dalle (3) una o entrambe le incognite; dopo di che queste equazioni potranno venire utilizzate per la determinazione della, o delle, deformazioni plastiche.

\*  
\* \*

Se si sa *a priori* in quali aste della travatura il fenomeno può avverarsi, si possono conseguire semplificazioni formali apprezzabili, adottando come incognite iperstatiche gli sforzi  $X$  ed  $Y$  in quelle aste (fig. 1), ciò che equivale ad assumere come travatura principale un arco con cerniere in chiave (C) ed alle imposte (A).

Posto

$$(2') \quad S = S_p + S_x X + S_y Y$$

le (3) assumeranno la forma

$$(3') \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \sum \bar{s} S_x = 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \sum \bar{s} S_y = 0. \end{cases}$$

Supponiamo, per incominciare, che, risolvendo queste equazioni rispetto alle incognite  $X$  ed  $Y$  per  $\bar{s}$  tutte nulle, si trovi per una di quelle incognite, per esempio per  $X$ , un valore tale che, nella relativa asta, il limite di elasticità del materiale resistente risulti sorpassato.

In luogo della  $X$  incognita si porrà allora in quelle equazioni un valore noto che designeremo con  $X_e$ ; vi comparirà in compenso come nuova incognita una delle  $\bar{s}$ , e precisamente la deformazione permanente nell'asta di cui si tratta, che denoteremo con  $\bar{s}_x$ .

Tenuto conto che tutte le altre  $\bar{s}$  continuano ad esser nulle, e che il coefficiente di  $\bar{s}_x$  riesce ovviamente eguale ad uno, le (3') si potranno scrivere sotto la forma:

$$(4) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x = 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y \sum \frac{S_y^2 l}{EA} = 0. \end{cases}$$

La seconda di queste equazioni si potrà subito risolvere rispetto ad  $Y$  (unica incognita iperstatica residua) e determinerà così la distribuzione degli sforzi nel nuovo stato di equilibrio; dopo di che ci potremo servire della

prima equazione per calcolare la deformazione permanente  $\bar{s}_x$  che, per raggiungere tale stato di equilibrio, si è dovuta imprimere all'asta sollecitata oltre il limite di elasticità.

Supponiamo ora che anche  $Y$  sia tale che, nella relativa asta, il limite di elasticità risulti sorpassato.

Una tale circostanza, si noti bene, può risultar già dalle (3') in regime di perfetta elasticità, o può verificarsi solo in un secondo tempo, cioè risultar dalle (4) come conseguenza della deformazione permanente  $\bar{s}_x$ ; nell'un caso come nell'altro la conclusione sarà la stessa: entrambe le incognite iperstatiche  $X$  ed  $Y$  verranno sostituite da valori noti  $X_e$  ed  $Y_e$ ; il che è quanto dire che il sistema degli sforzi risulterà senz'altro staticamente determinato.

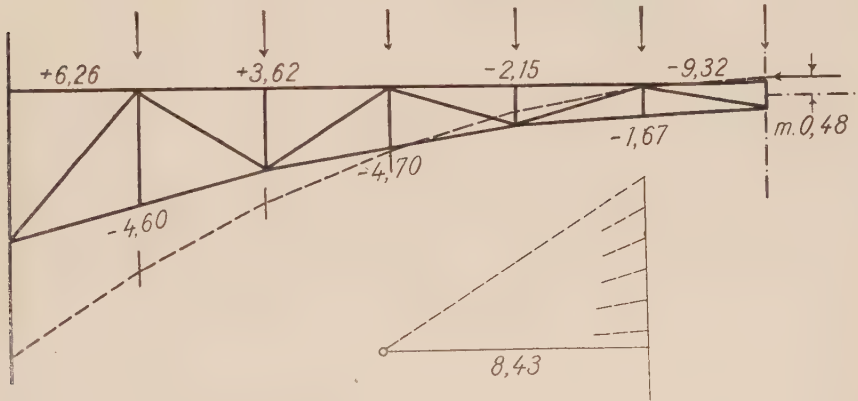


Fig. 2. — Distribuzione degli sforzi ed andamento della curva delle pressioni nella ipotesi della perfetta elasticità.

Farà in compenso la sua comparsa, insieme con la  $\bar{s}_x$  anche una  $\bar{s}_y$ , e le nuove equazioni a cui le (3') si riducono:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum \frac{S_p S_x l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x^2 l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + \bar{s}_x = 0 \\ \sum \frac{S_p S_y l}{EA} + X_e \sum \frac{S_x S_y l}{EA} + Y_e \sum \frac{S_y^2 l}{EA} + \bar{s}_y = 0 \end{cases}$$

potranno venire utilizzate per la determinazione di queste due incognite.

\*  
\* \*

Questi successivi calcoli sono stati eseguiti nel caso concreto a cui si riferisce la già citata fig. 1, ed i risultati che se ne ottennero si trovano tutti indicati nelle figure annesse.

Di queste la fig. 2 si riferisce all'ipotesi della perfetta elasticità; vi si vede l'andamento caratteristico della curva delle pressioni; accanto alle sin-

gole aste dei due correnti si trovano d'altronde segnati i valori degli sforzi (calcolati assumendo come unità di misura delle forze il carico applicato a ciascun nodo, e riferiti all'area della sezione retta del corrente superiore).

Si è poi fatta l'ipotesi che quest'area sia tale che il limite di elasticità del materiale venga raggiunto quando gli sforzi raggiungono le *sei unità* quali sopra definite (restando, ben inteso, esclusa ogni qualsiasi possibilità di de-

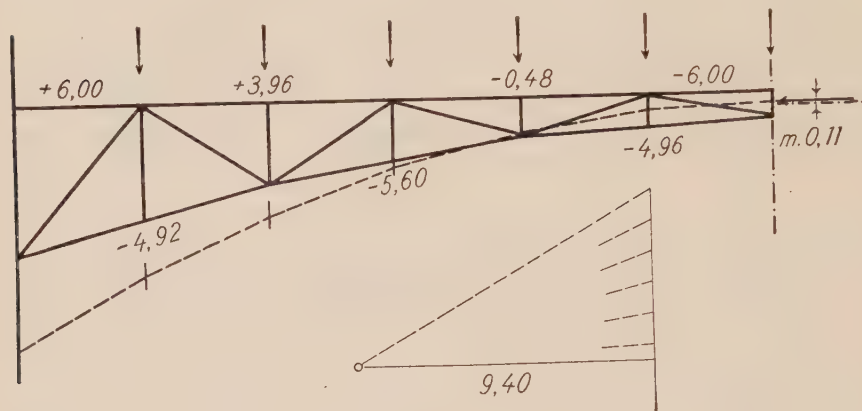


Fig. 3. - Distribuzione degli sforzi ed andamento della curva delle pressioni realizzabili mediante le due deformazioni plastiche.

$$\bar{s}_x = -12,36 \frac{l}{EA}$$

$$\bar{s}_y = +5,08 \frac{l}{EA}$$

formazione per carico di punta nel caso delle aste compresse); a questa ipotesi si riferisce la distribuzione degli sforzi indicata nella fig. 3, nella quale si vede anche il nuovo andamento della curva delle pressioni.

La quale, per effetto delle intervenute deformazioni permanenti nelle due aste sovrabbondanti, si è sensibilmente abbassata in chiave, e sollevata per contro verso le imposte, accostandosi ovunque all'asse geometrico dell'arco, con un vantaggio (dal punto di vista della migliore utilizzazione del materiale resistente) che i tecnici non mancheranno certamente di apprezzare al suo giusto valore.

**Meccanica.** — *Su alcuni casi integrabili di movimento di un giroscopio asimmetrico pesante.* Nota di ERMINIA DE ANGELI, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio G. FUBINI.

In due sue Note <sup>(2)</sup> la sig.na M. R. Fabbri ha studiato una classe di soluzioni particolari, riducibili alle quadrature, del moto di un giroscopio asimmetrico pesante, attorno ad un suo punto fisso, nell'ipotesi che il baricentro si trovi su uno degli assi principali di inerzia (asse  $z$ ), caratterizzato non dal fatto che fra le costanti geometriche del giroscopio intervengano speciali relazioni, bensì da peculiari condizioni iniziali, cioè da opportuni, determinati valori della costante dell'energia... ecc.

Per completare la risoluzione del problema, cioè determinare la legge temporale del moto, occorre calcolare ulteriormente l'integrale ellittico trovato dalla Fabbri:

$$(1) \quad t = \frac{1}{e_3} \int \frac{dr}{\sqrt{p^2 q^2}}$$

in cui

$$p^2 = \frac{C}{A-B} \left[ \frac{B-C}{2A-C} r^2 \pm \frac{(2B-C) P \chi_0}{(C-A)(B-C)} \right]$$

$$q^2 = \frac{C}{A-B} \left[ \frac{C-A}{2B-C} r^2 \mp \frac{(2A-C) P \chi_0}{(C-A)(B-C)} \right]$$

dove  $e_3 = \frac{A-B}{C}$ ,  $A, B, C$ , sono i momenti principali di inerzia,  $P$  il peso del giroscopio,  $\chi_0$  l'unica coordinata  $\neq 0$  del baricentro e il doppio segno dipende da quello di una certa costante  $c_2 = 1$  che compare nella risoluzione del problema e  $p, q, r$  sono le componenti, secondo gli assi principali di inerzia ( $x, y, z$ ), della velocità angolare.

I casi in cui vi è moto effettivo trovati dalla Fabbri sono due <sup>(3)</sup>:

Caso I caratterizzato dalle relazioni:  $c_2 = 1 \quad C > A > B \quad 2B - C < 0$

» II » » »  $c_2 = -1 \quad A > C > B \quad 2B - C < 0$ .

(1) Nella seduta del 20 giugno 1937.

(2) « Rendiconti Lincei » (6), XIX, 1934, pp. 407-15, 495-502.

(3) Nelle Note citate vi sarebbe un III° caso che non si prende in considerazione, non essendo soddisfatta una disuguaglianza fondamentale.



In questa Nota mi propongo di calcolare l'integrale (1) e di servirmi dei risultati per lo studio qualitativo e quantitativo del moto.

Il calcolo di quell'integrale si può fare con le funzioni ellittiche di Jacobi. All'uopo occorre ridurre l'integrale (1) alla forma canonica di Legendre, il che si può fare, nel caso I, con il cambiamento di variabile:

$$(2) \quad r = \beta \operatorname{sen} \varphi$$

che fornisce

$$(3) \quad \alpha(t - t_0) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

avendo detto  $t_0$  una costante arbitraria e posto per abbreviare:

$$\alpha = \sqrt{\frac{P_{\lambda_0}}{C - A}} \quad ; \quad \beta = \sqrt{-\frac{(2A - C)(2B - C)P_{\lambda_0}}{(B - C)(C - A)}} \quad k^2 = \frac{C - A}{C - B}.$$

Dalle (2) e (3) segue:

$$(4) \quad r = \beta \operatorname{sn}[\alpha(t - t_0); k].$$

Nel II invece si opera il cambiamento:

$$(2)' \quad r = \beta_1 \cos \varphi$$

per cui si ha:

$$(3)' \quad \alpha_1(t - t_0) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi}}$$

e quindi

$$(4)' \quad r = \beta_1 \operatorname{cn}[\alpha_1(t - t_0); k_1]$$

avendo posto

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{(A - B)P_{\lambda_0}}{(A - C)(C - B)}} \quad \beta_1 = \sqrt{\frac{(2A - C)(2B - C)P_{\lambda_0}}{(B - C)(C - A)}} \quad k_1^2 = \frac{A - C}{A - B}.$$

Associando le (4) e (4)' alle formule date dalla Fabbri<sup>(1)</sup> si hanno le espressioni dei 6 argomenti che definiscono il movimento dei due casi considerati; ad essi si possono unire quelle di  $\alpha, \beta, k, \alpha_1, \beta_1, k_1$ , nonchè le condizioni fra A, B, C ottenendo il seguente quadro di formule:

(1) Nota I, pp. 408-9.

Caso I. —  $c_2 = 1$   $C > A > B$  ;  $2B - C < 0$

$$k^2 = \frac{C - A}{C - B} \quad \alpha = \sqrt{\frac{P_{\lambda_0}}{C - A}} \quad (1)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{(2A - C)(2B - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)}}$$

$$(5) \left\{ \begin{aligned} r &= \beta \operatorname{sn}[\alpha(t - t_0); k] \\ p^2 &= \frac{C}{A - B} \left[ \frac{B - C}{2A - C} r^2 + \frac{(2B - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)} \right] \\ q^2 &= \frac{C}{A - B} \left[ \frac{C - A}{2B - C} r^2 - \frac{(2A - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(C - A)}{2B - C} pr \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(C - A)}{2A - C} qr \\ \gamma_3 &= \frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(A - C)C}{(2A - C)(2B - C)} r^2 + 1 \end{aligned} \right.$$

Caso II. —  $c_2 = -1$   $A > C > B$  ;  $2B - C < 0$

$$k_1^2 = \frac{A - C}{A - B} \quad \alpha_1 = \sqrt{\frac{(A - B)P_{\lambda_0}}{(A - C)(C - B)}} \quad (1)$$

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{(2A - C)(2B - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)}}$$

$$(5)' \left\{ \begin{aligned} r &= \beta_1 \operatorname{cn}[\alpha_1(t - t_0); k_1] \\ p^2 &= \frac{C}{A - B} \left[ \frac{B - C}{2A - C} r^2 - \frac{(2B - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)} \right] \\ q^2 &= \frac{C}{A - B} \left[ \frac{C - A}{2B - C} r^2 + \frac{(2A - C)P_{\lambda_0}}{(C - A)(B - C)} \right] \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \gamma_1 &= -\frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(C - A)}{2B - C} pr \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(C - A)}{2A - C} qr \\ \gamma_3 &= \frac{1}{P_{\lambda_0}} \frac{(B - C)(A - C)C}{(2A - C)(2B - C)} r^2 - 1 \end{aligned} \right.$$

Si noti che nelle (5) e (5)' v'è una indeterminazione di segno per  $p$  e  $q$ , figurandone solo i quadrati.

Il criterio più semplice per decidere la questione dei segni di queste quantità è quello della continuità di  $p$  e  $q$  e delle loro derivate rispetto al tempo.

Tale continuità si può desumere anche dalle equazioni di Poisson. Incominciando dal I caso, si osservi che è sempre:

$$q = \pm \sqrt{\frac{C(2A - C)P_{\lambda_0}}{(A - B)(C - C)}} \left[ \frac{1}{C - A} - \frac{\operatorname{sn}^2(\alpha t; k)}{C - B} \right] = 0$$

avendo supposto per semplicità  $t_0 = 0$  ed essendo  $C - A \neq C - B$  e  $\operatorname{sn}(\alpha t; k) \leq 1$ , si conclude perciò che la funzione  $q$ , continua, ha segno costante.

Essendo poi:

$$p = \pm \sqrt{\frac{C(2B - C)P_{\lambda_0}}{(A - B)(B - C)(C - A)}} \operatorname{cn}(\alpha t; k)$$

essa si annulla solo nei punti di massimo e di minimo di  $r = \beta \operatorname{sn}(\alpha t; k)$ .

Inoltre dalla prima equazione di Poisson, tenuto conto della continuità e del segno di  $\dot{p}$ , si deduce che  $p$  deve avere segno variabile. Infine per

(1) Le costanti  $\alpha$  e  $\alpha_1$  hanno la dimensione  $[t^{-1}]$  e quindi  $\alpha(t - t_0)$ ,  $\alpha_1(t - t_0)$  sono puri numeri.

la determinazione dei segni iniziali di  $p$  e  $q$  basta determinare il segno di  $\dot{r}$  nel 1° quarto di periodo. Ora derivando rispetto al tempo la

$$r = \beta sn(\alpha t; k) \quad \text{si ha} \quad \dot{r} = \alpha \beta cn(\alpha t; k) dn(\alpha t; k)$$

supponendo l'origine dei tempi nell'istante  $t_0$ , e poichè, in detta parte dell'intervallo,  $\alpha, \beta, cn(\alpha t; k)$  e  $dn(\alpha t; k)$  sono positive ne segue  $\dot{r} > 0$ .

Ma per la III equazione di Poisson è:

$$\dot{r} = e_3 pq \quad \text{con} \quad e_3 > 0 \quad (1)$$

i segni iniziali di  $p$  e  $q$  restano determinati dal dover essere  $pq > 0$  perciò devono essere uguali. Analogamente si ragiona nel caso II, ricordando che in tal caso è:

$$\dot{r} = -\alpha_1 \beta_1 sn(\alpha_1 t; k) dn(\alpha_1 t; k).$$

I risultati della discussione sono riassunti nel seguente specchietto, dove (M) e (m) indicano rispettivamente il massimo ed il minimo di  $r$ .

C A S I				Quarti di periodo						
				1°	2°	3°	4°			
Caso I	$r$			$+$	$(M)^{-}$	$+$	$-$	$(m)$	$-$	
	sottocasi	$a$	$p$	$+$	$-$	$-$	$+$			
			$q$	$+$	$+$	$+$	$+$			
		$b$	$p$	$-$	$+$	$+$	$-$			
			$q$	$-$	$-$	$-$	$-$			
	Caso II	$r$			$(M)$	$+$	$-$	$(m)$	$-$	$+$
sottocasi		$a$	$p$	$+$	$+$	$-$	$-$			
			$q$	$-$	$-$	$-$	$-$			
		$b$	$p$	$-$	$-$	$+$	$+$			
			$q$	$+$	$+$	$+$	$+$			

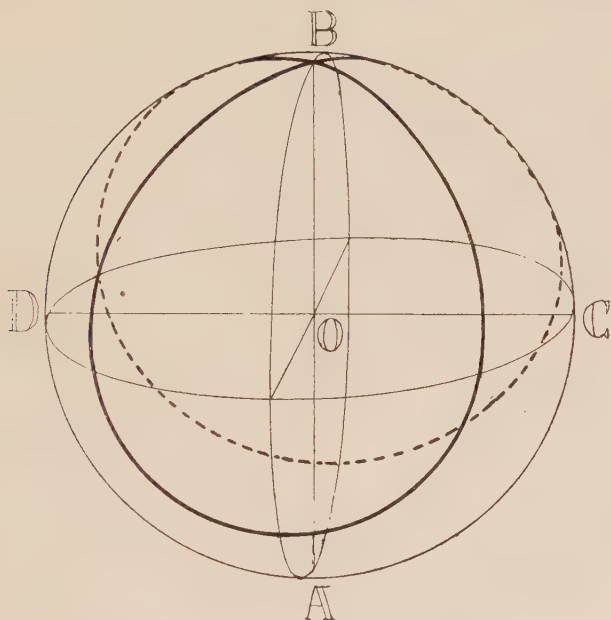
(1) Nota I, p. 408.

Per lo studio quantitativo si può costruire la traiettoria del giroscopio in un caso particolare, rappresentando su di una sfera di raggio  $= 1$ , e centro nell'origine, il luogo geometrico dei punti aventi per coordinate cartesiane i tre coseni direttori  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  della verticale rispetto agli assi solidali, che come è noto, soddisfano all'equazione:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Nella figura seguente è rappresentata la traiettoria corrispondente al caso I per valori particolari di  $A, B, C, P\chi_0$  e precisamente:

$$A = 500 \quad ; \quad B = 300 \quad ; \quad C = 700 \quad ; \quad P\chi_0 = 800$$



(riferiti ad unità assolute). I valori di  $sn$  e di  $cn$  sono stati calcolati mediante le tavole numeriche di Milne Thomson <sup>(1)</sup>.

(1) *Die elliptischen Funktionen von Jacobi*. Berlin, Springer, 1931.

**Meccanica.** — *Vincoli e reazioni nel più generale schema Lagrangiano.* Nota di F. DE FRANCHIS, presentata <sup>(1)</sup> dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Sia  $S$  un sistema di  $N$  punti  $P_i$ , di masse  $m_i$ , comunque vincolato e sollecitato; eliminati preliminarmente i vincoli olonomi, mediante l'introduzione di un opportuno sistema di coordinate lagrangiane  $x^\sigma$  ( $\sigma = 1, 2, \dots, n$ ), le equazioni dei vincoli anolonomi, nel più generale schema lagrangiano, risultano della forma:

$$(1) \quad f_\sigma(x^1, x^2, \dots, x^n | \dot{x}^1, \dot{x}^2, \dots, \dot{x}^n | t) = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m).$$

Il caso che più interessa la meccanica è notoriamente quello in cui le (1) siano lineari nelle componenti  $\dot{x}^\sigma$  della velocità del sistema; ciò non esclude però che esistano particolari problemi dinamici <sup>(2)</sup> per i quali le equazioni vincolari assumono la forma più generale del tipo (1). Non è possibile, in tal caso, dedurre le equazioni del moto dal principio dei lavori virtuali, e quindi dalla corrispondente equazione simbolica della dinamica:

$$(2) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \delta \mathbf{P}_i = 0$$

atta a fornire le note equazioni del Maggi o di Eulero-Lagrange pei sistemi anolonomi, nell'ipotesi essenziale che le (1) risultino lineari nelle  $\dot{x}^\sigma$ . Per dedurre tali equazioni del moto, nel caso generale, è necessario applicare invece, come suol farsi ordinariamente <sup>(3)</sup>, il principio del Gauss, con riferimento alla costrizione vincolare definita dalla:

$$\Gamma = \sum_i^N \frac{1}{m_i} (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i)^2$$

che risulta minima pel generico moto naturale, fra tutti i moti compatibili coi vincoli <sup>(4)</sup>.

(1) Nella seduta del 20 giugno 1937.

(2) Cfr., ad es., P. APPELL, *Exemple de mouvement d'un point assujetti à une liaison exprimée par une relation non linéaire entre les composantes de la vitesse.* « Rend. Circ. Mat. di Palermo », to. XXXII, 2° sem., 1911.

(3) Cfr. G. PRANGE, *Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik.* « Encycl. der math. Wissenschaften », vol. IV, fasc. IV (1935), p. 541.

(4) L'applicazione del teorema dell'Appell, con introduzione della funzione

$$\varphi = \sum_i^N m_i a_i^2 - 2 \sum_i^N \mathbf{F}_i \times \mathbf{a}_i,$$

non differisce sostanzialmente dall'applicazione del principio del Gauss; per quanto riguarda



Non è del tutto privo d'interesse rilevare che il minimo di  $\Gamma$  implica la validità dell'equazione variazionale:

$$(I) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \delta \mathbf{a}_i = 0$$

ove le  $\delta \mathbf{a}_i$  denotano le variazioni di distribuzione di accelerazioni che, a partire dalle  $\mathbf{a}_i$  naturali, risultino compatibili coi vincoli; quindi, anche nel caso in cui intervengano vincoli anolonomi del tipo (1), l'equazione (I), più generalmente, con maggiore vantaggio rispetto alla (2), è atta a definire il moto del sistema materiale <sup>(1)</sup>.

Ciò premesso, partendo dalla (I), con riguardo alle (1), siano queste ultime lineari o pur non nelle  $\dot{x}^e$ , ci proponiamo:

1° di verificare — ciò che è prevedibile — che il problema dinamico relativo al sistema S, comunque vincolato e sollecitato, può sempre ricondursi all'analogo problema relativo allo stesso sistema soggetto ai soli vincoli olonomi, purchè alle forze direttamente applicate si aggiungano opportune forze addizionali;

2° che le dette forze addizionali, nel caso più generale, risultano espresse in funzione dei medesimi argomenti  $x^e$ ,  $\dot{x}^e$  e  $t$  da cui dipendono le forze direttamente applicate; l'espressione funzionale delle loro componenti lagrangiane è sempre possibile ottenere con sole operazioni di derivazione ed in termini finiti <sup>(2)</sup>.

Fissata una generica configurazione all'istante  $t$ , e quindi una qualsivoglia  $n$ -pla di coordinate lagrangiane  $x^e$  ( $e = 1, 2, \dots, n$ ), gli atti di moto, compatibili coi vincoli di mobilità, debbono essere scelti in modo che le componenti  $\dot{x}^e$  delle velocità del sistema soddisfino alle (1); sicchè i vincoli di mobilità non implicano limitazioni alle configurazioni, ma soltanto alle distribuzioni delle velocità. A partire dalla generica configurazione e dal generico atto di moto all'istante  $t$ , una qualsivoglia distribuzione di acce-

tuale teorema, cfr. P. APPELL, *Sur les liaisons exprimées par des relations non linéaires entre les vitesses*. « Comptes Rendus », to. CLII, 1° sem., 1911.

(1) Per l'equivalenza fra la (2) e la (I) per vincoli lineari nelle  $\dot{x}^e$ , cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, *Lezioni di meccanica razionale*. Vol. III, pp. 486-487. N. Zanichelli, II edizione.

(2) Partendo dall'impostazione cartesiana e per vincoli che si esprimono linearmente nelle derivate temporali delle coordinate, il corrispondente problema dinamico è invece ricondotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero; cfr. E. GUGINO, *Sul problema dinamico di un qualsivoglia sistema vincolato ridotto all'analogo problema relativo ad un sistema libero*. « Rend. Acc. Lincei », vol. XII, ser. 6ª, 2° sem., 1930, pp. 307-312.

lezioni conciliabile coi legami deve inoltre verificare le  $m$  equazioni che si ottengono per derivazione temporale delle (1):

$$(3) \quad \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial x^e} \dot{x}^e + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{x}^e} \ddot{x}^e + \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial t} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

ove  $\rho$  è indice muto (indice di sommatoria variabile da 1 ad  $n$ ); segue che, nel passaggio dal moto naturale ad un generico moto compatibile coi vincoli, le variazioni  $\delta \ddot{x}^e$  delle componenti lagrangiane debbono soddisfare alle:

$$(3') \quad \frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{x}^e} \delta \ddot{x}^e = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

ove i coefficienti  $\frac{\partial f_{\sigma}}{\partial \dot{x}^e}$  s'intendano calcolati in corrispondenza alla configurazione ed all'atto di moto prescelti.

Ciò premesso, esistano o pur non vincoli di mobilità, le configurazioni possibili del sistema all'istante  $t$ , sono definite dalle equazioni geometriche:

$$P_i = P_i(x^1, x^2, \dots, x^n | t) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Il generico atto di moto è notoriamente fornito dalle:

$$v_i = \frac{\partial P_i}{\partial x^e} \dot{x}^e + \frac{\partial P_i}{\partial t} \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

ove le  $\dot{x}^e$  debbono scegliersi in modo da soddisfare alle (1), quando esistono vincoli di mobilità (mentre, in assenza di tali vincoli, risultano del tutto indipendenti). Analogamente, per derivazione totale rapporto a  $t$ , a meno di termini indipendenti dalle  $\dot{x}^e$ , si ha:

$$(4) \quad a_i = \frac{\partial P_i}{\partial x^e} \ddot{x}^e + \dots$$

sicchè, per ogni  $n$ -pla di valori delle  $\ddot{x}^e$  soddisfacente alle (3), se esistono vincoli di mobilità (oppure per ogni  $n$ -pla del tutto ad arbitrio in assenza di tali vincoli), a partire dalla generica configurazione e dal generico atto di moto all'istante  $t$ , le (4) forniscono le distribuzioni di accelerazioni compatibili coi legami.

A norma della (I), con riguardo alle (4), durante il moto del sistema  $S$ , deve, istante per istante, verificarsi l'equazione variazionale:

$$(5) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \frac{\partial P_i}{\partial x^e} \delta \ddot{x}^e = 0.$$

Ove si introduca la forza viva del sistema in coordinate lagrangiane:

$$(6) \quad T = \frac{1}{2} g_{\alpha\lambda} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\lambda + g_{0\lambda} \dot{x}^\lambda + \frac{1}{2} g_{00}$$

con le  $g$  funzioni delle  $x$  e di  $t$ , risulta identicamente <sup>(1)</sup>:

$$(7) \quad \sum_i^N (\mathbf{F}_i - m_i \mathbf{a}_i) \times \frac{\partial \mathbf{P}_i}{\partial \dot{x}^q} \mathbf{P} = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^q} - \frac{\partial T}{\partial x^q} - Q_q \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

ed il procedimento formale che suole adoperarsi per stabilire tali identità non dipende affatto dalla circostanza che le  $\dot{x}^q$  siano indipendenti; sicchè le precedenti valgono anche nell'ipotesi che le  $\dot{x}^q$  siano comunque assoggettate a vincoli di mobilità. Tenendo conto della (7), la (5) può scriversi sotto la forma:

$$(5') \quad \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^q} - \frac{\partial T}{\partial x^q} - Q_q \right) \partial \ddot{x}^q = 0.$$

In assenza di vincoli anolonomi, le  $\ddot{x}^q$ , e quindi le  $\delta \ddot{x}^q$  sono, come si è rilevato, del tutto indipendenti, e la validità delle (5'), per valori arbitrari delle  $\delta \ddot{x}^q$ , implica l'annullarsi dei coefficienti; si perviene, in tal modo, alle classiche equazioni del Lagrange della seconda forma, valide pei sistemi olonomi. Nel caso in cui esistano vincoli di mobilità, le  $\delta \ddot{x}^q$  debbono verificare le (3'); applicando il metodo dei moltiplicatori del Lagrange, si perviene agevolmente alle  $n$  equazioni:

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^q} - \frac{\partial T}{\partial x^q} = Q_q + \sum_v^m \lambda_v \frac{\partial f_v}{\partial \dot{x}^q} \quad (q = 1, 2, \dots, n)$$

che, associate alle  $m$  equazioni dei vincoli (I), forniscono un sistema di  $n + m$  equazioni fra le  $n + m$  funzioni incognite  $x^q$  ( $q = 1, 2, \dots, n$ ) e  $\lambda_v$  ( $v = 1, 2, \dots, m$ ).

Vogliamo ora mettere in rilievo la proprietà, particolarmente notevole, che tale sistema consente, con sole operazioni di derivazione ed in termini finiti, la preventiva determinazione delle  $m$  incognite ausiliarie  $\lambda_v$ , in funzione della configurazione, dell'atto di moto e del tempo, senza che sia perciò necessario determinare la legge del moto; ciò, qualunque sia il sistema materiale che si considera e la sollecitazione attiva  $\mathbf{F}_i$  <sup>(2)</sup>. A tale scopo osserviamo che le equazioni (II) forniscono un sistema normale di  $n$  equazioni

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI, loc. cit., vol. II, p. .

(2) Per vincoli lineari, cfr. E. GUGINO, *Sur la détermination des forces de réaction dans le mouvement d'un système matériel*, « Comptes Rendus », to. 191, 1930. Con riferimento ad un sistema di corpi rigidi, cfr. G. A. MAGGI, *Dinamica dei sistemi*, § 82, N. Zanichelli (1921).

differenziali del secondo ordine nelle  $n$  incognite principali  $x^e$ ; esse infatti possono scriversi <sup>(1)</sup>:

$$g_{\lambda\sigma} \ddot{x}^\sigma + \begin{bmatrix} \sigma & \tau \\ \lambda & \end{bmatrix} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\tau + 2 \begin{bmatrix} 0 & \sigma \\ \lambda & \end{bmatrix} \dot{x}^\sigma + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & \end{bmatrix} = Q_\lambda + \sum_{\nu}^m \lambda_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda}$$

ove  $\sigma$  e  $\tau$  sono indici muti, e col noto significato dei simboli di Chsistoffel; in forma equivalente:

$$\ddot{x}^e + \left\{ \begin{matrix} \sigma & \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\tau + 2 \left\{ \begin{matrix} 0 & \sigma \\ \tau \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma + \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \rho \end{matrix} \right\} = Q^e + \sum_{\nu}^m \lambda_\nu g^{\lambda e} \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda}.$$

Se si sostituiscono nelle (3) le  $\ddot{x}^e$ , dedotte dalle precedenti, si ottiene:

$$(8) \quad \sum_{\nu}^m \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} g^{\lambda e} \lambda_\nu = F_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \dots, m)$$

ove si è posto:

$$-F_\sigma = \frac{\partial f_\sigma}{\partial x^e} \dot{x}^e + \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} \left[ Q^e - \left\{ \begin{matrix} \sigma & \tau \\ \rho \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma \dot{x}^\tau - 2 \left\{ \begin{matrix} 0 & \sigma \\ \rho \end{matrix} \right\} \dot{x}^\sigma - \left\{ \begin{matrix} 0 & 0 \\ \rho \end{matrix} \right\} \right] + \frac{\partial f_\sigma}{\partial t}$$

talchè queste ultime risultano espresse in funzione delle  $x^e$ , delle  $\dot{x}^e$ , e di  $t$ .

Le (8) forniscono un sistema di  $n$  equazioni lineari nelle  $\lambda_\nu$ , a coefficienti funzioni delle  $x^e$ ,  $\dot{x}^e$  e  $t$ , il cui determinante  $\left\| \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} g^{\lambda e} \right\|$  non è identicamente nullo. Supponiamo infatti dapprima il sistema S a vincoli scleronomi; fissato un punto P di coordinate  $x^e$  ( $\rho = 1, 2, \dots, n$ ) dello spazio delle configurazioni (considerato come spazio riemanniano) di elemento lineare:

$$ds^2 = g_{e\lambda} dx^e dx^\lambda$$

si può sempre scegliere, come è ben noto, un sistema di coordinate che, nelle immediate vicinanze di P, si comportino come cartesiane; tali coordinate geodetiche, o localmente cartesiane, continueremo a denotare con  $x^e$ , e potremo sempre supporre che in P risultino  $g_{e\lambda} = \delta_{e\lambda}$  ove  $\delta_{e\lambda}$  è una quantità uguale a zero o ad uno secondocchè  $\rho \neq \lambda$  o  $\rho = \lambda$ ; risulta inoltre  $g^{e\lambda} = \delta_{e\lambda}$ . Le equazioni dei vincoli (1), espresse nelle nuove coordinate, per la supposta indipendenza delle  $f_\nu$  rapporto alle  $\dot{x}^e$ , sono sempre tali che

la matrice funzionale  $\left\| \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^e} \right\|$  ammette la caratteristica  $m$ . In conseguenza, il determinante del sistema (8), che assume in P la forma più semplice  $\left\| \frac{\partial f_\nu}{\partial \dot{x}^\lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} \right\|$ , risulta manifestamente diverso da zero. Se, più generalmente,

(1) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Sugli integrali algebrici delle equazioni dinamiche*. « Atti della R. Acc. di Torino », to. 31 (1895), p. 816.

il sistema materiale è a vincoli reonomi, fissato un istante generico  $t$  e pel corrispondente spazio delle configurazioni, si possono ripetere le considerazioni già svolte; esiste quindi un intorno dell'istante prefissato nel quale il determinante  $\left\| \frac{\partial f_v}{\partial x^\lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} g^{\lambda e} \right\|$  si mantiene non nullo.

Il sistema (I) consente quindi di esprimere le  $\lambda$  in termini delle  $x^e$ ,  $\dot{x}^e$  e  $t$ ; sostituendo nelle (II), in luogo delle  $\lambda$  le espressioni che così si ottengono, le (II) forniscono un sistema normale del secondo ordine nelle sole  $n$  incognite principali  $x^e$ . Il problema dinamico, come volevamo mostrare, è così ricondotto all'analogo problema relativo al medesimo sistema soggetto ai soli vincoli olonomi, purchè alle forze direttamente implicate si

associno forze addizionali di componenti lagrangiane  $\sum_v^m \frac{\partial f_v}{\partial x^\lambda} \lambda_v$ .

NOTA. — All'ultima conclusione si può anche pervenire per via algebrica. Denotiamo, a tal uopo, con  $D$  il determinante di ordine  $n$  ottenuto aggiungendo alla matrice funzionale delle  $f$  rapporto alle  $\dot{x}^e$ ,  $n-m$  righe di elementi tutti nulli e con  $G$  il determinante  $\|g^{\lambda e}\|$  ( $\lambda, e = 1, 2, \dots, n$ ); la matrice quadrata  $D' = D \cdot G \cdot D$ , ove i punti indicano moltiplicazione per righe, è ottenuta orlando il determinante  $\left\| \frac{\partial f_v}{\partial x^\lambda} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \dot{x}^e} g^{\lambda e} \right\|$  di ordine  $m$  con

elementi nulli. Avremo allora dimostrato l'asserto quando faremo vedere che  $D'$  ha la caratteristica  $m$ . È innanzitutto evidente che la matrice  $G \cdot D$  ha la caratteristica  $m$ ; infatti possiamo sempre sostituire agli elementi tutti nulli delle  $n-m$  ultime righe di  $D$  elementi non nulli tali che il determinante così ottenuto sia diverso da zero, talchè almeno uno dei minori di ordine  $m$  estratto dalle prime  $m$  colonne della matrice prodotto di  $G$  per quest'ultima risulti non nullo; detti minori sono anche minori di ordine  $m$  di  $G \cdot D$ .

Ciò premesso, consideriamo il determinante  $G^{-1} \cdot D \cdot G \cdot D$ ; può scriversi:

$$G^{-1} \cdot D \cdot G \cdot D = G^{-1} \cdot G^{-1} \cdot G \cdot D \cdot G \cdot D = (G^{-1})^2 \cdot (G \cdot D)^2.$$

Orbene,  $(G \cdot D)^2$  ha la caratteristica  $m$  e quindi, data la forma di  $G \cdot D$ , risulta formato da una matrice quadrata di ordine  $m$ , il cui sviluppo non è nullo, orlata con elementi tutti nulli, talchè il prodotto  $(G^{-1})^2 \cdot (G \cdot D)^2$  risulta costituito dal prodotto del primo minore principale di ordine  $m$  di  $(G^{-1})^2$  per il minore di ordine  $m$  diverso da zero di  $(G \cdot D)^2$ , orlato con elementi tutti nulli. Tenuto inoltre presente che il quadrato di una matrice quadrata, il cui sviluppo non è nullo, può sempre riguardarsi come discriminante di una forma quadratica definita, talchè tutti i minori principali sono non nulli, risulta mostrato che  $G^{-1} \cdot D \cdot G \cdot D$  ha la caratteristica  $m$ . Ora, grazie alla forma particolare di  $D \cdot G \cdot D$ , se fosse il suo minore principale nullo,  $G^{-1} \cdot D \cdot G \cdot D$  non avrebbe la caratteristica  $m$ ; e ciò contraddice la precedente dimostrazione.



**Astronomia.** — *La protuberanza eruttiva del 29 maggio 1937*<sup>(1)</sup>. Nota di M. G. FRACASTORO, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. G. ABETTI.

Fra le varie manifestazioni dell'attività solare, attualmente in rapido crescendo, era stata osservata dal 22 al 28 maggio in Arcetri, intorno all'angolo di posizione di 4°, contato a partire dal punto Nord del sole verso Est, una serie di protuberanze. Il 29 maggio, innalzandosi da quel punto con violenza eccezionale, una di queste raggiunse in poche ore un'altezza pari a circa un terzo del diametro solare.

Ecco i dati di osservazione:

TABELLA I.

Ora	Ora T. U.	P	Base	Altezza	Alt. in km. 103	V in km./sec.	Qualità
Maggio 22	15 <sup>h</sup> 20 <sup>m</sup>	7°	2° 5	39"	29	—	debole
23	9 50	7	5 .6	43	32	—	—
24	9 20	4	5 .1	43	32	—	vivace
25	9 50	1	2 .9	51	37	—	—
26	9 45	3	3 .4	47	34	—	—
27	9 35	5	4 .5	51	37	—	vivace
28	8 40	4	4 .5	47	34	—	—
28	9 35	3	5 .6	59	43	—	—
29	8 18	4	1 .5	466	342	—	debole
29	8 20	—	—	478	350	73	—
29	8 21	—	—	497	364	220	—
29	8 22	—	—	513	376		—
29	8 23	—	—	536	393		—
29	8 25	—	—	568	416		—
29	8 27	—	—	596	437	171	—
29	8 32	—	—	532 <sup>223+</sup> <sub>90</sub>	390 <sup>161+</sup> <sub>66</sub>	—	—
29	8 37	—	—	184	135	—	—

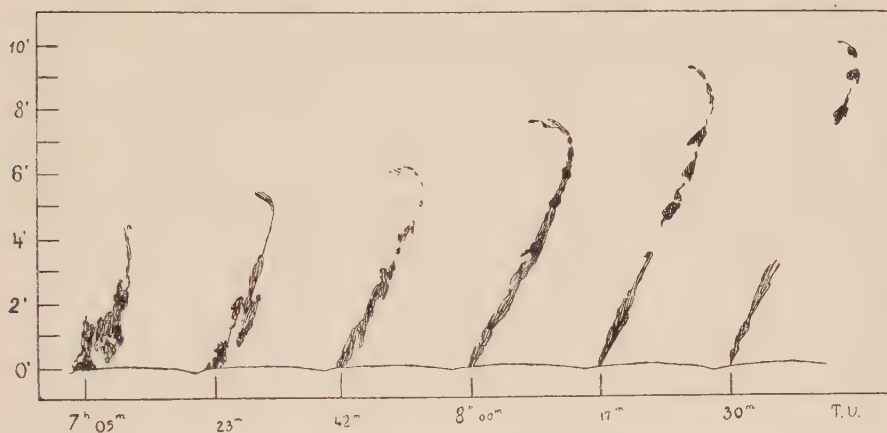
1" = 733.26 km.; V = velocità di innalzamento.

(1) Lavoro eseguito nel R. Osservatorio Astrofisico di Arcetri, Firenze.

(2) Nella seduta del 20 giugno 1937.

Le osservazioni di Arcetri del 29 maggio, eseguite dal dott. P. Cipriani e da me, cominciano ad 8<sup>h</sup> 18<sup>m</sup> (T. U.) quando la protuberanza aveva già raggiunto un'altezza considerevolissima; essa aveva l'aspetto di un pennacchio sottile inclinato verso gli angoli di posizione decrescenti, di scarsa vivacità generale, salvo qualche nodulo assai brillante. Tutto l'insieme andava alzandosi rapidamente; perciò le osservazioni, salvo la prima, furono limitate alla misura dell'altezza. Ad 8<sup>h</sup> 24<sup>m</sup> la protuberanza si divise in due parti, di cui la superiore si allontanava rapidamente, rendendosi invisibile dopo le 8<sup>h</sup> 32<sup>m</sup>.

La stessa protuberanza è stata osservata anche a Zurigo e fra l'altro, ad intervalli più lunghi, sono stati fatti dei disegni ove si vedono chiaramente quei noduli di maggior vivacità che furono osservati anche ad Arcetri.



Ecco i dati ricavati dai disegni di Zurigo, cortesemente favoriti dal prof. W. Brunner.

TABELLA II.

Data	Ora T. U.	P	Altezza in '	Altezza in km. 10 <sup>3</sup>	V
Maggio 29	7 <sup>h</sup> 05 <sup>m</sup>	3° 5	4' 5	198	—
	7 23	—	5 5	242	40.7
	7 42	—	6 2	273	27.0
	8 00	—	7 7	339	61.1
	8 17	—	9 3	409	69.0
	8 30	—	10 1	444	45.1

È interessante constatare che, misurando le altezze dei noduli più luminosi, si ricavano invece velocità di innalzamento di altro ordine:

TABELLA III.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
<i>Nodulo inferiore</i>						
8 <sup>h</sup> 00 <sup>m</sup>	3'.6	158	—	—	—	—
8 17	4.7	207	47.5	—	47.5	—
8 30	7.8	343	174.8	3.7	212.3	4.5
<i>Nodulo mediano</i>						
8 00	5.0	220	—	—	—	—
8 17	6.0	264	43.1	—	43.1	—
8 30	9.1	400	174.9	4.0	214.3	5.0
<i>Nodulo superiore</i>						
8 00	6.5	286	—	—	—	—
8 17	7.4	326	38.8	—	38.8	—
8 30	9.95	438	143.8	3.7	175.0	4.5

(1) ora di osservazione, (2) altezza in primi, (3) altezza in km. 10<sup>3</sup>, (4) velocità di innalzamento, (5) rapporto fra due V consecutive, (6) velocità di innalzamento V', considerando lo scarto avvenuto ad 8<sup>h</sup> 20<sup>m</sup>, (7) rapporto fra due V' consecutive.

Le altezze misurate ad Arcetri sono inizialmente minori, mentre finiscono, verso le 8<sup>h</sup> 30<sup>m</sup>, per essere all'incirca uguali a quelle di Zurigo. Questo naturalmente porta a delle velocità di innalzamento V, ricavate, maggiori ad Arcetri che a Zurigo. Tuttavia, paragonando le altezze e le V di Arcetri con quelle del nodulo brillante superiore visibile nei disegni di Zurigo, si hanno dei numeri dello stesso ordine di grandezza.

Questa circostanza porta alla conclusione che ad Arcetri, forse per una minore trasparenza momentanea del cielo, non si poté vedere quella parte più alta della protuberanza a forma di arco che si innalzava con velocità moderata ed all'incirca costante. Tutti e tre i noduli brillanti, invece, hanno fino alle 8<sup>h</sup> 17<sup>m</sup> una V dell'ordine di quella della parte più alta; poi si ebbe quel brusco aumento nella V che portò alla divisione della protuberanza in due parti.

Anche nelle osservazioni di Arcetri che si limitavano alla misura del più alto dei noduli, si vede una tale variazione a partire da 8<sup>h</sup> 20<sup>m</sup>. Considerando che essa sia avvenuta effettivamente in quell'istante, si hanno i dati delle colonne (6) e (7) (Tabella III).

E. Pettit<sup>(1)</sup> studia da molti anni questi fenomeni, così rapidi da sfuggire probabilmente per la maggior parte all'osservazione.

Il 29 maggio 1919, esattamente 18 anni prima della protuberanza di cui ci occupiamo, ne fu osservata una, mediante lo spettroeliografo Rumford del 40 pollici di Yerkes, della forma di un arco estesissimo, che raggiunse l'altezza di 760.000 km. (Pettit). Di tale protuberanza, che si era vista sul bordo del Sole ad ogni mezza rivoluzione solare fin dal 22 marzo, si poté prevedere il ritorno e studiarne lo sviluppo con accuratezza.

Nello stesso anno 1919, il 15 luglio, si ebbe una protuberanza di forma simile alla precedente che s'innalzò fino a 720.000 km. di altezza (Pettit).

Nel 1920, 8 ottobre, Lee ad Yerkes ne osservò una alta 831.000 km.

Più recentemente, il 21 ottobre 1934, si osservò a M. Wilson una protuberanza dell'altezza di 793.000 km. (Hickox).

Da queste e da altre osservazioni di protuberanze eruttive Pettit ha dedotto due leggi generali e cioè: 1° che il moto ascensionale è uniforme, ma subisce dei bruschi incrementi; 2° che la V successiva è un multiplo intero della velocità precedente di innalzamento.

La protuberanza osservata ad Arcetri ed a Zurigo conferma la prima legge di Pettit, ma non risulta chiaramente che la V cresca per multipli interi. Per di più la presenza dei noduli, aventi velocità diverse dal sommo della protuberanza, può dar luogo ad interpretazioni differenti circa il vero andamento dell'eruzione e la causa di tale fenomeno.

(1) « Ap. J. », 50, 206, 1919; « Publ. Yerkes Obs. », III, parte IV, 1925; « Ap. J. », 76, 9, 1932; « Ap. J. », 84, 319, 1936.

**Geodesia.** — *Sulle relazioni tra le deviazioni della verticale e le anomalie gravimetriche*<sup>(1)</sup>. Nota di G. BOAGA, presentata<sup>(2)</sup> dal Socio E. SOLER.

Come è noto l'interessante problema geodetico concernente la determinazione delle mutue relazioni fra la espressione della gravità sopra una superficie sferoidale supposta di equilibrio e la equazione della stessa, fu trattato in vari modi da Laplace<sup>(3)</sup>, Stokes<sup>(4)</sup>, Pizzetti<sup>(5)</sup>, Somigliana<sup>(6)</sup>, Mineo<sup>(7)</sup>, Gulotta<sup>(8)</sup>, ecc. Recentemente poi il sen. Soler in due Note pubblicate nelle Memorie della Società Astronomica Italiana ha richiamato l'attenzione dei geodeti su tale importante questione<sup>(9)</sup>. Ci proponiamo ora, in questa Nota, di mettere in evidenza, come, partendo dalle relazioni trovate dal Pizzetti sin dal 1895<sup>(10)</sup>, sia possibile ottenere formule semplici ed eleganti fra lo scostamento dell'ellissoide di riferimento ed il geoide (supposto di rotazione), le deviazioni della verticale in latitudine, e le anomalie gravimetriche.

A tale uopo ricordiamo che indicata l'equazione del geoide di rotazione per mezzo della

$$(1) \quad R = a \{ 1 + \alpha \cdot t(\theta) \}$$

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Topografia e Geodesia, Facoltà di Ingegneria, della R. Università di Pisa.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) LAPLACE, *Traité de Mécanique Céleste*. Tome II, cap. II e IV.

(4) STOKES, *On the variation of gravity of the surface of the Earth*. «Trans. of the Cambridge Phil. Soc.», vol. VIII.

(5) PIZZETTI, *Intorno alla determinazione teorica della gravità sulla superficie terrestre*. «Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino», vol. XXXI.

(6) SOMIGLIANA, *Teoria generale del campo gravitazionale dell'ellissoide di rotazione*. «Mem. della Soc. Astr. Ital.», vol. IV, nuova serie.

(7) MINEO, *Relazioni fra i parametri dell'ellissoide terrestre e le misure di gravità*. «Rend. Acc. Naz. dei Lincei», vol. IX, serie VI.

(8) GULOTTA, *Relazioni fra i parametri dello sferoide terrestre supposto non di rotazione e la gravità*. «Atti R. Acc. di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo», vol. XVIII; *Espressione della gravità su pianeti sferoidici non di rotazione*. «Ibidem», vol. XVIII.

(9) SOLER, *Su talune relazioni mutue tra l'espressione della gravità sopra una superficie sferoidale supposta di equilibrio e la equazione della superficie stessa*. «Mem. Soc. Astr. Ital.», vol. VI, nuova serie; *Alcuni ricorsi storici sopra un certo problema geodetico*. «Ibidem», vol. VIII.

(10) Cfr. la Nota del PIZZETTI dianzi richiamata e le sue *Lezioni sulla teoria meccanica della figure dei pianeti*. Pisa, 1901 a p. 256.



con  $\theta$  colatitudine geocentrica,  $\alpha$  costante così piccola che sia trascurabile la sua seconda potenza, le potenze successive, ed il prodotto  $\alpha \cdot w^2$  con  $w$  velocità angolare,  $t$  una funzione di  $\theta$  sviluppabile in somma di funzioni sferiche  $\left(t = \sum_0^\infty T_n\right)$ , e la *funzione della gravità* esprimibile per mezzo della

$$(2) \quad G = G_0 \left(1 + \alpha \cdot \sum_1^\infty H_n\right)$$

con  $G_0$  costante (gravità media superficiale) ed  $H_n$  ancora funzione sferica di ordine  $n$ , le relazioni trovate da Pizzetti<sup>(1)</sup> fra le funzioni sferiche  $T_n$  della (1) e quelle  $H_n$  della (2) sono:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} f \frac{M}{a^2} - 2f\alpha \frac{M}{a^2} T_0 - \frac{2w^2 a}{3} = G_0 & \text{per } n = 0 \\ T_1 = 0 \quad H_1 = 0 & \text{per } n = 1 \\ f\alpha \frac{M}{a^2} T_2 + \frac{5\omega^2 a}{2} \left(\frac{2}{3} - \sin^2 \theta\right) = \alpha G_0 H_2 & \text{per } n = 2 \\ (n-1) f \frac{M}{a^2} T_n = G_0 H_n & \text{per } n > 2 \end{array} \right.$$

dove  $f$  rappresenta la costante di attrazione ed  $M$  la massa della Terra.

Particolarizzando le (1) e (2) ponendo:

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 0, \quad T_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2},$$

$$T_n = H_n = 0 \quad (\text{con } n > 2)$$

si hanno le

$$(4) \quad R = a \left(1 + \frac{1}{2} \alpha + \frac{3}{2} \alpha \cos^2 \theta\right)$$

$$(5) \quad G = G_0 + G_0 \alpha H_2.$$

La (5) in base alle (3) diviene:

$$(6) \quad G = \left\{ f \frac{M}{a^2} - \frac{5}{2} f \alpha \frac{M}{a^2} - \frac{3}{2} \omega^2 a \right\} + \\ + \left\{ \frac{3}{2} f \alpha \frac{M}{a^2} + \frac{5}{2} w^2 a \right\} \cos^2 \theta$$

(1) Queste formule furono adoperate dal prof. SOLER nel lavoro pubblicato negli « Atti dell'Istituto Veneto », to. LXXI: *Sulla espressione della gravità per talune superficie di rotazione*.

dalla quale scendono le seguenti espressioni per le *gravità polare ed equatoriale*

$$(7) \quad G_p = f \frac{M}{a^2} (1 - \alpha) + w^2 a \quad (7') \quad G_e = f \frac{M}{a^2} \left(1 - \frac{5}{2} \alpha\right) - \frac{3}{2} w^2 a$$

sicchè la (6) può mettersi sotto la forma

$$(8) \quad G = G_e (1 + B \cdot \cos^2 \theta)$$

con

$$(9) \quad B = (G_p - G_e) : G_e.$$

Dalla (6) inoltre scende la seguente relazione lineare fra tre gravità  $G_1, G_2, G_3$  alle colatitudini  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ :

$$(10) \quad G_1 (\cos^2 \theta_3 - \cos^2 \theta_2) + G_2 (\cos^2 \theta_1 - \cos^2 \theta_3) + \\ + G_3 (\cos^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_1) = 0$$

dalla quale è possibile dedurre le espressioni che competono alle gravità polare ed equatoriale per mezzo di due gravità alle latitudini qualunque  $\theta_1$  e  $\theta_2$  <sup>(1)</sup>.

Per l'*ellissoide di riferimento* — nello stesso ordine di approssimazione — si ha come è noto:

$$(11) \quad \rho = a (1 - s \cdot \cos^2 \theta)$$

$$(12) \quad g = g_e (1 + \beta \cos^2 \theta)$$

con  $s$  schiacciamento e  $\beta = (g_p - g_e) : g_e$ .

Contrassegnando con l'indice  $e$  i parametri equatoriali, se  $P$  e  $P'$  sono due punti giacenti sullo stesso raggio vettore ed appartenenti rispettivamente alle superficie (4) e (11) si avrà per lo *scostamento*  $PP'$  la:

$$(13) \quad PP' = R - \rho = (R_e - \rho_e) + \left(\frac{3}{2} \alpha R_e + s \rho_e\right) \cos^2 \theta$$

e nella ipotesi  $R_e = \rho_e = r$ :

$$(14) \quad \frac{R - \rho}{r} = \left(\frac{3}{2} \alpha + s\right) \cos^2 \theta.$$

(1) Nelle formule così stabilite se si pone  $\alpha = 0$  si ricavano le formule corrispondenti ad un *geoide sferico* e già ricavate da PIZZETTI, v. p. 41 del suo trattato *Principi della teoria meccanica della figura dei pianeti*, e da SOMIGLIANA, v. p. 15 della sua Memoria dianzi richiamata e l'articolo di E. A. ANSEL, *Zur Theorie der irdischen Schwerefeldes* a p. 579 dell' «Handbuch der Geophysik», B. I, 1° marzo 1934, Berlino.

Chiamando  $l$  e  $\varphi$  le *latitudini geografiche* di  $P$  e  $P'$  e rammentando che valgono le:

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{sen} l = \cos \theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{sen} \theta}{R} \\ \text{ed una analoga per } \operatorname{sen} \varphi, \text{ cambiando } R \text{ in } \rho, \end{cases}$$

introducendo le (4) e (11) e sottraendo membro a membro le espressioni che così si ottengono si trae la:

$$(16) \quad \operatorname{sen} l - \operatorname{sen} \varphi = - \left( \frac{3}{2} \alpha + s \right) \cos l \cdot \operatorname{sen} 2l.$$

Ora, tenendo conto di questa relazione, e ponendo:

$$(17) \quad \xi'' = l - \varphi$$

con  $\xi''$  *deviazione della verticale in latitudine* (espressa in secondi d'arco), si perviene senza difficoltà alla

$$(18) \quad \xi'' = - 206265'' \left( \frac{3}{2} \alpha + s \right) \operatorname{sen} 2l$$

e per la (14), ritenendo nell'ordine di approssimazione da noi seguito  $\cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$

$$(19) \quad \frac{R - \rho}{r} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi''}{206265''} \cdot \operatorname{tang} l$$

formula notevole, che dà la possibilità teorica della *determinazione del geoide supposto di rotazione mediante le deviazioni della verticale in latitudine*.

Dalla (19) restano però escluse le regioni polari in cui  $l = \frac{\pi}{2}$  o  $l = -\frac{\pi}{2}$ , essa è applicabile negli stessi campi in cui sono applicabili le classiche formule che esprimono le variazioni in latitudine, longitudine ed azimut<sup>(1)</sup>.

Dalla (18) scende poi la seguente relazione lineare

$$(20) \quad \xi''_1 : \xi''_2 = \operatorname{sen} 2l_1 : \operatorname{sen} 2l_2$$

fra due deviazioni alle latitudini  $l_1, l_2$ . Essa serve, nell'ambito delle osservazioni pratiche, e nell'ipotesi di eguali distribuzioni di masse negli intorno dei punti stazione, a mettere in evidenza l'eventuale errore dell'ipotesi della forma geometrica attribuita al geoide.

(1) Cfr. per es. C. MINEO, *Sulla geometria di una superficie poco differente da un ellissoide con applicazioni al caso della Terra*. « Annali di Mat. pura ed applicata », to. XIV, 1935-36.

Per quanto concerne la *gravità* osserviamo che, posto  $c = \frac{\omega^2 a^3}{fM}$  la (6) può essere scritta sotto la forma

$$(21) \quad G = f \frac{M}{R^2} (\gamma_0 + \gamma_1 \cos^2 \theta)$$

dove

$$\gamma_0 = 1 - \frac{3}{2} \alpha - \frac{3}{2} c \quad \gamma_1 = \frac{3}{2} \alpha + \frac{5}{2} c$$

e la analoga per l'ellissoide di riferimento

$$(22) \quad g = f \frac{M}{\rho^2} (c_0 + c_1 \cos^2 \theta)$$

dove

$$c_0 = 1 - \frac{c}{3} \quad c_1 = \frac{5}{2} c - s$$

sicchè nell'ipotesi  $R_e = \rho_e = r$  l'anomalia gravimetrica  $\Delta G = G - g$  alla latitudine  $l$  risulta data dalla espressione

$$(23) \quad \Delta G = f \frac{M}{r^2} \left\{ s - \frac{7}{6} c + \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi''}{206265''} \cot l \right\}$$

formula, che si ritiene importante, in quanto lega, per gli sferoidi di rotazione, le anomalie gravimetriche (alla latitudine  $l$ ) alle corrispondenti deviazioni della verticale in latitudine.

Eliminando da questa e dalla (19) la deviazione in latitudine si perviene alla seguente relazione fra lo scostamento  $R - \rho$  del geoide dall'ellissoide di riferimento e le anomalie gravimetriche  $\Delta G$

$$(25) \quad R - \rho = r \left\{ s - \frac{7}{6} c - \frac{\Delta G}{f \frac{M}{r^2}} \right\} \tan^2 l.$$

Anche dalla (25) sono ovviamente escluse le regioni polari.

Se, infine, nell'ambito delle osservazioni sperimentali, è noto lo scostamento lineare fra l'ellissoide di riferimento ed il geoide nel punto di osservazione, ed il  $\Delta G$  calcolato con la (25) non corrisponde a quello dedotto sperimentalmente, la differenza è da attribuirsi in parte allo errore dell'ipotesi della forma attribuita al geoide, ed in parte alla irregolarità della crosta terrestre nell'intorno del punto di osservazione. L'esame di tali differenze può essere utile per mettere in evidenza eventuali irregolarità di distribuzioni di masse nell'interno della Terra.

In ultima analisi osserviamo che nell'ipotesi  $R_e \geq \rho_e$  si trae per  $\frac{R - \rho}{\rho_e}$  la formula (14), con l'aggiunta nel secondo membro della quantità  $\frac{R_e - \rho_e}{\rho_e} = \frac{1}{2} \alpha$  (scostamento relativo equatoriale) e per  $\Delta G$  una formula analoga alla (24) soltanto al posto di  $r$  si deve sostituire  $a$  e nel secondo membro si deve aggiungere il termine correttivo  $-\frac{fM}{a^2} \alpha^{(1)}$ .

**Chimica.** — *Protosolfoselencloruro. Determinazione dell'indice di rifrazione e della tensione superficiale di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$* <sup>(2)</sup>. Nota di A. BARONI, presentata<sup>(3)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

In un precedente lavoro<sup>(4)</sup> io ho avuto occasione di occuparmi dell'azione del selenio sul protocloruro di zolfo  $\text{S}_2\text{Cl}_2$  e di osservare che il selenio può spostare parzialmente e gradualmente lo zolfo dal protocloruro con formazione di un cloruro misto di zolfo e selenio. Per poter provare ciò, confermando così anche i risultati da me ottenuti nello studio dell'azione del selenio sui polisolfuri alchilici<sup>(5)</sup>, io ho preparato delle miscele di protocloruro di zolfo e di selenio nelle proporzioni di una molecola del primo con un atomo del secondo e le ho sottoposte a distillazione frazionata dopo averle riscaldate in tubo chiuso ed in bagno d'olio per quattro ore a temperature di 100°, 150°, 200° e 250°. Mediante accurate distillazioni frazionate nel vuoto ho potuto osservare ed isolare vari composti che si originano nell'azione del selenio sul protocloruro di zolfo e cioè il dicloruro di zolfo  $\text{SCl}_2$ , il protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$ , il tetracloruro di selenio  $\text{SeCl}_4$  ed un cloruro misto di zolfo e selenio o protoselenosolfocloruro  $\text{SeSCl}_2$  non ancora noto: esso è un liquido di colore rosso scuro che distilla a 60–62° a 20 mm., che nella vulcanizzazione del caucciù manifesta un'azione energica quasi bruciante (paragonabile a quella di  $\text{SCl}_2$ ) e che per azione sulla

(1) A questo riguardo è bene rammentare lo studio recente ed assai importante di B. GULOTTA, *Le deviazioni della verticale, le anomalie gravimetriche ed il Geoido*. « Boll. Soc. di Scienze Nat. ed Econ di Palermo », vol. XVIII, 1936, dove l'A. supponendo il geoido del tipo ellissoidale trova semplici formule fra le deviazioni della verticale ed i parametri geometrici dell'equazione del geoido e alle anomalie gravimetriche. Da queste, facendo opportune ipotesi sui coefficienti delle formule di partenza scelte dall'A., si possono ricavare quelle da noi stabilite in questa Nota.

(2) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(3) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(4) Questi « Rendiconti », XVI, 6, p. 514, 1932.

(5) Questi « Rendiconti », IX, p. 1020, 1929.



piperidina si decompone separando selenio e formando monotiopiperidina. Ciò mi ha indotto ad attribuire a tale composto la formula  $\text{Se} = \text{S} = \text{Cl}_2$ . Questa formula è confermata anche dalla rifrazione molecolare calcolata secondo la formula di Lorenz.

Mi è sembrato interessante riprendere tale studio esaminando l'azione dello zolfo sul protocloruro di selenio per vedere se fosse possibile realizzare anche lo spostamento del selenio per opera dello zolfo con formazione di un protosolfoselencloruro  $\text{SSeCl}_2$ . Come nel caso dell'azione del selenio sul protocloruro di zolfo  $\text{S}_2\text{Cl}_2$ , ho iniziato lo studio con la determinazione dell'indice di rifrazione delle miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  scaldate a temperature variabili da  $100^\circ$  a  $250^\circ$  per vedere se le curve corrispondenti presentavano un andamento analogo a quello da me trovato per le miscele  $\text{S}-\text{SCl}_2$  e  $\text{S}-\text{S}_2\text{Cl}_2$  <sup>(1)</sup> e per le miscele  $\text{Se}-\text{S}_2\text{Cl}_2$  <sup>(2)</sup>.

Ho preparato perciò delle miscele di  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  a tenori crescenti in zolfo e le ho scaldate in tubo chiuso ed in bagno d'olio a  $100^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $200^\circ$  e  $250^\circ$  per sei ore. Dopo il riscaldamento ho conservato tali miscele a temperatura ambiente per un mese e ne ho poi determinato l'indice di rifrazione col metodo del prisma usando un prisma di vetro con angolo di apertura di  $15^\circ$ . Data la quantità relativamente piccola di  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  a mia disposizione, ho usato un prisma appositamente costruito avente una capacità per il liquido di un solo centimetro cubo. Nella fig. 1 sono riportati i risultati da me ottenuti.

Come si vede dalla figura le curve tendono ad avvicinarsi alla composizione del composto  $\text{SSeCl}_2$  manifestando così un andamento simile a quello già da me trovato per i sistemi  $\text{S}-\text{S}_2\text{Cl}_2$  e  $\text{Se}-\text{S}_2\text{Cl}_2$ . La solubilità massima dello zolfo nel protocloruro di selenio risulta di circa 2.5 atomi in una molecola di  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  ed è perciò superiore a quella dello zolfo e del selenio nel protocloruro di zolfo che è stata da me trovata rispettivamente in circa 1 e 2 atomi per molecola di protocloruro.

La determinazione della densità di queste miscele eseguita con un picnometro per liquidi della capacità di 1 cc. ha dato un andamento rettilineo col crescere del contenuto in zolfo. Questo risultato è in accordo con quello da me trovato per il sistema  $\text{Se}-\text{S}_2\text{Cl}_2$  <sup>(3)</sup> e da me e da Lowry e Jessop <sup>(4)</sup> per i cloruri di zolfo.

Delle miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  ho determinato anche la tensione superficiale col metodo della massima pressione nelle bolle di Sugden <sup>(5)</sup>. Lowry e Jessop <sup>(6)</sup> studiando la tensione superficiale ed

(1) Questi « Rendiconti », XV, p. 305, 1932.

(2) Loc. cit.

(3) Loc. cit.

(4) « Journ. Chem. Soc. », London, p. 1005, 1930.

(5) SUGDEN, *The Parachor and Valency*. G. Routledge and Sons Ltd., Londra, 1930.

(6) Loc. cit.

il paracoro di cloruri di zolfo contenenti da 37 a 100 atomi % di cloro hanno osservato che la curva presenta una variazione nel suo andamento in corrispondenza al composto  $S_2Cl_2$  la cui esistenza risulta quindi rilevabile anche con questo metodo. Essi non hanno potuto osservare invece attraverso le misure di paracoro la esistenza del cloruro  $SCl_2$ .

Un andamento analogo a quello trovato da Lowry e Jessop è stato da me rilevato per le miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $Se_2Cl_2$ . Le curve della tensione superficiale delle miscele scaldate a  $100^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $200^\circ$

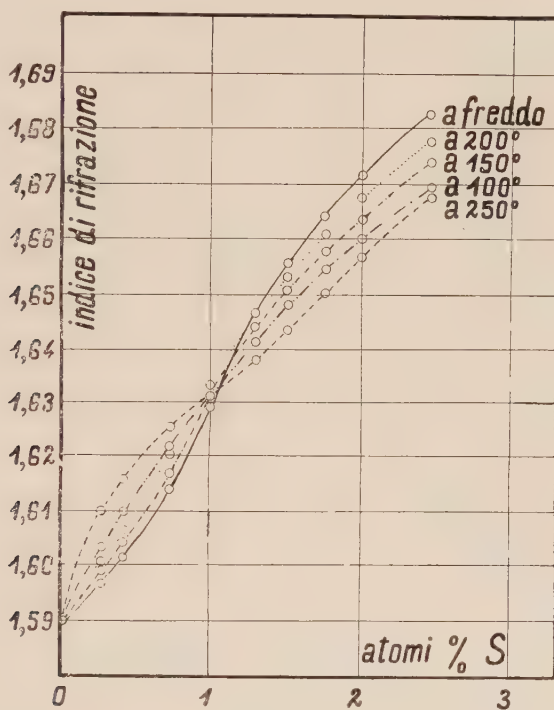


Fig. 1. — Indice di rifrazione di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio.

e  $250^\circ$  ed invecchiate, riportate nella fig. 2, tendono ad avvicinarsi alla composizione corrispondente a quella del protosolfoselencloruro  $SeCl_2$  e ciò, secondo i risultati da me ottenuti in precedenti ricerche, permetterebbe di affermare attraverso questa misura fisica la esistenza di questo composto.

La distillazione di miscele di zolfo e protocloruro di selenio nel rapporto 1:1, mi ha permesso di isolare, come nel caso delle miscele  $Se-S_2Cl_2$ , un cloruro misto di zolfo e selenio  $SeCl_2$  che ancora non era noto. La resa migliore nella preparazione di questo composto (30 %), la ho ottenuta distillando miscele scaldate a  $200^\circ$  in tubo chiuso per sei ore. L'isolamento del protosolfoselencloruro si è presentato più facile di quello di  $SeCl_2$ . Infatti per isolare quest'ultimo allo stato puro bisogna estrarre con

etere il prodotto distillato che contiene sempre del tetracloruro di selenio trascinato durante la distillazione, evaporare l'etere e ridistillare il residuo nel vuoto. Nel caso delle miscele S—Se<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub> non ho osservato praticamente formazione di SeCl<sub>4</sub>, ma solo di SCl<sub>2</sub>, S<sub>2</sub>Cl<sub>2</sub>, e SSeCl<sub>2</sub> e di un notevole residuo costituito essenzialmente tutto da selenio. Nella reazione si viene a stabilire cioè un equilibrio spostato, come era prevedibile, a favore dei composti alogenati dello zolfo per la maggiore stabilità che essi presentano rispetto a quelli del selenio. Ciò è confermato anche dalla maggiore stabi-

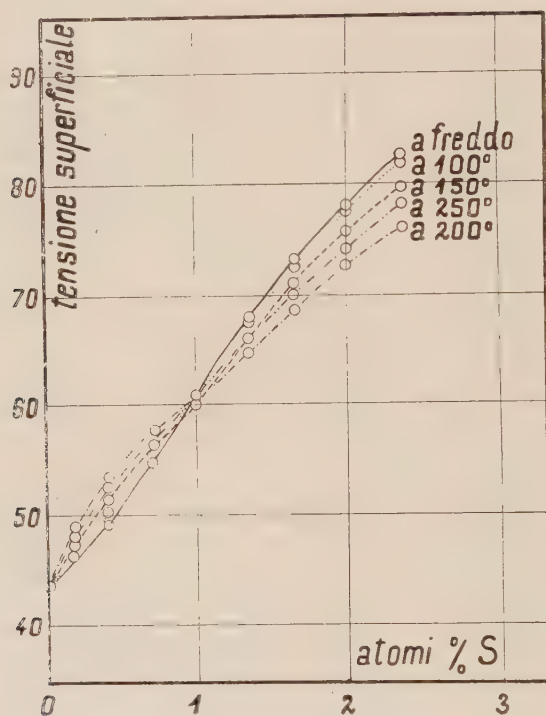


Fig. 2. — Tensione superficiale di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio.

lità di SSeCl<sub>2</sub> rispetto a SeSCl<sub>2</sub> come è dimostrato dal maggior rendimento che ho potuto realizzare nella preparazione di questo composto e cioè lo zolfo attaccato terminalmente alla catena lineare la stabilizza mentre il selenio nelle stesse condizioni ne diminuisce la stabilità.

Il protoselensolfocloruro è un liquido di color arancio chiaro che distilla a 68° a 20 mm. praticamente inalterato. Esso è stato analizzato seguendo il metodo di Hidemaro Endoh<sup>(1)</sup> già da me usato per il protoselensolfocloruro e determinando il cloro come AgCl, lo zolfo come BaSO<sub>4</sub> ed il selenio come selenio metallico. I risultati da me ottenuti sono i seguenti:

(1) « Journ. Chem. Soc. Ind. » (Suppl.), 33, 290 B 92 B, 1930.

sostanza pesata	AgCl pesato	Se pesato	BaSO <sub>4</sub> pesato	Cl %	Se %	S %
0.5144	0.8076	0.2230	0.6532	38.84	43.40	17.44
0.4832	0.7578	0.2091	0.6147	38.80	43.38	17.47

Teoricamente il composto da me preparato dovrebbe contenere: Cl = 38.92, S = 17.60, Se = 43.47 %.

Dalla determinazione della rifrazione molecolare in base ai valori dell'indice di rifrazione  $n_D^{20} = 1.7234$  e del peso specifico  $d_4^{20} = 2.1502$  risulta che a questo composto deve essere attribuita una formula identica ma isomera a quella già da me stabilita per il protoselensolfocloruro e cioè la formula  $S = Se = Cl_2$ .

Questa formula è confermata dal comportamento del protosolfoselencloruro rispetto alla piperidina. Facendo infatti gocciolare lentamente  $SSeCl_2$ , sciolto in etere anidro, in una soluzione eterea di piperidina ha ottenuto la monoselenpiperidina con separazione di zolfo. Non ostante la maggior stabilità da me riscontrata per il composto  $SSeCl_2$  rispetto a quella di  $SeSCl_2$ , non mi è stato possibile ottenere in nessun modo un composto con la piperidina contenente zolfo e selenio.

Nell'azione rispetto all'olio di ricino ed all'olio di colza, il protosolfoselencloruro manifesta una energia minore di quella di  $SeSCl_2$  e paragonabile a quella del protocloruro di zolfo  $S_2Cl_2$ .

**Radioattività.** — *Alcune proprietà chimiche dell'elemento* 43<sup>(1)</sup>. Nota di C. PERRIER ed E. SEGRÈ, presentata <sup>(2)</sup> dal Socio N. PARRAVANO.

#### 1. — Introduzione.

Il prof. E. O. Lawrence ci ha regalato un pezzo di una lamina di molibdeno che faceva parte del cyclotron del Radiation Laboratory dell'Università di California (Berkeley) e che era stato bombardato con un intenso fascio di deutoni di 5 MV per alcuni mesi. Il molibdeno era stato contemporaneamente sottoposto anche ad irradiazione neutronica perchè nel cyclotron, come è noto, insieme ai deutoni sono sempre presenti neutroni.

La lastra di molibdeno presentava una forte attività proveniente prevalentemente da elettroni molto molli. La radioattività è complessa e deriva da almeno due sostanze (oltre una contaminazione di  $P^{32}$  di cui parleremo appresso) con vite medie dell'ordine di grandezza del mese.

(1) Lavoro eseguito negli Istituti di Fisica e Mineralogia della R. Università di Palermo.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

Sulla parte radioattiva di questa ricerca riferiremo più tardi quando le curve di decadimento saranno state seguite più a lungo.

La sostanza radioattiva era stata spedita da Berkeley il 17 dicembre 1936 e l'analisi cominciò il 30 gennaio 1937; pertanto tutte le sostanze a vita media relativamente breve ci sono sfuggite essendo già decadute all'inizio della ricerca.

Colle usuali reazioni nucleari provocate da deutoni e neutroni gli elementi radioattivi che si sarebbero potuti attendere nel Mo erano Zr, Nb, Mo, 43. Restava inoltre aperta la possibilità che nel Mo fossero contenute impurità, tuttavia il seguito del lavoro mostrerà come esse non possono avere avuto una parte importante nella formazione delle sostanze radioattive studiate. È però da osservare che nel corso dell'analisi abbiamo ancora riscontrato che vi era una forte attività dovuta a  $P^{32}$ . Questa circostanza che ci era sfuggita al principio ha complicato notevolmente l'inizio dell'analisi e ci si è palesata solo più tardi in base alle curve di decadimento e di assorbimento dei raggi  $\beta$  di alcuni precipitati. Essa è stata poi confermata chimicamente. Per circostanze che non ci sono note, sembra che tutte le sostanze bombardate nel cyclotron di Berkeley siano contaminate da notevoli quantità di  $P^{32}$  di apporto estraneo al metallo bombardato.

Il  $P^{32}$  ricavato dal Mo e da altri metalli delle pareti del cyclotron è stato impiegato come indicatore in alcune ricerche biologiche<sup>(1)</sup>.

Dal fatto che le due facce della lastra di Mo mostravano attività molto differenti, segue che l'attività deve essere stata provocata dal bombardamento di particelle fortemente frenate dal Mo e quindi cariche (deutoni).

## 2. — *Analisi.*

In una prima analisi abbiamo cercato principalmente di vedere se l'attività poteva essere attribuita al Nb. Circa 200 mgr. di Mo aventi un'attività di alcune migliaia delle nostre unità radioattive<sup>(2)</sup> (U. R.) sono stati sciolti in acqua regia e tirati a secco su b. m., previa aggiunta di 5 mgr di Re allo stato di  $HReO_4$ , ripresi con KOH e addizionati di poco niobato potassico. L'aggiunta del Re come quella successiva del Mn è dovuta al fatto che non avendo un isotopo stabile dell'elemento 43 e non conoscendone esattamente le reazioni analitiche, occorre la presenza di elementi il più possibilmente simili ad esso per proteggerlo nelle precipitazioni. Come tali naturalmente si presentano il Mn ed il Re che lo precedono e che lo seguono nella stessa colonna del sistema periodico. Vedremo comunque che l'analogia col Re è molto più stretta di quella col Mn come è d'altra parte prevedibile<sup>(3)</sup>.

(1) « Ricerca Scientifica », 81, 216, 1937.

(2) In queste unità la radioattività  $\beta$  e  $\gamma$  di 0,5 gr. di U vale circa 170 U. R.

(3) Ved., per es., I. e W. NODDACK, « Erg. der exakten Naturw. », 6, 333, 1927.



Il Mn è stato aggiunto come niobato di Mn preparato a parte mescolando ad una soluzione di solfato di Mn contenente  $(\text{NH}_4)_2 \text{SO}_4$  un piccolo eccesso di niobato potassico. Il niobato di Mn essendo poco solubile rimase in sospensione. Dopo la mescolanza essendosi verificata subito una tendenza all'annerimento del precipitato per evidente formazione di  $\text{MnO}_2$  si aggiunsero poche gocce di  $\text{H}_2\text{O}_2$  onde assicurare la precipitazione completa del Mn e quindi fu fatta passare una corrente di  $\text{CO}_2$  per precipitare il Nb, possibilmente esente da Mo.

Il precipitato, molto attivo, venne fuso con carbonato e nitrato potassico. Il prodotto della fusione fu lisciviato ed il manganato ridotto con alcool. Questo trattamento, ripetuto un paio di volte, diede luogo ad un residuo di  $\text{MnO}_2$  inattivo.

Il prodotto della lisciviazione contenente Nb fu acidificato per precipitare il Nb come pentossido. Alla soluzione acida aggiungemmo 7 mgr. di sal di fosforo e 20 mgr. di nitrato di Zr. Il precipitato che contiene Nb, P e Zr è sempre molto attivo (oltre 1000 U. R.). Esso è stato successivamente fuso varie volte alternativamente con carbonato e idrato potassico e i prodotti di lisciviazione sono stati acidificati in modo da cercare di isolare il Nb. Le frazioni niobifere erano sempre attive, ma l'attività non pareva seguire quantitativamente il Nb e aveva i caratteri radioattivi del  $\text{P}^{32}$ . Alla fine, da una discreta quantità di Nb che aveva un'attività di 56 abbiamo preparato del metaniobato sodico cristallino, il quale è stato anche controllato per i suoi caratteri ottici cristallografici. Questo era completamente inattivo e dalle sue acque madri abbiamo precipitato quantitativamente l'attività del materiale di partenza come fosfato ammonico magnesiaco, anche questo controllato al microscopio polarizzatore. Resta così accertato che il Nb è inattivo.

Nel seguito di questa prima analisi le frazioni contenenti solo Zr sono risultate anch'esse inattive. Per confermare in ogni modo l'inattività dello Zr in una successiva analisi abbiamo sciolto il Mo attivo in acqua regia, aggiunto 7,5 mgr. di Re, 10 di nitrato di Zr e tirato a secco su b. m. Con poca ammoniaca si trasforma l'acido molibdico in molibdato ammonico e poi trattiamo il tutto con eccesso di  $\text{HNO}_3$ . Il precipitato costituito essenzialmente da fosfomolibdato di ammonio e da fosfato di zirconio è fortemente attivo; lo trattiamo con ammoniaca, ma il precipitato conserva sensibilmente la stessa attività, il che significa che poco fosforo è stato fissato come fosfomolibdato; questa frazione del fosforo attivo è recuperata come fosfato ammonico magnesiaco. Il residuo del trattamento con ammoniaca, che contiene il grosso del fosforo e dello Zr e che ha un'attività di circa 1500, è fuso con carbonato sodico, lisciviato, il residuo contenente lo Zr è nuovamente fuso con piro solfato e riprecipitato con ammoniaca. Il precipitato di idrato di Zr risulta completamente inattivo, mentre nel filtrato, proveniente dalla fusione alcalina, recuperiamo quantitativamente l'attività sotto

forma di fosfato ammonico magnesiaco. Resta così esclusa anche la presenza di un isotopo attivo dello Zr.

Anche il Mo è inattivo, come è risultato da molte prove tra cui ricordiamo solo la seguente: dal molibdeno sciolto e addizionato di Re di P e di  $\text{NH}_4\text{NO}_3$  precipitiamo fosfomolibdato; questo è risolto in ammoniaca; separiamo il  $\text{P}^{32}$  attivo come fosfato ammonico magnesiaco e riprecipitiamo il Mo come solfuro inattivo.

Da tutte queste analisi risulta quindi escluso che l'attività sia dovuta a Nb, Zr, Mo. D'altra parte la radioattività del Mo irradiato ha caratteri radioattivi molto diversi da quelli del  $\text{P}^{32}$  che era però l'unica sostanza attiva trovata fino a questo punto. Restava da investigare, come dicemmo in principio, la possibilità della presenza di un isotopo radioattivo dell'elemento 43 (Masurio di I. e W. Noddack)<sup>(1)</sup>. Questo avrebbe dovuto essere ricercato nella frazione contenente il Re dato che non se ne era trovata traccia nel Mn.

Un indizio che l'attività dovesse essere contenuta in un composto ossigenato relativamente volatile, come è da prevedersi siano gli ossidi superiori del 43, si era avuto fin dalla prima analisi, perchè dalla soluzione ottenuta dopo la separazione del Nb, precipitammo in ambiente acido i solfuri; questi avevano un'attività che si ridusse a meno della metà per leggera calcinazione in bagno d'aria.

Comunque data la mancanza di un isotopo stabile del 43 e la estrema scarshezza ed incertezza delle informazioni sulle sue proprietà chimiche, è apparso necessario e desiderabile un ulteriore più accurato studio che servisse nello stesso tempo a caratterizzare l'attività dal punto di vista chimico e possibilmente a fornire informazioni sulle proprietà chimiche dell'elemento 43.

Una notevole difficoltà per investigazioni quantitative su questa attività deriva dalla estrema mollezza della radiazione emessa, che è dimezzata da circa 1,5 mgr/cm<sup>2</sup> di Al. Inoltre la curva di assorbimento è ben lungi dall'essere esponenziale per cui è praticamente impossibile apportare correzioni attendibili per lo assorbimento dei raggi  $\beta$  da parte dei precipitati. Questa circostanza è aggravata dal fatto che parte dei precipitati, quando sono fini, come, per es., nel caso dei solfuri, si insinuano nei pori della carta con apparente diminuzione dell'attività. Finora non ci è stato possibile di disporre di mezzi filtranti più adatti.

### 3. — *Proprietà chimiche del 43.*

Il primo passo per lo studio chimico dell'attività è naturalmente la concentrazione della medesima colla minima possibile quantità di trascinatore.

Il metodo più pratico che abbiamo trovato a questo scopo è quello di sciogliere il Mo attivo (circa 200 mgr.) in acqua regia, aggiungere da 2 a

(1) W. NODDACK, I. TACKE e O. BERG, «Sitzungsber. d. Preuss. Akad. d. Wiss.», 19, 400, 1925.

5 mgr. di  $\text{HReO}_4$ , tirare a secco a b. m. riprendere con ammoniaca, far passare una corrente di  $\text{H}_2\text{S}$ , aggiungere qualche mgr. di un sale di Mn, e lasciare in riposo per una notte. Precipita il solfuro di Mn che trascina una sostanza nera in piccola quantità costituita probabilmente da solfuro di Re o da un solfoperrenato<sup>(1)</sup>. Il precipitato contiene la massima parte dell'attività. Esso può essere liberato completamente dal Mn trattandolo con  $\text{HCl}$  diluito, e sen ecessario, con  $\text{SO}_2$ , senza perdita di attività. Per controllo il Mn disciolto è riprecipitato con  $\text{H}_2\text{S}$  e risulta inattivo nonchè roseo carnicino.

Che la sostanza nera contenga Re è anche mostrato dal fatto che essa si scioglie molto facilmente in  $\text{H}_2\text{O}_2$  a freddo come il solfuro di Re e mostra altri caratteri del Re. Comunque per avere una idea della sua natura chimica abbiamo ripetuto nelle stesse condizioni la precipitazione di solfuro di Mn da una soluzione molibdica in assenza di Re e da una soluzione renica in assenza di Mo. Il solfuro di Mn della soluzione molibdica era roseo carnicino e non conteneva alcuna sostanza nera insolubile in acidi minerali, mentre quello proveniente dalla soluzione renica aveva gli stessi caratteri del precipitato di cui abbiamo parlato sopra.

Ulteriori precipitazioni di Mn dalla stessa soluzione solfurata di Mo attivo previa aggiunta di Re producono la solita separazione di sostanza nera però l'attività decresce rapidamente: per es. in tre separazioni successive da una stessa soluzione di Mo col metodo sopra indicato abbiamo ricavato attività di 1000, 20 e 0.

Risultati simili, ma con minore rendimento e meno netti si ebbero anche sostituendo il Mn con Zn.

Un altro metodo di concentrazione dell'attività è quello di calcinare l'anidride molibdica attiva in corrente di  $\text{O}_2$  previa aggiunta di renio, a  $550^\circ$  circa. Il Re volatilizza e trascina l'attività che può essere raccolta insieme al Re in soluzioni alcaline, e trasformata in solfuro<sup>(2)</sup>.

Raccolta l'attività con uno dei due metodi indicati sopra, si risciolge il solfuro di renio attivo in  $\text{H}_2\text{O}_2$  e si prepara una soluzione titolata rispetto all'attività, tirandone a secco a b. m. un cc. su un coperchio di crogiuolo.

Le soluzioni titolate contenevano come ordine di grandezza 0,05 mgr. di Re e 20 unità di attività per cc. e per il modo stesso di preparazione gli elementi si trovavano verosimilmente allo stato massimo normale di ossidazione.

Colle soluzioni titolate sopra indicate abbiamo eseguite alcune reazioni che passiamo ad esporre.

(1) Cfr W. FEIT citato a p. 57 del libro di I. e W. NODDACK, *Das Rhenium*, Lipsia, 1933.

(2) I. e W. NODDACK, «Erg. d. exakten Naturw.» 6, 333, 1927.

*Solfuri.* — Acidificando con acido cloridrico e facendo passare una corrente di  $\text{H}_2\text{S}$  si precipita l'attività in modo praticamente completo usando come trascinatori Re, Cu, Cd. Le precipitazioni sono state eseguite rispettivamente alle concentrazioni del 12 %, 4 % e 1 % di HCl.

Nel caso del Re trattando il precipitato attivo con polisolfuro ammonico, l'attività non varia. Essa si scioglie invece, come già detto, rapidamente, in  $\text{H}_2\text{O}_2$  insieme al solfuro di Re.

*Ossidazione e riduzione.* — Data la posizione del 43 nel sistema periodico, le reazioni di ossidazione e riduzione devono avere molta importanza nella chimica di questo elemento; i dati finora raccolti sono i seguenti. La soluzione titolata di attività è addizionata di una sale di Mn e trattata con  $\text{HNO}_3 + \text{KClO}_3$ . Precipita  $\text{MnO}_2$  che non trascina l'attività. Una soluzione di  $\text{KMnO}_4$  è mescolata con un po' di soluzione attiva lievemente alcalinizzata e ridotta con alcool. Il precipitato di biossido di Mn è inattivo. Anche mescolando l'attività a rutenato potassico e precipitando il Ru con alcool, non si raccoglie l'attività. Invece con Zn si precipita l'attività, da una soluzione acida per HCl, con buon rendimento.

*Volatilità.* — Data la posizione del 43 nel sistema periodico, si devono attendere composti facilmente volatili corrispondenti agli stati superiori di ossidazione. Un indizio di ciò si ebbe, come accennammo, fin dalla prima analisi. Inoltre i caratteri di volatilità sono analiticamente molto importanti per cui li abbiamo studiati con maggiore dettaglio. Essi dipendono naturalmente dallo stato di ossidazione dei composti. Noi abbiamo cercato, per quanto possibile di portarci nello stato di ossidazione più elevato.

In una serie di esperienze abbiamo tirato a secco a b. m. su coperchi di crogiuoli di porcellana un poco di soluzione attiva titolata e misurato l'attività del residuo. L'evaporazione, a b. m., anche ripetuta, non fa perdere affatto attività. Scaldando poi i coperchi, in un fornello, si trova che essa comincia a diminuire verso i  $400^\circ$  e a  $500^\circ$  sparisce rapidamente. In queste esperienze abbiamo cercato di volatilizzare anidridi prive di alcali, non sappiamo però se questa condizione sia stata effettivamente raggiunta, perchè i residui renici attivi contengono una piccola frazione di milligrammo di materia e quindi sarebbe bastata una traccia di una base a salificarli. Come controllo abbiamo volatilizzato la stessa soluzione attiva addizionata di soda. La temperatura di volatilizzazione è risultata di pochissimo superiore.

Come è noto il Re può essere separato quantitativamente dal Mo se una loro soluzione fortemente solforica (80 % di  $\text{H}_2\text{SO}_4$ ) è fatta attraversare a caldo (circa  $200^\circ$ ) da una corrente di HCl umido<sup>(1)</sup>. Cercammo di vedere se in queste condizioni l'attività restasse indietro oppure passasse

(1) W. GEILMANN e F. WEIBKE, «ZS. f. Anorg. Chemie», 199, 120, 1931.



insieme al Re. Abbiamo constatato che essa rimane sempre quantitativamente nel residuo. Così, per es., in un'esperienza abbiamo distillato una soluzione solforica contenente 200 U. R. di attività, 5 mgr. di Re e tracce di impurità probabilmente Mo, in corrente di HCl umido a 180° per circa un'ora e mezza. Sono passati 125 cc. di liquido. Dal distillato abbiamo precipitato mediante H<sub>2</sub>S tutto il renio e una traccia minima di attività. Nel residuo, mediante H<sub>2</sub>S abbiamo recuperato invece gran parte dell'attività insieme a tracce di impurità rimaste e completato poi la precipitazione dell'attività con aggiunta di Re.

Questa separazione dal Re è particolarmente importante poichè rappresenta l'unico modo finora trovato per separare l'attività e quindi, il 43 dal Re.

Abbiamo anche separato l'attività da una soluzione di rutenato potassico per mezzo di una distillazione in corrente di cloro secondo Debray e Joly<sup>(1)</sup>. Il rutenio distilla mentre l'attività si trova nel residuo.

Questa separazione dal rutenio, mentre ci fornisce una informazione sulla volatilità in corrente di cloro del 43, permette anche di escludere che l'attività possa attribuirsi a Ru, confermando il saggio indicato a proposito della ossidazione e riduzione.

Abbiamo già detto come la calcinazione in corrente di O<sub>2</sub> serva anche bene a separare l'attività dal Mo, benchè il metodo ai solfuri indicato precedentemente ci sembri preferibile.

*Reattivi organici.* — Tra i vari reattivi organici provati si sono avuti ottimi risultati nella separazione dell'attività dal Mo col processo alla ossichinolina e nitron usato da Geilmann e Weibke<sup>(2)</sup> per la separazione del Re dal Mo. Inoltre abbiamo avuto buoni risultati precipitando il grosso del Mo con benzidina in presenza di Re ed estraendo come solfuro l'attività dal filtrato. Tuttavia questo metodo di separazione non è così sicuro come i precedenti.

Un precipitato di parrenato di Tl secondo Krauss e Steinfeld<sup>(3)</sup> da una soluzione attiva ha trascinato gran parte dell'attività.

*Elettrolisi.* — Siamo riusciti a preparare strati sottilissimi di 43 per deposito elettrolitico su Pt secondo Hölemann<sup>(4)</sup>. Tali strati verosimilmente metallici sono volatili per riscaldamento all'aria a circa 300° (cfr. p. 5).

Riassumendo da tutti i caratteri chimici sopra elencati è chiaro che l'attività del Mo da noi investigata deve attribuirsi all'elemento 43 poten-

(1) H. DEBRAY e H. JOLY, «C. R.», 106, 328, 1888.

(2) W. GEILMANN e F. WEIBKE, «ZS. f. Anorg. Chemie», 199, 347, 1931.

(3) F. KRAUSS e H. STEINFELD, «ZS. f. Anorg. Chemie», 197, 52, 1931.

(4) H. HÖLEMANN «ZS. f. Anorg. Chemie» 211, 195, 1933.



dosi escludere, come si riconosce facilmente, tutti gli altri elementi del sistema periodico.

Il 43 nel suo comportamento chimico si approssima molto al Re e anzi mostra le stesse reazioni a meno di quella della volatilità in corrente di HCl. Tuttavia non bisogna dimenticare che avendo usato il Re come trascinatore di quantità « imponderabili » di 43, alcune reazioni potrebbero forse essere diverse per quantità « ponderabili » dell'elemento studiato.

Ci sia permesso infine di ringraziare vivissimamente il prof. E. O. Lawrence e il Radiation Laboratory di Berkeley (California) che col prezioso dono del <sup>90</sup>Mo attivo hanno reso possibile questa ricerca.

**Chimica** (Chimica-fisica). — *Sullo spettro di fiamma dell'europio e sopra la persistenza di tre righe di bassa eccitazione.* Nota <sup>(1)</sup> di G. PICCARDI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. L. ROLLA.

In una precedente Nota <sup>(3)</sup> avevo esposto i risultati di alcune mie osservazioni sul comportamento delle righe dell'europio, che oggi riassumo brevemente così: In condizioni di bassa eccitazione, le righe più persistenti non sono le righe ultime  $\lambda 4205.03$  e  $\lambda 4129.72$  ma le righe  $\lambda 4661.89$ ,  $\lambda 4627.26$ ,  $\lambda 4594.07$ , le quali presentano caratteristiche particolari.

Le righe date come ultime in tutte le tabelle di costanti e di dati numerici, sono righe di bassa eccitazione dell'atomo ionizzato Eu. II; quelle considerate da me sono invece righe dell'atomo neutro Eu. I, ma di una eccitazione così bassa da dover esser considerate piuttosto come righe di fiamma che di arco.

Da molto tempo desideravo studiare quantitativamente la persistenza di queste righe, ma non possedendo europio puro, od almeno a concentrazione nota, avevo dovuto abbandonare l'idea. Recentemente il prof. Luigi Rolla, Direttore dell'Istituto di Chimica generale nella R. Università di Genova, al quale voglio esprimere qui la mia viva gratitudine, mi ha dato una certa quantità di europio purissimo, affinchè io avessi la possibilità di studiare lo spettro di fiamma completo di questo elemento e di eseguire i saggi di persistenza desiderati.

#### LO SPETTRO DI FIAMMA DELL'EUROPIO.

Il dispositivo sperimentale che io ho adottato per ottenere lo spettro di fiamma dell'europio è quello stesso altre volte descritto <sup>(4)</sup>. Per la ripresa

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Chimica generale della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Questi « Rendiconti », (6), 17, 1092, 1933.

(4) Questi « Rendiconti », (6), 15, 83, 1932.



- 6018,18
- Na
- 5765,18
- 5645,78
- 5452,95 ?
- 4661,90
- 4627,26
- 4594,06
- 4522,26



- 4522,26
- 4435,54
- 4205,03
- 4129,72
- 3971,95
- 3930,51
- 3907,10
- 3819,64
- 3724,97
- 3688,42



dei fotogrammi il prof. Rolla mi ha gentilmente concesso l'uso dello spettrografo Hilger E. 1, esistente nel suo Istituto. La regione fotografata è compresa fra  $\lambda 8000$  e  $\lambda 3200$ , ma la parte utile per lo studio va solamente da  $\lambda 8000$  a  $\lambda 3500$ ; oltre  $\lambda 3500$  lo spettro è invaso dalle bande, ben risolte in righe, del radicale OH. La fiamma dell'eupropio brilla di un bellissimo color rosso vivo.

Riporto nella tabella I le lunghezze d'onda delle righe registrate, le intensità presentate nella fiamma, nell'arco e nella scintilla (valutate secondo una scala arbitraria) e per le righe che sono state classificate <sup>(1)</sup> anche il tipo di atomo emettente.

Accanto ad intensissime righe di Eu. I si notano numerose righe di Eu. II, assai più deboli ma sempre discretamente intense. La presenza di queste righe in spettri emessi a temperatura molto modesta ( $2500^\circ$  assoluti circa) conferma che il potenziale d'ionizzazione dell'eupropio è molto basso.

Fra  $\lambda 6630$  e  $\lambda 6180$ ,  $\lambda 6010$  e  $\lambda 5950$ , si notano brillanti gruppi di bande. Sono questi che impartiscono alla fiamma la bella colorazione rossa. Altri gruppi più deboli si notano in tutta la regione rossa, arancione e gialla e fra  $\lambda 5530$  e  $\lambda 5490$ . Una testa di banda isolata si trova inoltre a  $\lambda 4720$ . Credo che questa sia la prima volta che è stato osservato lo spettro di bande emesso dal vapore di ossido d'eupropio. Di questo spettro darò notizia in una prossima Nota.

#### LA PERSISTENZA DELLE RIGHE DI FIAMMA DELL'EUPROPIO.

Servendomi del solito dispositivo di fiamma, ho ripreso vari fotogrammi relativi a soluzioni acquose di nitrato di eupropio contenenti; 1 : 100, 1 : 1.000, 1 : 10.000, 1 : 100.000, 1 : 1.000.000 di eupropio, espresso come ossido, al piccolo spettrografo Hilger D. 2 del nostro Istituto. Le lastre comprendono soltanto la regione visibile.

Alla concentrazione di 1 : 100 appaiono intensissime le tre righe  $\lambda 4661.89$ ,  $\lambda 4627.26$ ,  $\lambda 4594.07$ , dovute ad Eu. I; molto meno intense appaiono invece le due righe ultime  $\lambda 4205.03$  e  $\lambda 4129.72$ , dovute ad Eu. II. All'aumentare della diluizione le righe di Eu. I diminuiscono rapidamente d'intensità; molto meno rapidamente diminuiscono invece le righe di Eu. II, tanto che alla concentrazione di 1 : 10.000 le intensità delle righe di Eu. I e di Eu. II appaiono uguali. A 1 : 100.000 tutte le righe scompaiono, si potrebbe dire quasi improvvisamente.

Ho immaginato che tutto ciò potesse esser la conseguenza di uno spostamento dell'equilibrio di ionizzazione:  $\text{Eu} = \text{Eu}^+ + \text{elettrone}$ , dovuto all'aumentare della diluizione. La reazione soprascritta decorre da sinistra a

(1) A. S. KING, « Astr. Jour. », 72, 373 1930; W. ALBERTSON, « Phys. Rev. », 45, 499, 1934; N. N. RUSSELL e A. S. KING, « Phys. Rev. », 46, 1023, 1934.

TABELLA I.

$\lambda$ I. A	Intensità			OSSERVAZIONI
	fiamma	arco	scintilla	
3334.32	0	5	2	Eu?
3688.42	1	10	10	Eu. II
3724.97	2	10	10	Eu. II
3819.64	4	10	10	Eu. II
3907.10	2	10	10	Eu. II
3930.51	2	10	10	Eu. II
3971.95	2	10	10	Eu. II
4129.72	4	10	10	Eu. II riga ultima
4205.03	4	10	10	Eu. II riga ultima
4435.54	2	10	10	Eu. II
4522.56	1	10	10	Eu. II
4594.07	10	10	10	Eu. I riga di fiamma
4627.26	10	10	10	Eu. I riga di fiamma
4661.89	10	10	10	Eu. I riga di fiamma
4720	—	—	—	testa di una banda sfumata verso il rosso
5452	00	—	—	forse Eu. 5452.95-5451.52?
5490	—	—	—	bande poco intense
5530	—	—	—	
5645.78	2	6	1	non è stata classificata ma appartiene evidentemente a Eu. I
5680	—	—	—	—
5765.18	3	6	2	non è stata classificata ma appartiene evidentemente a Eu. I
5950	—	—	—	bande molto brillanti
6010	—	—	—	
6018.18	3	8	3	Eu. I
6083.89	1	10	1	riga atomica o testa di banda?
6180	—	—	—	bande brillanti
6630	—	—	—	
6850	—	—	—	

bande poco intense



destra con aumento del numero di particelle ed è quindi fortemente influenzata da variazioni di volume. A diluizione crescente diminuisce la percentuale degli atomi neutri e cresce quella degli atomi ionizzati e di conseguenza l'intensità delle righe di Eu. I diminuisce più rapidamente di quello che non comporti il solo l'aumento di diluizione. Il contrario accade per le righe di Eu II. Bisogna ricordare che il potenziale d'ionizzazione dell'europio è molto basso (5.64 volta)<sup>(1)</sup> e che l'ionizzazione diviene sensibile anche a temperature modeste.

Ho pensato allora di evitare l'ionizzazione dell'europio, aggiungendo alle soluzioni un poco di nitrato potassico. Il potassio ha un potenziale d'ionizzazione inferiore a quello dell'europio (4.32 volta) ed è perciò capace di generare una quantità tale di elettroni da far retrocedere completamente, per azione di massa, la dissociazione dell'europio.

Ripreso nuovi spettrogrammi delle soluzioni così modificate, ho potuto constatare la completa scomparsa delle righe di Eu. II e la persistenza delle tre righe di fiamma di Eu. I anche alla concentrazione di 1 : 100.000.

A questa concentrazione, le tre righe, che in condizioni normali appaiono almeno ad occhio della stessa intensità, presentano invece intensità alquanto diverse. La più intensa è la riga  $\lambda 4594.07$ , seguono in ordine le righe  $\lambda 4627.26$  e  $\lambda 4661.89$ .

La retrocessione dell'ionizzazione dell'europio può avvenire spontaneamente, senza introdurre potassio od altri elementi a basso potenziale critico, quando si hanno più elementi in presenza, anche allo stato di impurezza, come accade sovente durante le operazioni di frazionamento.

Nel caso dell'europio la sensibilità del metodo degli spettri di bassa eccitazione si dimostra veramente ottima. Essa supera di dieci volte quella dei metodi roentgenografici.

In questa ricerca ho tenuto i tempi di posa entro limiti del tutto normali, da 20 a 50 minuti.

In altra Nota riferirò sugli effetti, dovuti alla presenza del potassio, sulle righe dell'europio.

(1) H. N. RUSSELL e A. S. KING, loc. cit.

**Petrografia.** — *Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorum)*<sup>(1)</sup>. Nota II di P. COMUCCI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. P. ALOISI.

In una precedente Nota<sup>(3)</sup> ho comunicato la composizione mineralogica di tre campioni raccolti nella regione del ghiacciaio Baltoro, e la composizione chimica di due di essi. Qui discuto più ampiamente i risultati ottenuti, e riporto perciò le formule magmatiche e la composizione virtuale, relative ai campioni n. 230 e n. 104.

Formula magmatica secondo il Niggli:

	si	ti	al	fm	c	alk	k	mg	c/fm
N. 230	127.57	6.93	17.57	32.79	30.65	18.99	0.85	0.58	0.93
N. 104	124.77	2.88	13.51	49.01	21.85	15.65	0.82	0.71	0.44

Formula magmatica secondo l'Osann:

	S	A	C	F	a	c	f	n	P <sub>2</sub> O <sub>5</sub>
N. 230	57.33	8.10	—	25.92	7.14	—	22.86	1.4	0.54
N. 104	56.38	6.90	—	29.42	5.70	—	24.30	2	0.40

*Composizione virtuale:*

	N. 230	N. 104		N. 230	N. 104
Quarzo	—	0.53	Olivina	4.10	—
Ortose	51.59	47.37	Magnetite	—	2.36
Albite	—	1.93	Ematite	2.5	21.10
Leucite	2.70	—	Ilmenite	5.16	2.89
Nefelina	2.47	—	Rutilo	0.54	—
Fluorite	0.17	0.17	Apatite	2.58	1.98
Acmite	4.02	6.47	Calcite	10.06	12.21
Diopside	12.85	—	Magnesite	—	0.60
Iperstene	—	22.38			
				98.76	99.99
H <sub>2</sub> O . . . . .				1.35	0.49
				100.11	100.48

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Mineralogia della R. Università di Firenze.

(2) Nella seduta del 4 giugno 1937.

(3) Questi « Rendiconti », vol. XXV, fasc. 11, p. 648.

Nelle formule del Niggli si nota una sconcordanza fra i valori di *fm* e *c* per i due campioni; ciò dipende, come ho accennato nella Nota precedente, dai diversi percenti dell'ossido di magnesio, in quanto nella formula del Niggli gli ossidi di magnesio e di calcio sono separati. Nelle formule dell'Osann, ove tale separazione non si fa, torna l'accordo, ma queste formule si prestano anche per mettere in evidenza il tratto caratteristico del basso contenuto di allumina, poichè non solo non avanza di questa per fare il gruppo C, ma non basta nemmeno per assorbire gli ossidi alcalini, per cui si deve supplire per mezzo dell'ossido ferrico in ambedue i casi. È quindi confermata l'analogia chimica, già risultata dall'ispezione complessiva dell'analisi.

Si tratta evidentemente di termini della serie potassica, nel medesimo tempo poveri di *al* e con *fm* alto, carattere che si verifica nel gruppo delle missouriti. Non essendovi però soddisfacente corrispondenza numerica, non si possono le rocce qui considerate includere in quel tipo; e la conclusione non muta, se si tien conto della composizione mineralogica, per esempio con feldispatoidi nelle missouriti. Qui sotto sono riportate le formule magmatiche secondo il Niggli dopo avere defalcato il carbonato di calcio:

	si	ti	al	fm	e	alk	k	mg	c/fm
N. 230	152.62	7.94	21.02	39.23	17.04	22.71	0.85	0.58	0.43
N. 104	155.61	3.59	16.83	61.06	2.61	19.49	0.82	0.71	0.04

Per il n. 230 si ha un discreto accordo con il gruppo della wyomingite, sotto-divisione delle missouriti, mentre la formula del n. 104 diviene del tutto anomala. Siccome le due rocce non si possono separare per la corrispondenza di giacitura, corrispondenza chimica e corrispondenza mineralogica, non si può accettare una soluzione unilaterale, che cioè valga per l'una e non per l'altra, e perciò è da ritenere fallito il tentativo, del resto discutibile, di considerare il carbonato di calcio epigenetico su rocce di carattere noto.

Al contrario, la quantità ragguardevole di calcite (superiore sempre al 10 %) unita alla freschezza relativa della roccia, specialmente notevole nel campione n. 104, le inclusioni della calcite nei feldispati, per il resto inalterati, e la sua struttura di riempimento uniforme mi persuadono a ritenerla di formazione, almeno per la parte maggiore, originaria. Questa opinione non trova molto assentimento fra i petrografi, come è noto; è sostenuta però da autorevoli studiosi, e si sa che esiste anche il nome del tipo, le carbonatiti. Il dibattito su una questione, in fondo sperimentale, vuole significare che il più delle volte la calcite è nelle rocce realmente secondaria, ma in qualche caso non si è potuto fare a meno di ammettere il contrario: dal lato speculativo si sa bene che la cosa è certamente pos-

sibile. Il presente è dunque uno dei casi, in cui la possibilità appare sperimentalmente avverata.

Anche la mica predominante ha caratteri particolari, che la separano dalla biotite, pure esistendo delle relazioni con questa, come il concrescimento e forse la trasformazione in biotite. Vien fatto di pensare alla flo-gopite, che pure ha pleocroismo debole, e si trova nei calcari di contatto. Peraltro, nelle frequenti sezioni basali non si è potuto osservare una differenza apprezzabile di pleocroismo fra  $\beta$  e  $\gamma$ , e l'angolo degli assi ottici non solo è piccolo, o anche molto piccolo, ma sembra addirittura uguale a zero. Si aggiunga poi il contenuto molto basso di fluoro risultato all'analisi, dalla quale anche appare probabile in questa mica un contenuto non trascurabile di potassio. Da questa mica deve probabilmente essere influenzato il per cento di ferro, con diminuzione in corrispondenza dell'alluminio, basso in queste rocce in modo degno di rilievo.

La supposta presenza di calcite originaria porta a fare altre considerazioni sulla composizione mineralogica. È noto con quanta facilità reagisca il carbonato di calcio nei processi chimici interni; basta ricordare l'andamento dei filoni nei calcari. La calcite originaria nelle rocce si considera ordinariamente come risultato di assimilazione e, nei casi ove ciò è stato verificato, si trova un abbassamento generale di acidità. Invece dei feldispati appaiono i feldispatoidi, i silicati scendono a metasilicati se non ad ortosilicati, essendo la basicità portata dall'ossido di calcio del calcare. Il processo può arrivare fino all'ultimo stadio della scomparsa totale della calcite, anzi vi arriva effettivamente il più delle volte, da cui la rarità di carbonato di calcio primario. Così si suppone essere avvenuto per rocce melilitiche, o quando un vulcano, per esempio il Vesuvio, dopo essere arrivato allo stadio di lave trachitiche, che dovrebbe chiudere il ciclo, torna ad eruttare larve basiche. Qui invece l'acidità è relativamente notevole, fino ad avere quarzo virtuale, ed il feldispato, non solo vi esiste di fatto, ma anche, diciamo, di diritto, perchè pure la composizione virtuale, a questo scopo calcolata, risulta chiaramente feldispatica, e perciò il feldispato non è, per così dire, razionale. Non insisto su considerazioni speculative, qui fuor di luogo, sopra un caso isolato e non troppo noto geologicamente.

Rocce con composizione alquanto anomala, come queste, non possono che includersi nei gruppi detti «schizoliti» o rocce di segmentazione, che abbracciano le apliti e i lamprofiri con carattere, rispettivamente, acido e basico melonocratico. Naturalmente nel mio caso son da scegliere i lamprofiri in senso largo, in quanto si tratta di rocce che sembrano realmente filoniane, e non sono da comprendere nelle due categorie energicamente respinte, da P. Beger, dai lamprofiri, cioè le rocce effusive lamprofiriche del Rosenbusch e le facies marginali basiche.

Come conclusione, il carattere chimico e mineralogico mi sembrano giustificare per queste rocce una posizione separata, fino a farne un'unità



tassonomica e proporrei per essa la denominazione di *baltorite* dal nome del ghiacciaio ben noto, ove furono raccolte.

Siccome io sono in realtà in contraddizione con me stesso, in quanto approvo coloro che deplorano la continua creazione di nuove specie petrografiche, mi sia permesso di dare alcune spiegazioni che, senza pretendere di essere originali, saranno anzi, direi, abbastanza ovvie.

Il numero delle specie biologiche della parte della terra esplorata o non esplorata naturalisticamente, è certo dell'ordine del milione, quindi appaiono esagerate le apprensioni di chi considera eccessive quelle centinaia o forse migliaia di tipi di rocce regolarmente catalogate: vi deve pure essere corrispondenza fra i regni della natura! Però è profonda la differenza di criterio: in biologia il carattere specifico ha un fondamento, in teoria, ben delimitato, l'ereditarietà e la fecondazione scambievolmente o no. Nel caso delle rocce non esiste niente di simile per definire la specie, e al carattere differenziale, mancando una vera valutazione oggettiva, si dà talora un peso soggettivo.

Una roccia rappresenta un equilibrio, o anche quello che si dice « falso equilibrio », fra fattori che supponiamo pure tutti cognitivi, ma da considerare come variabili indipendenti, le cui combinazioni esorbitano certo dalla possibilità ordinativa dell'intelletto umano. Quindi una roccia è uno dei fatti naturali che si chiamano casuali o accidentali, non potendo, fra tutte le possibilità, essere preveduti *a priori*. Ma, essendo indiscusso che due fatti naturali qualunque non saranno mai assolutamente uguali, la suddivisione delle rocce si può spingere innanzi indefinitamente, senza ledere il principio della scienza sperimentale, che pretende appunto la minuta conoscenza di ogni singolo fatto.

Limitandomi alle rocce eruttive, la tassonomia petrografica ha oggi raggiunto un'alta perfezione. Sorpassato da tempo il periodo qualitativo, essa si fonda sulla composizione, quantitativamente determinata, o chimica o mineralogica, questa secondo la proporzione dei minerali, presunti o virtuali, o anche determinati sperimentalmente; due criteri comunemente accettati, e che meritano la nostra considerazione. Ogni nuova classificazione deve essere accolta con piacere e rispetto, perchè contiene sempre nuovi raffronti preziosi ed acuti, ma anche con scetticismo riguardo al suo fine, scetticismo giustificato dal fatto che si ha ormai una serie di ricercatori tutti valenti, che tentano successivamente di correggere o almeno migliorare l'opera dei predecessori. La continuità numerica, variante in queste classificazioni con regolarità fra i limiti tassonomici, dà ai più l'illusione di una tranquilla sicurezza. Il difetto sta appunto in questa regolare continuità.

Il vecchio adagio: *Natura non facit saltus*, come tutte le sentenze proverbiali, contiene soltanto una verità molto relativa. Sta di fatto che alla



base delle scienze sperimentali si è invece trovato una discontinuità fenomenica, variamente spiegata o non spiegata: la legge delle proporzioni multiple in chimica, la legge di Hauy in mineralogia, poi la teoria dei quanta, la struttura discontinua dell'atomo. Questo potrebbe rappresentare la conseguenza del principio che, dei casi possibili, in teoria tutti possono avvenire, ma in pratica avvengono *solamente* quelli più probabili: e così il metodo statistico diventa un ottimo criterio di ricerca, ed anche l'entropia ha trovato la sua espressione come funzione della probabilità.

Nei nostri riguardi diremo che non si formano tutte le rocce possibili, ma quelle più probabili nelle condizioni fisiche della cresta terrestre, e intorno a grossi nuclei di rocce estremamente frequenti, si ha un'aureola di rocce interessanti sì, ma di eccezione. Gli ordinamenti quantitativi, per necessità del criterio stesso in prevalenza numerico, pongono, logicamente dal loro punto di vista, tutti questi membri su di un medesimo piano, e a tutti danno l'apparenza di uguale possibilità di esistere, il che evidentemente non corrisponde al quadro naturale. Mentre le rocce feldispatiche sono la grande maggioranza, e le feldispatoidi la minoranza, in una classificazione potranno comparire le une e le altre come rami dello stesso valore, e i magmi granitici normali e dioritici normali saranno allo stesso rango con il magma missouritico.

È giustificato dunque che certi petrografi siano impressionati, non tanto dal numero delle specie (il che non avviene nemmeno ai biologi, che ne avrebbero maggior ragione), quanto dal crescere indefinito delle suddivisioni equipollenti: quistione di gerarchia.

A questo punto mi accorgo però di avere trovato la via di uscita per il caso mio, e ne approfitto: io proporrei dunque non il tipo « baltorite » ma il caso « baltorite » e prego di non darvi soverchia importanza.

**Geologia.** — *Sull'estensione dell'Oligocene nella regione a nord-est del Gruppo del Monte Judica (province di Catania ed Enna)* <sup>(1)</sup>. Nota di E. MARCHESINI, presentata <sup>(2)</sup> dal Corrisp. G. CHECCHIA-RISPOLI.

Durante alcuni rilevamenti effettuati per conto dell'A. G. I. P., ho avuto occasione di rinvenire fossili tipicamente oligocenici in un complesso che, per la sua potenza e per l'estensione degli affioramenti, ha notevole importanza in questa regione.

Questa comunicazione appare giustificata dalle ancora scarse conoscenze sull'Oligocene della Sicilia Orientale.

Accennando sommariamente a quanto oggi è noto, ricordo la Nota del prof. G. Checchia Rispoli <sup>(3)</sup>, nella quale vengono segnalate le seguenti forme, provenienti dalle argille scure di Reg.<sup>ne</sup> Paraspora a nord del M. Scalpello:

*Operculina complanata*, Defr.

*Heterostegina reticulata*, Rüttn.

*Nummulites Boucheri*, De La Harpe.

*Nummulites vasca*, Joly e Leym.

*Amphistegina* cfr. *Niasi*, Verbeek sp.

*Lepidocyclina dilatata*, Micht. sp.

*Lepidocyclina marginata*, Micht. sp.

*Lepidocyclina Tournoueri*, Lem. e Douv.

*Orthophragmina Di-Stefanoi*, Ch. Risp.

*Gypsina globulus*, Reuss.

Le argille di R.<sup>ne</sup> Paraspora giacciono sul Bartoniano <sup>(4)</sup>.

Nella Valle del Dittáino, all'altezza circa di Catenanuova, affiora sull'Eocene a facies di Flysch ed al di sotto delle argille del Miocene, in concordanza almeno apparente con queste ultime, una serie di argille generalmente di color cioccolato o grigio scuro con arenarie giallastre, che sono state il più delle volte confuse con le argille ed arenarie del Miocene medio. Fanno

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Geologico della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 20 giugno 1937.

(3) G. CHECCHIA-RISPOLI, *Sull'esistenza dell'Oligocene nella regione del Monte Judica*. (« Rendiconti R. Accademia dei Lincei », Classe scienze fisiche, matematiche e naturali, vol. XIX, 1° sem., ser. 5<sup>a</sup>, pp. 548-551, 1910).

(4) Sulla fauna di questo Bartoniano V. G. CHECCHIA-RISPOLI, *I Foraminiferi eocenici del Gruppo del M. Judica e dei dintorni di Catena nuova*. (« Boll. della Soc. Geol. Ital. », vol. XXIII, p. 25, 1904).

parte di questo complesso le argille scure con la fauna riportata più sopra nella Nota del Checchia Rispoli. Esse si spingono, in vaste ondulazioni, spesso erose anticamente e ricoperte in trasgressione da sedimenti del Miocene superiore e del Pliocene verso Nord e Nord-Est, per ricomparire nelle valli del Salso e del Simeto in affioramenti assai vasti, in cui mostrano talvolta spessori notevoli.

In realtà i caratteri litologici di questo complesso e soprattutto quelli delle arenarie che vi sono associate possono bene spesso confondersi con quelli comuni sia ad arenarie quarzose eoceniche che, in minore misura, a quelle associate al Tortoniano s. l.

L'unità stratigrafica del descritto complesso può venire ora affermata in base al nuovo ritrovamento di fossili caratteristici negli affioramenti presso la confluenza del Salso col Simeto e precisamente al « Castelluzzo di Spanò » sulla destra del Simeto di fronte ad Adrano.

Le specie determinate finora sono le seguenti:

*Nummulites intermedius* — *Fichteli*,

*Nummulites vascus* — *Boucheri*.

Esse sono rappresentate da numerosi esemplari sparsi nelle argille marnose grigio-brune, fragili, zeppe di microforaminiferi, fra i quali prevalgono forme dei gruppi: *Rotalia*, *Globigerina*, *Orbulina*, *Miliola*, ecc. Vi figurano pure con una certa frequenza piccole *Lepidocyclina* che, almeno per la forma delle camere, sembrano potersi riferire al s. gen. *Polylepidina* Waughan.

Queste argille, poco più sopra, presentano passaggi alla colorazione intensa tabacco-scuio, che è loro più comune. Alternano con esse arenarie quarzose, talvolta a grosse lenti, che mostrano passaggio a puddinghe color giallo rossiccio, spesso facilmente sgretolabili, nelle quali gli elementi sono tutti o quasi di rocce cristalline con poca mica. In queste arenarie, al M. Seggio, al M. Costa Catena ed in altri luoghi, abbondano i resti di bivalvi (per lo più *Ostrea*), dei Cirripedi e denti di pesci (*Odontaspis*); generalmente però tali resti sono così frantumati da non permettere una sicura determinazione. Verso la base compaiono pure intercalazioni arenaceo-calcaree con rari microforaminiferi.

Ciò che appare degno di rilievo nella zona in cui sono stati rinvenuti i fossili, è la posizione di questo termine oligocenico rispetto ai sottostanti sedimenti a *facies* di Flysch, corrispondenti al Bartoniano studiato dal Checchia-Rispoli nella Valle del Dittaino (v. loc. cit.).

Salendo al Castelluzzo dal Ponte Saraceno sul Simeto a Nord di Adrano, è possibile rendersi conto della notevolissima discordanza fra il Bartoniano e l'Oligocene. Infatti, mentre gli strati oligocenici disegnano una piega che, a parte gli arricciamenti e le dislocazioni localizzate, presenta una notevole regolarità, il sottostante Flysch eocenico appare per lo più in strati verti-

cali e talvolta addirittura rovesciati, per quanto sempre con inclinazioni non molto lontane dalla verticale.

Per stabilire l'estensione superficiale di questo importante termine oligocenico occorreranno ancora parecchie osservazioni di campagna; basti qui notare come esso si spinga dalla zona del Castelluzzo fino alle Case Spanò verso Nord, ove il Flysch eocenico vi si accavalla sopra per effetto di una faglia inversa; verso Ovest e Nord-Ovest si spinge al di là del « Fiume di sotto Troina », sulla sinistra del Salso, nel cui letto affiora pure presso la confluenza col Simeto, finchè alla altezza circa del Ponte Barca di Biancavilla, viene ricoperto con aspetto di concordanza da argille grigie del Miocene.

I dati fino ad oggi raccolti sul terreno mi spingono a ritenere che questo bene individuato termine stratigrafico, compreso fra le argille grigie Mioceniche ed il Bartoniano a *facies* di Flysch si sia depositato, nella regione, su di una superficie topografica irregolare e quindi in trasgressione. Benchè sia con qualche riserva che esprimo tale opinione, cito in appoggio i fatti seguenti:

1° La discordanza col Bartoniano osservata al Castelluzzo di Spanò.

2° La mancanza di Flysch eocenico fra l'Oligocene ed il Trias alle spalle Nord del M. Scalpello: mancanza difficilmente attribuibile per intero a fatti tettonici, soprattutto per la posizione in cui riappare nel letto stesso del Dittaino e sotto l'Oligocene, il Flysch eocenico.

3° Presso il M. Costa Catena, sulla destra del Simeto, di fronte a Biancavilla, in una parte piuttosto elevata della serie oligocenica, compaiono argille ed arenarie a *Lepidocycline* molto simili a quelle che, nella Valle del Dittaino, sembrano giacere direttamente sull'Eocene.

Naturalmente l'ultimo argomento potrebbe essere infirmato dal dubbio che la prevalenza di *Lepidocycline* o di *Nummuliti*, cioè le differenze fra la faunula del Castelluzzo e quella di R.<sup>ne</sup> Paraspora e M. Costa Catena, possano riferirsi per intero a caratteristiche puramente ambientali e localizzate, indipendentemente dalla posizione stratigrafica, nell'interno della serie oligocenica.



**Fisiologia.** — *Ricerche sulle modificazioni istologiche della tiroide nella cavia durante il ciclo dell'estro*<sup>(1)</sup>. Nota di T. PERRI, presentata<sup>(2)</sup> dal Corrisp. S. BAGLIONI.

Diversi Autori hanno posto in evidenza, che la tiroide subisce modificazioni nella sua struttura istologica, in rapporto con numerose condizioni fisiologiche e sperimentali. Tra le prime ricordo la gravidanza in Mammiferi (L. Bernard); la metamorfosi negli Anfibi (Uhlenhuth); il variare delle stagioni negli Uccelli anche in rapporto con l'epoca di deposizione delle uova (Riddle e collaboratori); la muta del piumaggio negli Uccelli (Benazzi); ecc. Di condizioni sperimentali se ne conoscono già molte; particolare importanza hanno le ricerche condotte con iniezioni di estratti del lobo anteriore dell'ipofisi, che hanno molto chiarito il meccanismo di svuotamento della colloide.

L'espressione di quadro istologico dell'iperfunzione tiroidea è generalmente usata per indicare, che nel follicolo l'epitelio è alto e la colloide è molto vacuolizzata o assente; e per quadro istologico dell'ipofunzione si intende invece, che l'epitelio è appiattito e la colloide è abbondante e scarsamente vacuolizzata. Nel corso del lavoro userò anch'io detti termini nel senso indicato; pur rendendomi conto, che molto ancora rimane da indagare e precisare.

Per quanto riguarda le modificazioni istologiche, che subisce la tiroide nel corso della gravidanza, già alcuni utili dati risultano dai lavori di Ciulla, Cesniglia ed altri. L. Bernard<sup>(3)</sup> ha dimostrato, nel 1927, l'esistenza, nella cagna, di un ciclo gravidico della tiroide. Egli infatti ha trovato, che si ha il quadro dell'ipertiroidia al principio della gravidanza; l'attività è minore dal 12° al 32° giorno e poi aumenta per raggiungere un massimo al momento del parto; dopo il funzionamento diminuisce, per aversi una nuova attività durante l'allattamento. Il Florentin (ved. la citazione di Benazzi)<sup>(4)</sup> ha successivamente studiato il ciclo della tiroide nella gravidanza della cavia; egli ha visto, che le modificazioni sono scarse fino al 20° giorno; dalla 3ª settimana l'intensità aumenta per raggiungere un massimo verso la fine

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto di Anatomia ed Embriologia comparate, e nell'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Roma.

(2) Nella seduta del 21 marzo 1937.

(3) «Rev. Franc. d'Endocrin.», vol. 5, 1927.

(4) «Arch. It. d'Anat. ed Embr.», vol. 32, 1934.



della gravidanza; poi declina, e al parto e durante l'allattamento la tiroide riprende il suo aspetto normale. Verdozzi <sup>(1)</sup> trova, che nella cavia si hanno due cicli uguali, uno in ciascun mese di gravidanza; nella prima metà trova epitelio cubico, nella seconda epitelio appiattito.

Krijlow e Sternberg <sup>(2)</sup>, nella coniglia in gravidanza, hanno descritto un ciclo della tiroide, che presenta molte somiglianze con quello trovato dal Bernard nella cagna. Essi hanno inoltre esteso le loro ricerche a coniglie in pseudogravidanza, ponendo in rilievo che la tiroide subisce fundamentalmente le stesse modificazioni, solo che avvengono in un periodo di tempo più breve. È a questo proposito da ricordare, che modificazioni subite dall'organismo nella gravidanza sono state poste in evidenza da numerosi Autori anche nella pseudogravidanza. Fasella <sup>(3)</sup> ha esaminato le tiroidi di alcune cavie femmine, senza tener conto del ciclo dell'estro, ed ha notato in ciascuna ghiandola follicoli a diverso stadio del ciclo secretorio.

Da recenti ricerche risulta che l'ipofisi subisce, in rapporto con il ciclo dell'estro, modificazioni nella sua struttura istologica e nel suo potere di stimolare l'ovaia.

Prima di terminare questo breve cenno storico, desidero ricordare essere stato posto in evidenza (Aron) <sup>(4)</sup>, che nella cavia esistono modificazioni istologiche della tiroide in rapporto con l'età. Nelle primissime settimane di vita vi è ipoattività; successivamente la tiroide assume l'aspetto di normale attività, per poi di nuovo, nell'età avanzata, presentare i segni della ipoattività.

Mi è sembrato utile indagare nella cavia l'esistenza o meno di modificazioni costanti della tiroide nel ciclo dell'estro, per varie considerazioni. Una di queste è l'interesse di conoscere, come la tiroide si comporti in una condizione fisiologica così importante; un'altra è, che i risultati ottenuti avrebbero potuto permettere un'adeguata comparazione con quanto avviene in gravidanza, e questo rappresenta un passo avanti, rispetto a ciò che è stato fatto da Krijlow e Sternberg.

Ho esaminato 15 cavie (*Cavia cobaya*) <sup>(5)</sup>. L'età è stata sui 4 mesi. Rispetto al ciclo dell'estro ho indagato la struttura della tiroide nei cinque giorni precedenti l'ovulazione e nei cinque seguenti, ripromettendomi di far

(1) « Policlinico » (Sez. Medica), Anno 38°, 1931; « Ricerche di Morfologia », vol. 14, 1933-1934.

(2) « Endokrinologie », vol. 10, 1932.

(3) « Ricerche di Morfologia », 1934.

(4) « C. R. Soc. de Biol. », vol. 105, pp. 581-584.

(5) Le cavie sono state sacrificate con cloroformio, e le tiroidi sono state fissate in Zenker formolico o acetico, o in Bouin acetico (soluzione acquosa saturata di acido picrico, p. 75, formalina al 40 %, p. 25, acido acetico, al momento dell'uso, p. 5). Iniezione in paraffina. Colorazione delle sezioni, dello spessore di 6-8  $\mu$ , con ematossilina Carazzi ed eosina.

seguire lo studio dalla 6<sup>a</sup> alla 10<sup>a</sup> giornata del ciclo. In queste prime ricerche ho avuto particolarmente di mira il raggiungere la sicurezza che un ciclo esista. La giornata del ciclo dell'estro l'ho dedotta dall'apertura dell'ostio vaginale, che precede l'ovulazione di alcune ore, come risulta pure da mie osservazioni. Per ciascuna cavia mi sono prima assicurato regolarità dei cicli. Com'è ben noto la cavia è animale ad ovulazione spontanea e periodica, in essa il ciclo oscilla da 15 a 16  $\frac{1}{2}$  giorni.

Vediamo ora i risultati.

È noto da ricerche di svariati Autori, che nella tiroide di cavia esistono follicoli a cellule cubiche, follicoli a cellule appiattite, follicoli a cellule turgescenti, con i vari gradi di passaggio.

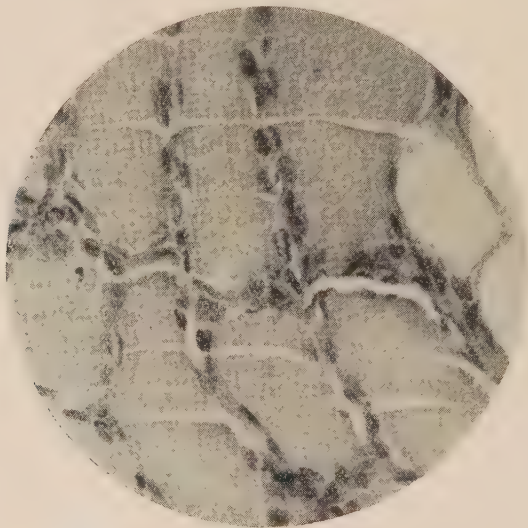


Fig. 1. — Tiroide di cavia (Cavia n. 2, 1936) sacrificata in prima giornata del ciclo dell'estro. Si noti l'appiattimento dell'epitelio follicolare. (Microfot. obb. 6, oc. 4 Koristka).

Io ho trovato, che, in 11<sup>a</sup> giornata del ciclo dell'estro, i follicoli sono ad epitelio cubico, o, in minor numero, ad epitelio lievemente appiattito; sono scarsi quelli ad epitelio turgescente. In 12<sup>a</sup> giornata (3 casi) comincia a prevalere l'epitelio lievemente appiattito, e ciò è più evidente in 13<sup>a</sup> giornata. In 14<sup>a</sup> giornata (2 casi) i follicoli sono, nella grande maggioranza, a cellule appiattite, ed in alcuni anche i nuclei sono di forma nettamente ovale; i follicoli ad epitelio cubico sono pochi e pochissimi quelli ad epitelio turgescente. In 15<sup>a</sup> giornata è diminuito ancora di più il numero dei follicoli ad epitelio cubico, e l'appiattimento è maggiore. In una cavia sacrificata al momento dell'ovulazione ed in un'altra alla prima giornata del ciclo dell'estro (ved. fig. 1) ho avuto con grande chiarezza il quadro isto-

logico di follicoli con epitelio a cellule assai appiattite ed in parte anche endoteliforme, con scarsissimo numero di follicoli con epitelio a cellule cubiche ed assenza pressochè assoluta di quelli ad epitelio turgesciente. L'appiattimento della cellula è sempre più evidente per il citoplasma che per il nucleo, però anche questo giunge ad essere ovale od anche nettamente appiattito.

Adunque, andando dall'11<sup>a</sup> giornata del ciclo dell'estro ad un giorno dopo l'ovulazione, avviene un progressivo appiattimento dell'epitelio follicolare.

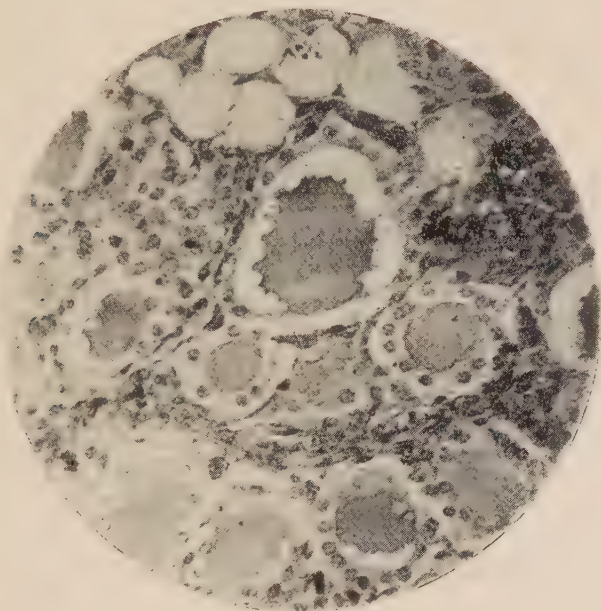


Fig. 2. - Tiroide di cavia (Cavia n. 17, 1936) sacrificata 4 giorni dopo l'ovulazione. Si noti l'altezza dell'epitelio follicolare. (Microfot. obb. 6 Koristka).

Esaminando ora le cavia (2 casi) sacrificate nella 2<sup>a</sup> giornata del ciclo dell'estro, si ha che il quadro istologico della ghiandola è nettamente modificato; infatti i follicoli a cellule cubiche sono in numero maggiore di quelli a cellule appiattite, e sono inoltre numerosi i follicoli a cellule turgesci. Nelle cavia sacrificate 3-4-5 giorni dopo l'ovulazione, il quadro istologico presenta: un piccolo numero di follicoli a cellule lievemente appiattite, la maggior parte sono a cellule cubiche e a cellule alte, e si ha pure un notevole numero di follicoli con epitelio a cellule turgesci (ved. fig. 2).

Per il comportamento della colloide non ho potuto per ora trarre sicure deduzioni. Mi limito a notare, che pure nei miei casi essa è abbondante e poco vacuolizzata nei follicoli a cellule appiattite, il contrario in quelle a cellule alte.

*Considerazioni.* — Dai risultati esposti si è visto, che, esaminando comparativamente le tiroidi di cavia sacrificate in giornate successive del ciclo dell'estro, si osservano modificazioni progressive della struttura-istologica di detta ghiandola. Infatti dall'11<sup>a</sup> giornata del ciclo dell'estro fino all'ovulazione si assiste ad un graduale appiattimento delle cellule dell'epitelio follicolare; e andando poi dall'ovulazione fino alla 5<sup>a</sup> giornata si assiste invece ad un innalzamento ed inturgidimento di esse. Inoltre, sacrificando varie cavia in una stessa giornata del ciclo dell'estro si ha, che queste tiroidi presentano lo stesso quadro istologico: ciò mostra la costanza di queste modificazioni. Si può adunque concludere, che, nell'evolversi del ciclo dell'estro, la struttura istologica della tiroide costantemente e progressivamente varia, compiendo un ciclo secretorio.

Mi limito per ora a queste considerazioni; di che natura sia poi il rapporto tra ciclo secretorio della tiroide e quello dell'estro, sarà oggetto di successive ricerche. Mi riprometto, come ho già detto, di continuare queste ricerche; esaminando dalla 6<sup>a</sup> alla 10<sup>a</sup> giornata del ciclo dell'estro; dato il dianzi accennato interesse che, può presentare il raffronto tra le modificazioni della tiroide nel ciclo dell'estro e quelle nella gravidanza.

*Riassumendo:* Nella cavia femmina si è dimostrato l'esistenza di un ciclo secretorio della ghiandola tiroide, della stessa durata e coincidente con il ciclo dell'estro.

N. P.



# INDICE DEL VOLUME XXV, SERIE VI. — RENDICONTI

Primo Semestre 1937.

## INDICE PER AUTORI

### A

- ABETTI G. — « Altezza della cromosfera nel 1936 ed andamento del ciclo solare ». 253.
- AGAMENNONE G. — « I risultati scientifici d'una grande mina ». 601.
- ALMANSI E. — « Sul principio fondamentale della Meccanica classica ». 10.
- AMERIO L. — « Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace ». 205.
- ANDRISSI G. L. — « Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934 ». Nota II. 244, 462.
- ARMELLINI G. — « Il problema ridotto dei due corpi di masse variabili ». 297.
- ARRIGHI G. — « Osservazioni sul moto newtoniano di due masse qualsiasi ». 177.

### B

- BANCHETTI A. — « La reazione di Reformatsky sulla benzammide ». 485.
- BARBA G. — « Polinomi definiti. — III. Interpretazioni, proprietà e complementi ». 19.
- BARONI A. — « Sulla non esistenza del bromuro bismutoso  $\text{BiBr}_2$  ». 195.
- ID. — « Solfuri, seleniuri e tellururi di tallio. - I. Seleniuri di tallio ». Nota I. 621.
- ID. — « Protosolfoselencloruro. Determinazione dell'indice di rifrazione

e della tensione superficiale di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  ». 626, 719.

- BIANCHI E. — « Commemorazione dell'astronomo dalmata Ruggero Boscovich ». 244, 278.
- BLANC A. C. — « Fauna a Ippopotamo ed industrie paleolitiche nel riempimento delle grotte litoranee del Monte Circeo. I. La Grotta delle Capre. II. La Grotta del Fossellone ». 88.
- ID. — « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli, in Terra d'Otranto ». 104.
- BLASCHKE W. — « Invarianti di complessi ». 111, 157.
- BOACA G. — « Sulle relazioni tra le derivazioni della verticale e le anomalie gravimetriche ». 607, 714.
- BOCCHINO G. — « La luminosità degli strumenti ottici telescopici e la loro efficienza ». 43.
- BOLLI M. — « Ricerche sulle amilasi. Nota preventiva ». 519.
- BOMPIANI E. — « Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei ». 104, 140.
- BONAVENTURA G. vedi VERONA O.
- BONINO G. B. e MANZONI ANSIDEI R. — « Sullo spettro Raman dell' $\text{N-deuteriopirrolo}$  ». 392, 494.
- ID. ID. — « Sulle righe attribuite ad una eventuale forma pirrolenica nello spettro Raman del pirrolo ». 392, 489.
- BONINO G. B. — « Sulla simmetria molecolare del pirrolo ». 502.



- BORGHELLO N. vedi SANDONNINI C.  
 BORTOLOTTI E. — « Quadriche di Moutard e fascio canonico ». 112, 158.  
 BORZINI G. — « Osservazioni sul parassitismo della "Sclerotinia libertiana" Fuck associata ad altri funghi ». 401.  
 BOTTI E. vedi: IANDELLI A.

## C

- CACCIOPPOLI R. — « Sul carattere analitico delle soluzioni di una classe di problemi del Calcolo delle Variazioni ». 24.  
 CALAPSO R. — « Sistemi di linee di una superficie invarianti rispetto a trasformazione per congruenza W ». 105.  
 ID. — « Alcune superficie di terzo e quarto ordine ». 112, 166.  
 CALIFANO L. — « Ricerche sulla glicolisi della retina ». 55, 93.  
 CARANO E. — « Commemorazione del Socio Nazionale *Pietro Romualdo Pirota* ». 56.  
 CARNERA L. — « Commemorazione del Socio Straniero *Federico Kustner* ». 66.  
 CASSINA U. — « Su di un'equazione integro-differenziale ». 301.  
 CAVALLARO L. — « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze ». Nota I. 332, 382.  
 ID. — « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze ». Nota II. 332, 509.  
 ID. — « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze » — III. Misure su alcool *n*-propilico e caprilico ». 626.  
 CAVINATO A. — « Valentinite della miniera di Ballao ». 140.  
 ID. — « La morenosite di Val Malenco ». 399.  
 CEDRANGOLO F. — « Attività amilasica del tessuto adiposo ». 137.  
 CESARI L. — « Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive ». 422.  
 CHECCHIA-RISPOLI G. — « Osservazioni preliminari sulla serie cenozoica dell'Appennino pugliese ». 14.  
 CHERUPINO S. — « Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari ». Nota I. 541.  
 ID. — « Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari ». Nota II. 547, 686.  
 CIUSA W. — « Sopra l'ossidazione degli  $\alpha$ -ossiacidi ». 632.  
 COLONNETTI G. — « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota I. 367.  
 ID. — « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota II. 439.  
 ID. — « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota III. 461, 580.  
 ID. — « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota IV. 585, 694.  
 COMUCCI P. — « Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorùm) ». Nota I. 648.  
 ID. — « Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorùm) ». Nota II. 652, 734.

## D

- DAL PIAZ G. B. — « La struttura geologica delle Austridi ». Nota V. Ancora sul sistema austroalpino delle Alpi Orientali ». 392.  
 DE ANGELI E. — « Su alcuni casi integrabili di movimento di un giroscopio asimmetrico pesante ». 699.  
 DE FRANCHIS F. — « Vincoli e reazioni nel più generale schema Lagrangiano ». 704.  
 DE MIRA FERNANDES A. — « Un aspetto formale della derivazione tensoriale ». 309.  
 ID. — « Espressioni della curvatura di una superficie ». 320, 353.  
 DE NIEDERHÄUSERN A. — « Influenza

del clima tropicale sul consumo di ossigeno nel lavoro », 671.

DOEBLIN W. — « Sur le cas continu des probabilités en chaîne », 111, 170.

D'ORGEVAL B. — « Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques », 433, 547.

DREYFUSS P. vedi: VANZETTI B. L.

## E

FEDELE M. — « Ancora sulla inesistenza di una rete nervosa periferica nei Tunicati », 656.

FINZI B. — « Propagazione del movimento nei fili », 82.

FRACASTORO M. G. — « La protuberanza eruttiva del 20 maggio 1937 », 710.

FRANCHETTI. S. — « Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt. », Nota I. 468.

ID. — « Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt ». Nota II. 474, 607.

FROLA E. — « Trasformazioni lineari funzionali ed equazioni integrali singolari », 312.

ID. — « Su di una generalizzazione dinamica del teorema di Betti diversa da quella di Lord Rayleigh », 586.

## G

GHERMANESCU M. — « Sur un théorème de M. Mauro Picone », 553.

GIACCARDI F. — « Su di una condizione perchè una funzione analitica periodica si riduca ad un polinomio trigonometrico », 557.

GIALANELLA L. — « Risultati della nuova determinazione di longitudine dell'asse della "Torre Senatoria del Campidoglio" e della "Torre del Primo Meridiano d'Italia a Monte Mario" », 237.

GIORCI G. — « Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche », 155.

ID. — « Sul magnetometro di tensione », 205.

GIORGI G. — « Trasformazioni di Laplace e operatori funzionali », 296.

GUARESCHI P. — « Considerazioni sul calcolo rapido ed approssimato dei calori specifici dei liquidi », 481.

ID. — « Sui coefficienti di associazione e loro variazione in funzione della temperatura », 516.

## H

HAIMOVICI M. — « Sulle superfici che si corrispondono per piani tangenti paralleli in modo che si conservi una rete di Tchebycheff », 27.

ID. — « Sugli spazi metrici a connessione affine », 315.

## I

IANDELLI A. e BOTTI E. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. Azoturi di Lantanio, Cerio e Praseodimio ». Nota II. 129.

ID. ID. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. Arseniuri e antimoniuri di Lantanio. Cerio e Praseodimio ». Nota III. 498.

ID. ID. — « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V gruppo. Composti del Neodimio ». Nota IV. 638.

## L

LABOCCETTA L. — « Energia potenziale e curvatura nei campi gravitazionali », 122.

LAMPARIELLO G. — « Interazione cinetica tra vortici e correnti irrotazionali », 444.

ID. — « Anelli vorticosi che generalizzano lo schema di Bénard-Kármán della resistenza idraulica », 590.

LEVI-CIVITA T. — « Forme canoniche dei  $ds^2$  binari con data curvatura totale », 197.

LOMBARDINI M. — « Sul vento di gradiente », 451.

## M

- MAGGI G. A. — « Sulle derivate tangenziali della funzione potenziale di superficie ». 293.
- MANGINI A. — « Sull'azione di alcune Idrazine sulla 1-cloro-2-4-dinitro-naftalina. Sui Nitroderivati aromatici ». Nota XII. 326.
- ID. — « Su alcune naftilammine sostituite, sui Nitroderivati aromatici ». Nota XIII. 333, 387.
- MANIÀ B. — « Un lemma notevole per i problemi di Mayer e una sua applicazione ». 564.
- MANZONI ANSIDEI R. vedi: BONINO G. B.
- MARCHESINI E. — « Sull'estensione dell'Oligocene nella regione a nord-est del Gruppo del Monte Judica (province di Catania ed Enna) ». 739.
- MARTINELLI E. — « La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse ». 33.
- ID. — « Sulla luminosità delle immagini quali appaiono in un cannocchiale ». 128, 185.
- ID. — « Sulla luminosità delle immagini, quali appaiono in un cannocchiale ». 128, 185.
- MARTINO G. — « Sulla probabile esistenza d'un ignoto fattore alimentare stimolante lo sviluppo sessuale ». 333.
- MARTIS IN BIDDAU S. — « Sulle funzioni di operatori lineari ». Nota I. 214.
- ID. — « Sulle funzioni di operatori lineari ». Nota II. 255.
- zione della pressione in regioni singolari ». 237.
- PASTORI M. — « Influenza di piccole viscosità di un fluido nella determinazione della pressione in regioni singolari ». 261.
- PERETTI G. — « Sorgenti plastiche ». 371.
- PERRI T. — « Ricerche sulle variazioni istologiche della tiroide nella cavia durante il ciclo dell'estro ». 277, 742.
- PERRIER C. e SEGRÈ E. — « Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43 ». 640, 723.
- PETRI L. — « Trasmissione del "virus" dell'arricciamento della vite attraverso i tessuti di una varietà resistente ». 413.
- PICCARDI G. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — V. Sulla ricerca del Gadolinio ». 44.
- ID. — « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — VI. Sulla ricerca del Samario ». 86.
- ID. — « Sullo spettro di fiamma dell'Europio e sopra la persistenza di tre righe di bassa eccitazione ». 647, 730.
- PIEPOLI P. — « Osservazioni sul giacimento piritoso-cuprifero di Champ de Praz in Valle d'Aosta ». 652.
- POMPILJ G. — « Sulle trasformazioni cremoniane del piano con curva di punti uniti ». 428.
- POPA I. — « Sulle "trasformate asintotiche" delle curve sghembe ». 107.
- ID. — « Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane ». Nota I. 220.
- POSSIO C. — « Sul moto rotazionale dei gas ». 455.
- PUPPO A. — « Ricerche sulla radiazione solare a Col d'Olen. — I. Radiazione diretta, diffusa, globale ». Nota I. 321.

## O

- OBERTI G. — « Propagazione ondosa in sistemi imperfettamente elastici ». 37.
- OCCHIALINI G. — « La radiazione gamma del Polonio-Berillio ». 188.

## P

- PALAMÀ G. — « La trasformazione di Gauss e i Polimoni di Hermite ». 356.
- PASTORI M. — « Influenza di piccole viscosità di un fluido nella determina-

## R

- RACAH G. — « Sulla forma lagrangiana delle forze elettromagnetiche ». 223.
- ID. — « Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie ». Nota I. 475.
- ID. — « Sopra i tensori isotropi che pre-

sentano particolari simmetrie ». Nota II. 481, 615.

ROMANO M. — « Contributo allo studio della pelle degli Anuri durante la metamorfosi ». 337.

ROVERETO G. — « Verso una nuova sintesi tettonica delle Alpi occidentali ». 101.

RUY LUIS GOMEZ. — « Une nouvelle démonstration de l'équivalence de deux systèmes de Dirac ». 560.

## S

SALVATORI A. — « Ulteriore contributo allo studio dell'ipocloremia post-operatoria ». 404.

SANDONNINI C. e BORGHELLO N. — « Elettrolisi del monoclورو di iodio in solventi diversi ». 46.

SANSONE G. — « Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Laplace ». 75.

SCARPA O. — « Sulla possibilità della lavorazione elettrolitica del rame fortemente impuro e sulla formazione di arborescenze catodiche nella raffinazione industriale del rame ». 533.

SCHREIBER G. — « La definizione degli stadi della metamorfosi del Bufo ». 342.

SCORZA G. — « Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito ». 532, 683.

SESTINI G. — « Corrente traslocircolatoria, in presenza di un arco di circonferenza con una sorgente eccentrica ». 112.

SEVERI F. — « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. 3.

ID. — « I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali ». Nota I 529.

ID. — « I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali ». Nota II. 532, 679.

STELLA A. — « Sopra una formazione gabbro-dioritica e kinzigitica nell'Alta Valtellina ». 537.

## T

TEDESCHI G. — « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota I. 641.

TOLOTTI C. — « Sui problemi di elasticità piana a funzione di Airy polidroma ». 226.

ID. — « Sulla generalizzazione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale ». 377.

TOSCANO L. — « Sullo scarto della permutabilità nella teoria degli operatori lineari ». 430.

ID. — « L'equazione secolare a matrice circolante ». 564.

TRICOMI F. — « Sulla formula d'inversione di Widder ». 366, 416.

TURRI T. — « Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due ». 320, 361.

## U

UDESCHINI P. — « Una soluzione relativa alla espansione dell'Universo ». 231.

## V

VANZETTI B. L. e DREYFUSS P. — « La configurazione dell'olivile e dell'isolivile ». 133.

VECCHI A. — « Osservazioni su gonadi di fagiane ibride sterili e mascolinizzate ». 662.

VERONA O. e BONAVENTURA G. — « Influenza che sullo sviluppo delle piante esercita la eliminazione parziale delle riserve accompagnanti l'embrione e probabile presenza in esse di " sostanze di accrescimento " ». 53.

VILLA M. — « Le varietà, a quattro dimensioni, che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,3}$  ». 434.

ID. — « Proprietà differenziale dei coni di Veronese ». 691.

**Z**

- ZAGAMI V. — « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — I. Sul valore del pH del liquido seminale umano normale », 268.
- ZANABONI O. — « Dimostrazione generale del Principio del De Saint-Venant », 117.
- ID. — « Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio del De Saint-Venant in un solido isotropo », 595.
-



## INDICE PER MATERIE

### A

- Astronomia.** — « Altezza della cromosfera nel 1936 ed andamento del ciclo solare ». ABETTI G. 253.
- « Sulla variazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico sul Campidoglio dal 1920 al 1934 ». Nota II. ANDRISSI G. L. 244, 462.
- « Il problema ridotto dei due corpi di masse variabili ». ARMELLINI G. 297.
- « La protuberanza eruttiva del 29 maggio 1937 ». FRACASTORO M. G. 710.
- « Risultati della nuova determinazione di longitudine dell'asse della "Torre Senatoria del Campidoglio" e della "Torre del Primo Meridiano d'Italia a Monte Mario" ». GIALANELLA L. 237.

### B

- Biologia.** — « Ricerche sulle amilasi ». Nota preventiva. BOLLI M. 519.
- « Osservazioni sul parassitismo della "Sclerotinia libertiana" Fuck associata ad altri funghi ». BORZINI G. 401.
- « Ancora sulla inesistenza di una rete nervosa periferica nei Tunicati ». FEDELE M. 656.
- « Trasmissione del "virus" dell'arricciamento della vite attraverso i tessuti di una varietà resistente ». PETRI L. 413.
- « Contributo allo studio della pelle degli Anuri durante la metamorfosi ». ROMANO M. 337.
- « La definizione degli stadî della metamorfosi del Bufo ». SCHREIDER G. 342.
- « Osservazioni su gonadi di fagiane

ibride sterili e mascolinizzate ». VECCHI A. 662.

**Bollettino bibliografico.** — 73, 147, 248, 350, 528,

**Botanica.** — « Influenza che sullo sviluppo delle piante esercita la eliminazione parziale delle riserve accompagnanti l'embrione e probabile presenza in esse di "sostanze di accrescimento" ». VERONA O. e BONAVENTURA G. 53.

### C

**Chimica.** — « La reazione di Reformatsky sulla benzammide ». BANCHETTI A. 485.

- « Sulla non esistenza del bromuro bismutoso  $\text{Bi Br}_2$  ». BARONI A. 195.
- « Solfuri, seleniuri e tellururi di tallio. — I. Seleniuri di tallio ». Nota I. ID. 621.
- « Protosolfoselencloruro. Determinazione dell'indice di rifrazione e della tensione superficiale di miscele di zolfo nel protocloruro di selenio  $\text{Se}_2\text{Cl}_2$  ». ID. 626, 719.
- « Interpretazione geochimica delle formazioni quaternarie di Grotta Romanelli in Terra d'Otranto ». BLANC G. A. 104.
- « Sullo spettro Raman dell'N-deuteriopirrolo ». BONINO G. B. e MANZONI ANSIDEI R. 392, 494.
- « Sulle righe attribuite ad una eventuale forma pirroleninica nello spettro Raman del pirrolo ». ID. ID. 392, 489.
- « Sulla simmetria molecolare del pirrolo ». BONINO G. B. 502.
- « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofre-

- quenze ». Nota I. CAVALLARO L. 332, 382.
- Chimica.** — « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze ». Nota II. ID. 332, 509.
- « Bande di assorbimento in sostanze polari ad elevatissime radiofrequenze. — III. Misure su alcool *n*-propilico e caprilico ». ID. 626.
- « Sopra l'ossidazione degli  $\alpha$ -ossiacidi ». CIUSA W. 632.
- « Considerazioni sul calcolo rapido ed approssimato dei calori specifici dei liquidi ». GUARESCHI P. 481.
- « Sui coefficienti di associazione e loro variazione in funzione della temperatura ». ID. 516.
- « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Azoturi di Lantanio, Cerio e Praseodimio ». Nota II. IANDELLI A. e BOTTI E. 129.
- « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Arseniuri e antimoniuri di Lantanio, Cerio e Praseodimio ». Nota III. ID. ID. 498.
- « Sulla struttura cristallina dei composti delle terre rare con i metalloidi del V Gruppo. Composti del Neodimio ». Nota IV. ID. ID. 638.
- « Sull'azione di alcune Idrazine sulla 1-cloro-2-4-dinitro-naftalina. Sui nitroderivati aromatici ». Nota XII. MANGINI A. 326.
- « Su alcune naftilammine sostituite. Sui Nitroderivati aromatici ». Nota XIII. ID. 333 387.
- « Sulla probabile esistenza d'un ignoto fattore alimentare stimolante lo sviluppo sessuale ». MARTINO G. 333.
- « Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43 ». PERRIER C. e SEGRE E. 640, 723.
- « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — V. Sulla ricerca del Gado-linio ». PICCARDI G. 44.
- « Spettri molecolari ed analisi spettroscopica. — VI. Sulla ricerca dei Samario ». ID. 86.
- « Elettrolisi del monocloruro di iodio

- in solventi diversi ». SANDONNINI C. e BORGHELLO N. 46.
- « La configurazione dell'olivile e dell'isoolivile ». VANZETTI B. L. e DREYFUSS P. 133.
- Chimica Biologica.** — « Attività amilassica del tessuto adiposo ». CEDRANGOLÒ F. 137.
- Chimica-Fisica.** — « Sullo spettro di fiamma dell'europio e sopra la persistenza di tre righe di bassa eccitazione ». PICCARDI G. 647, 730.
- « Sulla velocità di dissoluzione del piombo negli acidi ». Nota I. TEDESCHI G. 641.
- Commemorazioni.** — 56, 66, 244, 278.
- Comunicazioni varie.** — 527, 676.

## E

- Elettrochimica.** — « Sulla possibilità della lavorazione elettrolitica del rame fortemente impuro e sulla formazione di arborescenze catodiche nella raffinazione industriale del rame ». SCARPA O. 533.

## F

- Fisica.** — « La luminosità degli strumenti ottici telescopici e la loro efficienza ». BOCCHINO G. 43.
- « Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt ». Nota I. FRANCHETTI S. 468.
- « Sul calcolo della penetrazione degli elettroni di qualche milione di volt ». Nota II. ID. 474, 607.
- « Metodo pel calcolo degli effetti di distorsione nelle linee telegrafiche e telefoniche ». GIORGI G. 155.
- « Energia potenziale e curvatura nei campi gravitazionali ». LABOCETTA L. 122.
- « Sulla luminosità delle immagini quali appaiono in un canocchiale ». MARTINELLI L. 128, 185.
- « La radiazione gamma del Polonio-Berillio ». OCCHIALINI G. 188.
- « Sopra i tensori isotropi che presen-

tano particolari simmetrie ». Nota I. RACAH G. 475.

**Fisica.** — « Sopra i tensori isotropi che presentano particolari simmetrie ». Nota II. ID. 481, 615.

**Fisiologia.** — « Influenza del clima tropicale sul consumo di ossigeno nel lavoro ». DE NIEDERHÄUSERN A. 671.

— « Ricerche sulle variazioni istologiche della tiroide nella cavia durante il ciclo dell'estro ». PERRI T. 277, 472.

— « Ulteriore contributo allo studio dell'ipocloremia post-operatoria ». SALVATORI A. 404

— « Ricerche sperimentali sul liquido seminale. — I. Sul valore del pH del liquido seminale umano normale ». ZAGAMI V. 268.

## G

**Geodesia.** — « Sulle relazioni tra le deviazioni della verticale e le anomalie gravimetriche ». BOAGA G. 607, 714.

**Geofisica.** — « I risultati scientifici di una grande mina ». AGAMENNONE G. 601.

— « Ricerche sulla radiazione solare a Col d'Olen. — I. Radiazione diretta, diffusa, globale ». Nota I. PUPPO A. 321.

**Geologia.** — « Fauna a Ippopotamo ed industrie paleolitiche nel riempimento delle grotte litoranee del Monte Circeo. — I. La Grotta delle Capre. — II. La Grotta del Fossellone ». BLANC A. C. 88.

— « Osservazioni preliminari sulla serie cenozoica dell'Appennino pugliese ». CHECCHIA-RISPOLI G. 14.

— « La struttura geologica delle Austridi. Nota V. Ancora sul sistema austroalpino delle Alpi Orientali ». DAL PIAZ G. B. 392.

— « Sull'estensione dell'Oligocene nella regione a nord-est del Gruppo del Monte Judica (province di Catania ed Enna) ». MARCHESINI E. 739.

— « Verso una nuova sintesi tettonica

delle Alpi Occidentali ». ROVERETO G. 101.

**Geometria.** — « Proprietà differenziale dei coni di Veronese ». VILLA M. 691.

**Geometria Algebrica.** — « I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali. » Nota I. SEVERI F. 529.

— « I sistemi d'equivalenza di specie qualunque sopra una varietà algebrica, come sistemi razionali ». Nota II. ID. 532, 679.

## M

**Matematica.** — « Alcuni complementi alla teoria della trasformazione di Laplace ». AMERIO L. 205.

— « Polinomi definiti. — III. Interpretazioni, proprietà e complementi ». BARBA G. 19.

— « Invarianti di complessi ». BLASCHKE W. 111, 157.

— « Costruzione di elementi superficiali a partire da elementi curvilinei ». BOMPIANI E. 104, 149.

— « Quadriche di Moutard e fascio canonico ». BORTOLOTTI E. 112, 158.

— « Sul carattere analitico delle soluzioni di una classe di problemi del Calcolo delle Variazioni ». CACCIOPPOLI R. 24.

— « Sistemi di linee di una superficie invarianti rispetto a trasformazione per congruenza W ». CALAPSO R. 105.

— « Alcune superficie di terzo e quarto ordine ». ID. 112, 166.

— « Su di un'equazione integro-differenziale ». CASSINA U. 301.

— « Sulla risoluzione dei sistemi di equazioni lineari per approssimazioni successive ». CESARI L. 422.

— « Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari ». Nota I. CHERUBINO S. 541.

— « Applicazione delle funzioni olomorfe di matrici ai sistemi di equazioni differenziali lineari ». Nota II. ID. 547, 686.

— « Un aspetto formale della derivazione

tensoriale ». DE MIRA FERNANDES A. 309.

**Matematica.** — « Espressioni della curvatura di una superficie ». ID. 320, 353.

— « Sur le cas continu des probabilités en chaîne ». DOEBLIN W. III, 170.

— « Sur une extension du principe de dégénérescence à la théorie des surfaces algébriques ». D'ORGEVAL B. 433 547.

— « Trasformazioni lineari funzionali ed equazioni integrali singolari ». FROLA E. 312.

— « Sur un théorème de M. Mauro Picone ». GHERMANESCU M. 553.

— « Su di una condizione perchè una funzione analitica periodica si riduca ad un polinomio trigonometrico ». GIACCARDI F. 557.

— « Sulle superficie che si corrispondono per piani tangenti paralleli in modo che si conservi una rete di Tchebycheff ». HAIMOVICI M. 27.

— « Sugli spazi metrici a connessione affine ». ID. 315.

— « Forme canoniche dei  $ds_2$  binari con data curvatura totale ». LEVI-CIVITA T. 197.

— « Un lemma notevole per i problemi di Mayer e una sua applicazione ». MANIÀ B. 564.

— « La formula di Cauchy per le funzioni analitiche di due variabili complesse ». MARTINELLI E. 33.

— « Sulle funzioni di operatori lineari ». Nota I. MARTIS IN BIDDAU S. 214.

— « Sulle funzioni di operatori lineari ». Nota II. ID. 255.

— « La trasformazione di Gauss e i Polinomi di Hermite ». PALAMÀ G. 356.

— « Sulle trasformazioni cremoniane del piano con curva di punti uniti ». POMPILJ G. 428.

— « Sulle "trasformate asintotiche" delle curve sghembe ». POPA I. 107.

— « Geometria proiettivo-differenziale delle singolarità delle curve piane ». Nota I. ID. 220.

— « Une nouvelle démonstration de

l'équivalence de deux systèmes de Dirac ». RUY LUIS GOMES. 560.

**Matematica.** — « Sulla sommabilità di Cesaro delle serie di Laplace ». SAN-SONE G. 75.

— « Sulle algebre legate ai gruppi di ordine finito ». SCORZA G. 532, 683.

— « Complementi alla teoria generale delle corrispondenze tra varietà algebriche ». Nota II. SEVERI F. 3.

— « Sullo scarto della permutabilità nella teoria degli operatori lineari ». TOSCANO L. 430.

— « L'equazione secolare a matrice circolante ». ID. 574.

— « Sulla formula d'inversione di Wigner ». TRICOMI F. 366, 416.

— « Una osservazione sulla classificazione delle curve di genere due ». TURRI T. 320, 361.

— « Le varietà, a quattro dimensioni, che posseggono  $\infty^7$  quasi-asintotiche  $\gamma_{1,2}$  ». VILLA M. 434.

**Meccanica.** — « Sul principio fondamentale della Meccanica classica ». ALMANSI E. 10.

— « Osservazioni sul moto newtoniano di due masse qualsiasi ». ARRIGHI G. 177.

— « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota I. COLONNETTI G. 367.

— « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota II. ID. 439.

— « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota III. ID. 461, 580.

— « Su l'equilibrio elastico dei sistemi in cui si verificano anche deformazioni non elastiche ». Nota IV. ID. 585, 694.

— « Su alcuni casi integrabili di movimento di un giroscopio asimmetrico pesante ». DE ANGELI E. 699.

— « Vincoli e reazioni nel più generale schema Lagrangiano ». DE FRANCHIS F. 704.



**Meccanica.** — « Propagazione del movimento nei fili ». FINZI B. 82.

— « Su di una generalizzazione dinamica del teorema di Betti diversa da quella di Lord Rayleigh ». FROLA E. 586.

— « Sul magnetometro di tensione ». GIORGI G. 205.

— « Trasformazioni di Laplace e operatori funzionali ». ID. 296.

— « Interazione cinetica tra vortici e correnti irrotazionali ». LAMPARIELLO G. 444.

— « Anelli vorticosi che generalizzano lo schema di Bénard-Kármán della resistenza idraulica ». ID. 590.

— « Sul vento di gradiente ». LOMBARDINI M. 451.

— « Sulle derivate tangenziali della funzione potenziale di superficie ». MAGGI G. A. 293.

— « Propagazione ondosa in sistemi imperfettamente elastici ». OBERTI G. 37.

— « Influenza di piccole viscosità di un fluido nella determinazione della pressione in regioni singolari ». PASTORI M. 237, 261.

— « Sorgenti plastiche ». PERETTI G. 371.

— « Sul moto rotazionale dei gas ». POSSIO C. 455.

— « Sulla forma lagrangiana delle forze elettromagnetiche ». RAGAH G. 223.

— « Corrente traslocircolatoria, in presenza di un arco di circonferenza, con una sorgente eccentrica ». SESTINI G. 112.

— « Sui problemi di elasticità piana a funzione di Airy polidroma ». TOLLOTTI C. 226.

— « Sulla generalizzazione delle equazioni di Dirac allo spazio della relatività generale ». ID. 377.

— « Una soluzione relativa alla espansione dell'Universo ». UDESCHINI P. 231.

**Meccanica.** — « Dimostrazione generale del Principio del De Saint-Venant ». ZANABONI O. 117.

— « Valutazione dell'errore massimo cui dà luogo l'applicazione del principio del De Saint-Venant in un solido isotropo ». ID. 595.

**Mineralogia.** — « Valentinite della miniera di Ballao ». CAVINATO A. 140.

— « La morenosite di Val Malenco ». ID. 399.

— « Osservazioni sul giacimento piritoso-cuprifero di Champ de Praz in Valle d'Aosta ». PIEPOLI P. 652.

— « Sopra una formazione gabbro-dioritica e kinzigitica nell'Alta Valtellina ». STELLA A. 537.

## P

**Patologia.** — « Ricerche sulla glicolisi della retina ». CALIFANO L. 55, 93.

**Personale Accademico.** — 72, 145, 245, 525.

**Petrografia.** — « Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorum) ». Nota I. COMUCCI P. 648.

— « Di una singolare roccia del ghiacciaio Baltoro (Karakorum) ». Nota II. ID. 652, 734.

**Presentazione di libri.** — 72, 146, 247, 527, 675.

**Presentazione di Note e Memorie.** — 72, 146, 247, 349, 527, 675.

**Presentazione di plichi suggellati.** — 247, 676.

## R

**Radioattività.** — « Alcune proprietà chimiche dell'elemento 43 ». PERRIER C. e SEGRÈ E. 723.

**Relazioni di Commissioni.** — 245, 676.

**Relazioni sui temi dati.** — 145, 675.







